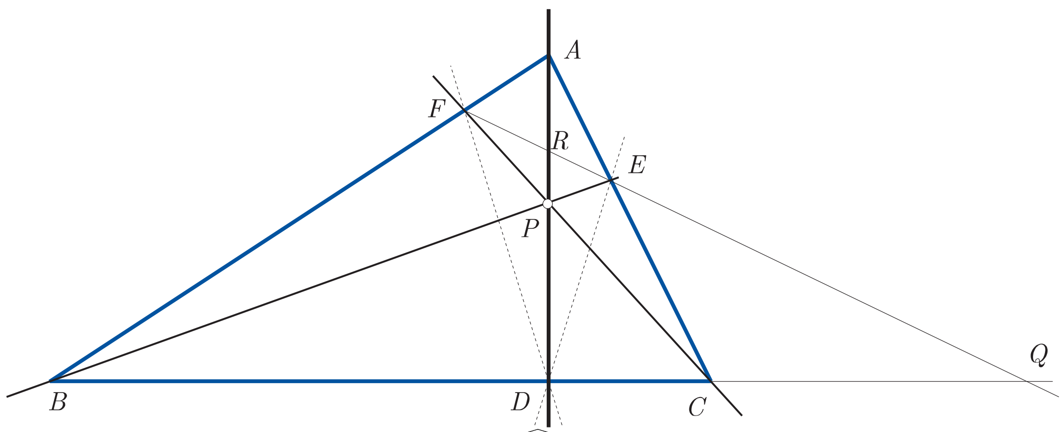
Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea D el pie de la altura desde A, P un punto arbitrario en AD, E el punto de intersección del lado AC con la recta BP y F el punto de intersección del lado AB con la recta CP, entonces las rectas DE y DF son simétricas respecto a AD.

Sean los puntos $G = PC \cap ED$ y $H = PB \cap FD$; y, construimos los puntos E' y F' donde cortan BG y CH a los lados AC y AB, respectivamente. Sean $P' = CF' \cap BE$, $P^* = EF' \cap E'F$. Probar que los puntos P' y P^* están sobre AD. ¿Es cierto para cualquier ceviana?

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{488}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid; con el siguiente enunciado:

Se escoge un punto arbitrario P en el interior de la altura AD de un triángulo ABC. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F, respectivamente. Demostrar que <PDF=<PDE. ¿Qué sucede si P está fuera del triángulo o la altura AD es exterior al triángulo?
Haruki (1980) Ontario Secondary School Mathematics Bulletin
Sean $G = PC \cap ED$, y $H = PB \cap FD$; y, construimos los puntos E', F'donde cortan BG, y CH, prolongadas a los lados AC y AB, respectivamente.
Sean $P' = CF' \cap BE'$, $P^* = EF' \cap E'F$.
Probar que:
Los puntos P^*, y P'están sobre AD (¿es cierto para cualquier ceviana?).



Utilizando coordenadas baricéntricas (*), respecto a $\widehat{ABC}$, $D(0 : S_C : S_B)$ y $P(\lambda : S_C : S_B)$ es un punto genérico en AD. La recta $BP: \ S_B x - \lambda z = 0$ corta a AC en $E(\lambda : 0 : S_B)$. La recta $CP: \ S_C x - \lambda y = 0$ corta a AB en $F(\lambda : S_C : 0)$.

El simétrico(**) de E respecto a AD es $E'(\lambda(S_B + S_C) : 2S_B S_C : S_B(S_B - S_C))$. Los puntos D, F y E' están alineados, ya que es nulo el determinante formado con sus coordenadas:

$$\begin{vmatrix} 0 & S_c & S_B \\ \lambda & S_C & 0 \\ \lambda(S_B + S_C) & 2S_B S_C & SB(S_B - S_C) \end{vmatrix} = 0.$$

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

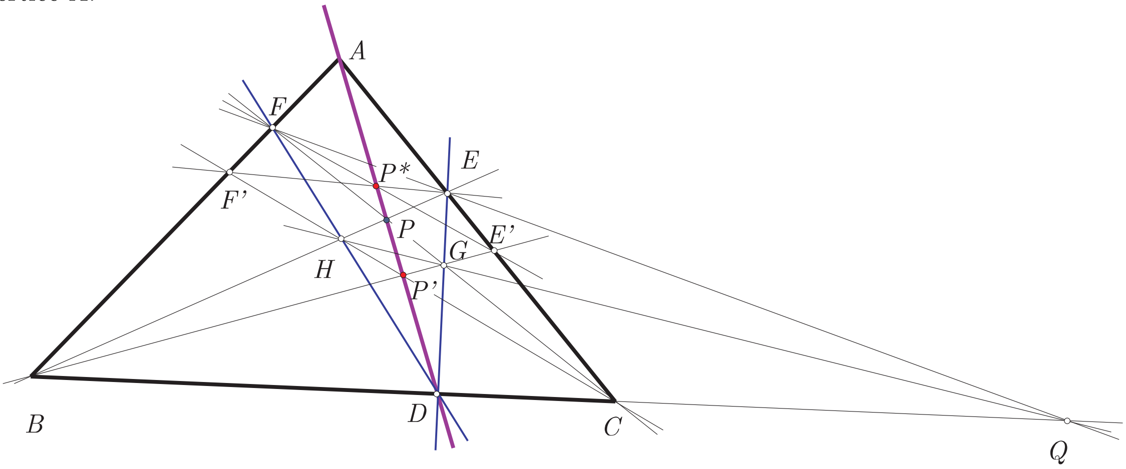
(*) El uso de coordenadas es un recurso que nos permite afrontar un problema sin tener presente los hechos geométricos necesarios, y aún careciendo de la idea ingeniosa para utilizarlos. Los cálculos analíticos pueden llegar a ser engorrosas, pero puede servirnos de ayuda algún programa de cálculo simbólico.

El problema que nos ocupa puede ser resuelto teniendo en cuenta que en el cuadrivértice $AEPF$, los puntos diagonales B y C están armónicamente separados de los puntos D y Q en que los lados que pasan por el otro punto diagonal R cortan a la recta BC; por tanto (proyectando desde P), E y F están separados armónicamente de R y Q. Concluimos que las rectas, perpendiculares, DA y DC están armónicamente separadas de las DE y DF, por lo que los ángulos determinados por éstas quedan bisecados por las anteriores.

(**) Utilizamos la noción de perpendicularidad en coordenadas baricéntricas expuesta en el documento (provisional y pendiente de revisión) http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf.

Segunda parte:

Haremos la demostración para el caso general, es decir, cuando AD es una ceviana, no necesariamente la altura desde el vértice A.



Consideremos la proyectividad entre haces de rectas con puntos base en B y C, determinada por los pares de rectas homólogas:

$$(BA,\ CA), \qquad (BP,\ CP), \qquad (BC,\ CB).$$

Como la recta BC, que une los puntos base, se corresponden, esta proyectividad es una perspectividad, con eje de perspectividad la recta AD (donde se cortan las rectas homólogas).

Esta perspectividad entre haces induce una perspectividad entre los puntos de las rectas DE y DF, determinada por los pares de puntos homólogos:

$$(E,\ F), \qquad (G,\ H), \qquad (D,\ D).$$

Luego las rectas que unen punto homólogos pasan por un mismo punto $Q = EF = GH = CB$. Este punto Q es el armónicamente separado de D, respecto a B y C; pues, B y C son dos puntos diagonales del cuadrivértice $AFPE$ y D y Q son los puntos en que los lados opuestos AP y EF cortan a la recta BC.

El cuadrivértice $PHP'G$ tiene dos puntos diagonales en B y C y los lados opuestos PP' y HG cortan a BC en D' y Q. Como se tiene la igualdad de razones dobles $(B\,C\,D'\,Q) = (B\,C\,D\,Q) = -1$, se sigue que $D = D'$ y, por tanto, P' está en la recta PD.

Para establecer que también P^* está en AD, usamos que P está en AD, eje de perspectividad de la perspectividad entre los haces de puntos base en B y C, considerada antes. Y como entonces las rectas BE' y CF' son homólogas, se induce una perspectividad entre los puntos de las rectas CA y BA con pares de puntos homólogos:

$$(A,\ A) \qquad (E,\ F), \qquad (E',\ F'), \qquad (C,\ B).$$

Las rectas que unen puntos homólogos se cortan en Q. Tenemos entonces que $E'F'$ contiene a Q.

Tomemos ahora el cuadrivértice AFP^*E; en él, los puntos diagonales E' y F' están armónicamente separados de los puntos D^* y Q en que sus lados opuestos que pasan por el otro punto diagonal S (no etiquetado en la figura); es decir, $(E'\,F'\,D^*\,Q) = -1$. Si proyectamos estos puntos desde A sobre la recta BC se obtiene que $(C\,B\,D'^*, Q) = -1$ y como $(C\,B\,D\,Q) = -1$, se tiene que $D'^* = D$; lo que implica que D^* está en AD y como también está en AP^*. Se concluye que P^* está en AD.

Enfoque analítico (de esta segunda parte):

Sean un punto $P(u : v : w)$ y $D(0 : v : w), E(u : 0 : w)$ y $F(u : v : 0)$ los pies de sus cevianas desde los vértices A, B y C, respectivamente. $G(u : v : 2w)$ es el punto $PC \cap ED$ y $H(u : 2v : w)$ es $PB \cap FD$. La intersección de las rectas

$$BG:\ 2wx - uz = 0, \qquad CH:\ 2vx - uy = 0,$$

es el punto $P'(u : 2v : 2w)$ que está en $AP:\ vz - wy = 0$.

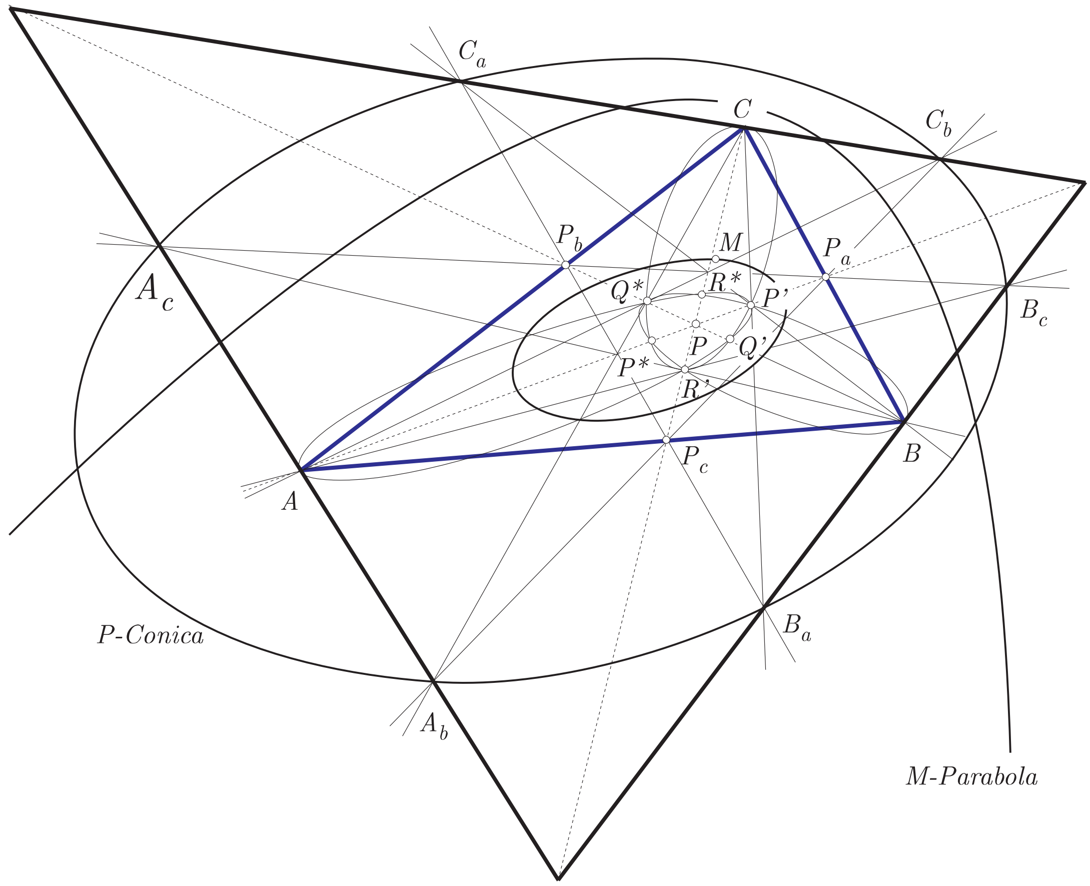
$AC \cap PG = E'(u : 0 : 2w)$, $AB \cap CH = F'(u : 2v : 0)$; entonces las rectas

$$FE' : 2vwx + 2uwy + uvz = 0, \qquad F'E:\ 2vwx - uwy - 2uvz = 0,$$

se intersecan en $P^*(3u : 2v : 2w)$, que está en la recta $AP: \ vz - wy = 0$.

Consideraciones adicionales:

Así como hemos obtenido, en la segunda parte del problema, los puntos $P'(u : 2v : 2w)$ y $P^*(3u : 2v : 2w)$ situados sobre la ceviana AP, mediante construcción similar, podemos obtener sendos pares de puntos $Q'(2u : v : 2w), Q^*(2u : 3v : 2w)$ sobre la ceviana BP y $R'(2u : 2v : w), R^*(2u : 2v : 3w)$ sobre CP. Entonces ocurre:



Los puntos P', Q', Q^*, R', R^* están en una cónica que pasa por A, de ecuación,

$$4uw^2y^2 + 4uv^2z^2 - 7uvwyz - v^2wzx - vw^2xy = 0.$$

Los puntos P', P^*, Q', R', R^* están en la cónica que pasa por B:

$$4vw^2x^2 + 4u^2vz^2 - uw^2xy - 7uvwxz - u^2wyz = 0.$$

Y, finalmente los puntos P', P^*, Q', Q^*, R' y C están en la cónica:

$$4v^2wx^2 + 4u^2wy^2 - 7uvwxy - uv^2xz - u^2vyz = 0.$$

Las tangentes a estas cónicas en los correspondientes vértices de $\widehat{ABC}$ son respectivamente:

$$wy + vz = 0, \qquad wx + uz = 0, \qquad vx + uy = 0.$$

que son los lados del triángulo preceviano de $\widehat{ABC}$.

Si, cambiando la notación, denotamos por $\widehat{P_aP_bP_c}$ el triángulo ceviano de P, se verifica que los puntos

$$A_b = P_cP_a \cap CQ',\ A_c = P_aP_b \cap BR',\ B_a = P_bP_c \cap CP',\ B_c = P_aP_b \cap AR',\ C_b = P_aP_c \cap AQ',\ C_a = P_cP_b \cap BP',$$

están en los lados del triángulo preceviano de P y sus coordenadas son:

$$A_b(2u : v : -w), \quad A_c(2u : -v : w), \quad B_a(u : 2v : -w), \quad B_c(u : -2v : -w), \quad C_a(u : v : -2w), \quad C_b(-u : v : 2w).$$

Estos seis puntos están en una cónica de ecuación:

$$v^2w^2x^2 + u^2w^2y^2 + u^2v^2z^2 + 6vwu^2yz + 6uv^2wzx + 6vw^2uxy = 0. \tag{1}$$

Cuyo centro es el punto de coordenadas

$$\big(u(4u - 3v - 3w), v(-3u + 4v - 3w), w(-3u - 3v + 4w)\big).$$

Esta cónica es parábola cuando el punto $P(u : v : w)$ está en la elipse de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xy - 3xz - 3yz = 0.$$

Algunos centros notables de las cónicas (1), corresponden a $P = X_4$ y $P = X_5$, ortocentro y centro del la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\widehat{ABC}$:

Para $P = X_4$, el centro de la cónica (1) es el producto baricéntrico de X_4 y X_{1657},

$$X_{1657}(4S_BS_C - 3S_AS_B + 3S_AS_C : 4S_CS_A - 3S_BS_C + 3S_BS_A : 4S_AS_B - 3S_CS_A + 3S_CS_B).$$

Para X_5, el centro de la cónica (1) es el producto baricéntrico de X_5 Y X_{548},

$$X_{548}(2S_BS_C - 5S_AS_B - 5S_AS_C : 2S_CS_A - 5S_BS_C - 5S_BS_A : 2S_AS_B - 5S_CS_A - 5S_CS_B),$$

el X_{548} es el punto medio de X_5 y X_{20}, punto de De Longschamps.