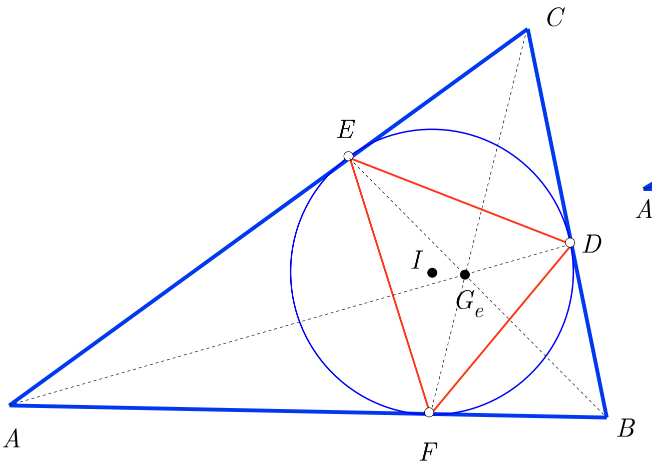
Sean Δ el área de un triángulo, r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita y $\overline{\Delta}$ el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita, entonces $r\Delta = 2R\overline{\Delta}$.

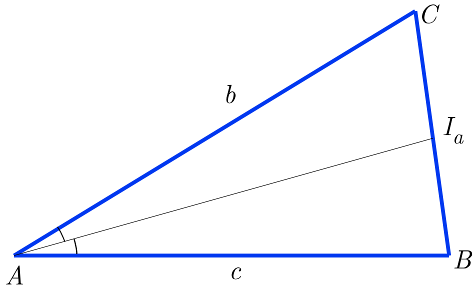
SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **484**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

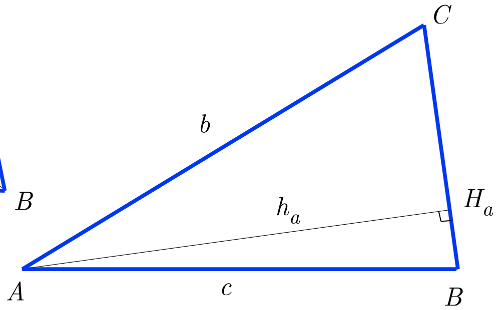
Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein", 64100 Teramo, Italia. Con el enunciado:

Sea S el área del triángulo y S_n el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. Es: $S = S_n(2R/r)$.

—— - ——







Vamos a obtener la fórmula del enunciado utilizando las identidades conocidas en un triángulo que relacionan los radios r y R de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro s, con el área de $\widehat{ABC}$:

$$4\,\text{área}\,\widehat{ABC}\;R = abc, \qquad \text{área}\,\widehat{ABC} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

la segunda es la fórmula de Heron.

El camino que vamos a seguir no es, por supuesto, ni original, ni elemental, ni ingenioso o elegante, pero sí nos sirve para poner de manifiesto el uso de coordenadas homogéneas relativas a una referencia proyectiva tomada en el plano, en la que los puntos base son los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$ y el punto unidad es su baricentro G (coordenadas baricéntricas homogéneas).

En primer lugar, tener presente que el área de un triángulo, cuando sus vértices vienen dados en coordenadas baricéntricas respecto a $\widehat{ABC}$, es:

$$\text{área}\,\widehat{DEF} = \text{área}\,\widehat{ABC}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

siendo

$$D(x_1, y_1, z_1), \qquad E(x_2, y_2, z_2), \qquad F(x_3, y_3, z_3),$$

con $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = x_3 + y_3 + z_3 = 1$, es decir, dados por sus coordenadas baricéntricas absolutas.

Si los vértices están dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, dividimos éstas por la suma de sus respectivas coordenadas.

En segundo lugar, admitamos (*) que los puntos de contacto de la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$ con sus lados (que son los pies de las cevianas del punto de Gergonne), tienen coordenadas:

$$D(0 : s-c : s-b), \qquad E(s-c : 0 : s-a), \qquad F(s-b : s-a : 0). \tag{1}$$

Con lo que

$$\text{área } \widehat{DEF} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & s-c & s-b \\ s-c & 0 & s-a \\ s-b & s-a & 0 \end{vmatrix} = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \text{área } \widehat{ABC} = \frac{r}{2R} \text{área } \widehat{ABC} .$$

(*) Para la obtención de las coordenadas de los vértices (1) del triángulo de contacto interior $\widehat{DEF}$, debemos trazar las paralelas a las alturas por el incentro y encontrar las coordenadas de sus intersecciones con los lados. Para ello podemos proceder como se indica a continuación:

Tener presente que si los puntos $P_i(x_i : y_i : z_i)$, $i = 1, 2$, vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, tales que $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$, el punto P que separa P_1 y P_2 en la razón m/n ($P_1P/PP_2 = m/n = \rho$) es

$$P(nx_1 + mx_2 : ny_1 + my_2 : nz_1 + mz_2).$$

En particular, si P se aleja indefinidamente sobre la recta P_1P_2, m/n tiende a -1; y, por tanto, las coordenadas de P tienden a $(x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : z_1 - z_2)$, punto del infinito de la recta P_1P_2.

Haciendo uso de esto y del teorema de la bisectrices: "toda bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a la longitud de los lados que con ella concurren", se obtiene que el punto en que la bisectriz por A corta al lado opuesto es $I_a(0 : b : c)$; ya que, $BI_a/I_aC = c/b$.

Similarmente, se obtiene $I_b(a : 0 : c)$ y $I_c(a : b : 0)$ son los puntos en que las bisectrices en B y C cortan a los lados opuestos. Entonces las rectas AI_a, BI_b y CI_c se cortan ene el punto $I(a : b : c)$, incentro de $\widehat{ABC}$.

Vamos a determinar ahora las coordenadas baricéntricas del pie H_a de la altura desde el vértice A:
H_a divide a BC en la razón $\dfrac{BH_a}{H_aC} = \dfrac{\operatorname{tag} C}{\operatorname{tag} B}$, por lo que $H_a(0 : \operatorname{tag} B : \operatorname{tag} C)$.

Por el mismo camino, se obtiene que $H_b(\operatorname{tag} A : 0 : \operatorname{tag} C)$ y $H_c(\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : 0)$, para los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. Con lo que el punto de intersección de las alturas AH_a, BH_b y CH_c es $H(\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : \operatorname{tag} C)$.

Usando el teorema del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, y las identidades $bc \operatorname{sen} A = ca \operatorname{sen} B = ab \operatorname{sen} C$, las coordenadas obtenidas del ortocentro son proporcionales a

$$\left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Para determinar el punto D de contacto de la circunferencia inscrita con el lado BC, debemos determinar la recta que pasa por I y tiene el mismo punto del infinito que la recta AH_a, el cual tiene por coordenadas la diferencia de las coordenadas de A y H_A, cuando éstas suman lo mismo:

$$A(2a^2 : 0 : 0), \qquad H_a(0 : a^2 + b^2 - c^2 : c^2 + a^2 - b^2).$$

Así, el punto D es la intersección de las rectas:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -2a^2 & a^2 + b^2 - c^2 & b^2 + c^2 - b^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad x = 0.$$

$$\big(0 : a(a^2 + b^2 - c^2) + 2a^2 b : a(c^2 + a^2 - b^2) + 2a^2 c\big) = \big(0 : (a+b)^2 - c^2 : (a+c)^2 - b^2\big) =$$

$$= \big(0 : (a+b+c)(a+b-c) : (a+b+c)(a+c-b)\big) = (0 : a+b-c : a+c-b) = (0 : s-c : s-b).$$

Análogamente, se llega a que $E(s-c : 0 : s-a)$ y $F(s-b : s-a : 0)$.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2323.pdf