

Dada una circunferencia Γ y un punto A (exterior) hallar la polar recíproca del lugar geométrico de los centros de los circunferencias circunscritas a los infinitos triángulos autopolares de vértice A , con respecto a la homóloga de la circunferencia Γ , en la homología de centro A , eje la polar de A (resp. a Γ) y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de A , no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto A respecto a la homóloga de la circunferencia.

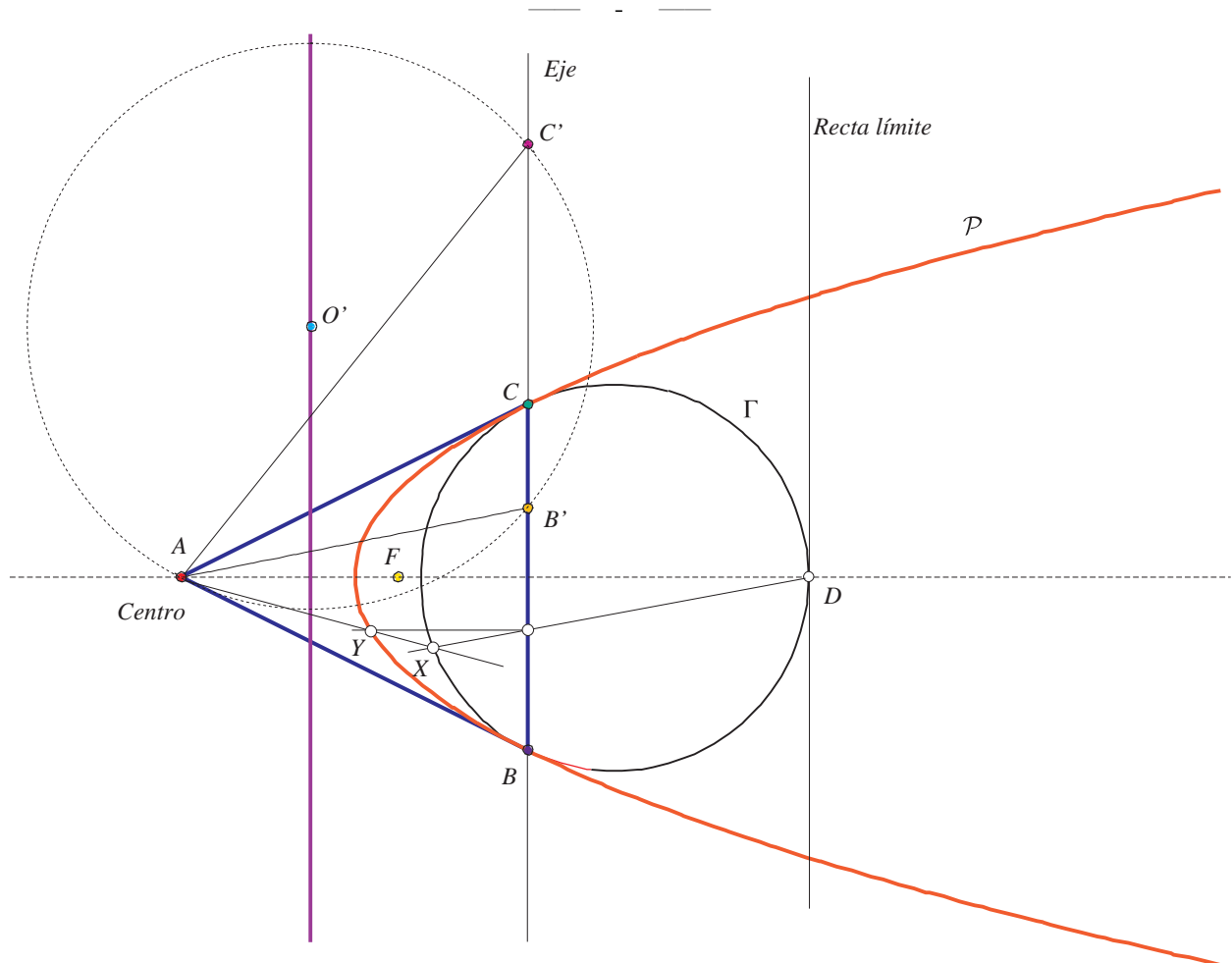
SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **515**.
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por Saturnino Campo Ruiz, profesor del IES Fray Luis de León, de Salamanca; con el siguiente enunciado:

Dado un círculo de centro O y un punto A (exterior) hallar el polo, polar o polar recíproco del lugar geométrico de los centros de los círculos circunscritos a los infinitos triángulos autopolares de vértice A , con respecto a la homóloga de la circunferencia de centro O , en la homología de vértice A , eje polar de A y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de A , no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto A respecto a la homóloga de la circunferencia.

Puig Adam, P.(1986): Geometría Métrica, vol. II, , pág. 316, n° 8. Propuesto en los exámenes de ingreso a la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos, curso 1946-1947.



Vamos a ver en este ejercicio como las coordenadas baricéntricas son una herramienta útil para la resolución analítica de muchos problemas de geometría en el plano. Utilizamos estas coordenadas en plano proyectivo, en vez de tomar otro punto unidad, diferente del baricentro del triángulo de referencia, con el fin de poder utilizar los conceptos de perpendicularidad (obtención del circuncentro). Con el fin de automatizar los cálculos rutinarios utilizaremos rutinas de MATHEMATICA, del "packages" baricentricas.m de Fco. J. García Capitán, disponible en la web <http://garcia capitán.auna.com/baricentricas/>. La gráfica de encima ha sido generada por GraficaBaricentricas, con unas modificaciones para representar varias curvas a la vez, así como puntos con sus etiquetas.

Tomaremos como vértices del triángulo de referencia, para un sistema de coordenadas baricéntricas, el punto A ,

dado, y los puntos B y C de tangencia de las tangentes desde A a la circunferencia Γ dada, que resulta ser isósceles, con $b = c$, así, la polar de A respecto a Γ es el lado BC , $x = 0$.

De todas las cónicas del haz \mathcal{H} bitangente, tangentes en B y C a los lados AB y AC , respectivamente, $yz + \lambda x^2 = 0$, la que es circunferencia se obtiene para $\lambda = -b^2/a^2$. Es decir, la circunferencia Γ tiene por ecuación:

$$\Gamma : a^2yz - b^2x^2 = 0.$$

La homología de centro en A , eje BC y recta límite la paralela a B por el punto D (exterior a \widehat{ABC}) en que el diámetro de Γ que pasa por A la corta, lleva D en el punto del infinito de AD . Por tanto, la homóloga de Γ es la parábola \mathcal{P} del haz \mathcal{H} . Su ecuación se deduce calculando λ para que el punto del infinito $(2 : -1 : -1)$ de la recta AD pertenezca a ella; obteniéndose $\lambda = -1/4$, así:

$$\mathcal{P} : x^2 = 4yz.$$

Sea $B'(0 : t : 1-t)$ un punto arbitrario en BC (polar de A respecto a la todas las cónicas de haz \mathcal{H}), para determinar el tercer vértice C' del triángulo autopolar respecto a \mathcal{P} , con dos de sus vertices en A y B' , obtenemos la polar de B' respecto a \mathcal{P} (que es la misma que la de B' respecto a las cónicas del haz \mathcal{H}). Dicha polar es $(1-t)y + tz = 0$ y su punto de intersección con BC es $C'(0 : t : t-1)$.

Las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos AB' y $B'C'$ (que se cortan el circuncentro de $\widehat{AB'C'}$) se pueden obtener utilizando la noción de perpendicularidad (<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#perp>) en coordenadas baricéntricas, y son, respectivamente:

$$(b^2 + a^2t(t-1))x + (a-b-at)(a+b-at)y + (a^2t^2 - b^2)z = 0, \quad (2t^2 - 2t + 1)x + 2(t-1)^2y + 2t^2z = 0.$$

El circuncentro de $\widehat{AB'C'}$ es

$$O' (2b^2(1-2t) : a^2t^2 - b^2(4t^2 - 2t + 1) : -a^2(t-1)^2 + b^2(4t^2 - 6t + 3)).$$

Eliminando t , obtenemos la ecuación del lugar geométrico que describe O' , al considerar todos los triángulos de vértice A , autopolares respecto al haz de cónicas \mathcal{H} :

$$\ell : (a^2 - 2b^2)x + 2b^2y + 2b^2z = 0.$$

Se trata de una recta paralela a BC (ambas tiene el mismo punto $(0 : 1 : -1)$ con la recta del infinito $x + y + z = 0$).

La polar recíproca ⁽¹⁾ de una curva respecto a una cónica es la envolvente de las polares de los puntos de la curva respecto a la cónica. En el caso que nos ocupa la curva es la recta ℓ y las polares de sus puntos pasan por el polo de ella respecto a la parábola \mathcal{P} , es decir, al punto

$$F (2b^2 - a^2 : b^2 : b^2),$$

se reduce la polar recíproca pedida.

Para comprobar que F es el foco de la parábola podemos demostrar que la involución de rectas conjugadas, que la parábola induce sobre él, es rectangular:

Una recta arbitraria que pasa por $F (2b^2 - a^2 : b^2 : b^2)$ tiene coeficientes $(u : v : w)$, satisfaciendo:

$$(2b^2 - a^2)u + b^2v + b^2w = 0.$$

El polo de esta recta, respecto a la parábola \mathcal{P} , es el punto $(-2u : v : w)$; la recta que lo une con F es

$$(b^2(v-w)x + (a^2v - 2b^2(u+v))y + (2b^2(u+w) - a^2w)z = 0.$$

Esta recta y la $ux + vy + wz = 0$ (con la condición $(2b^2 - a^2)u + b^2v + b^2w = 0$ y $b = c$) son perpendiculares, usando la condición de perpendicularidad de dos rectas $p_ix + q_iy + r_iz = 0$ ($i = 1, 2$):

$$S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) = 0.$$

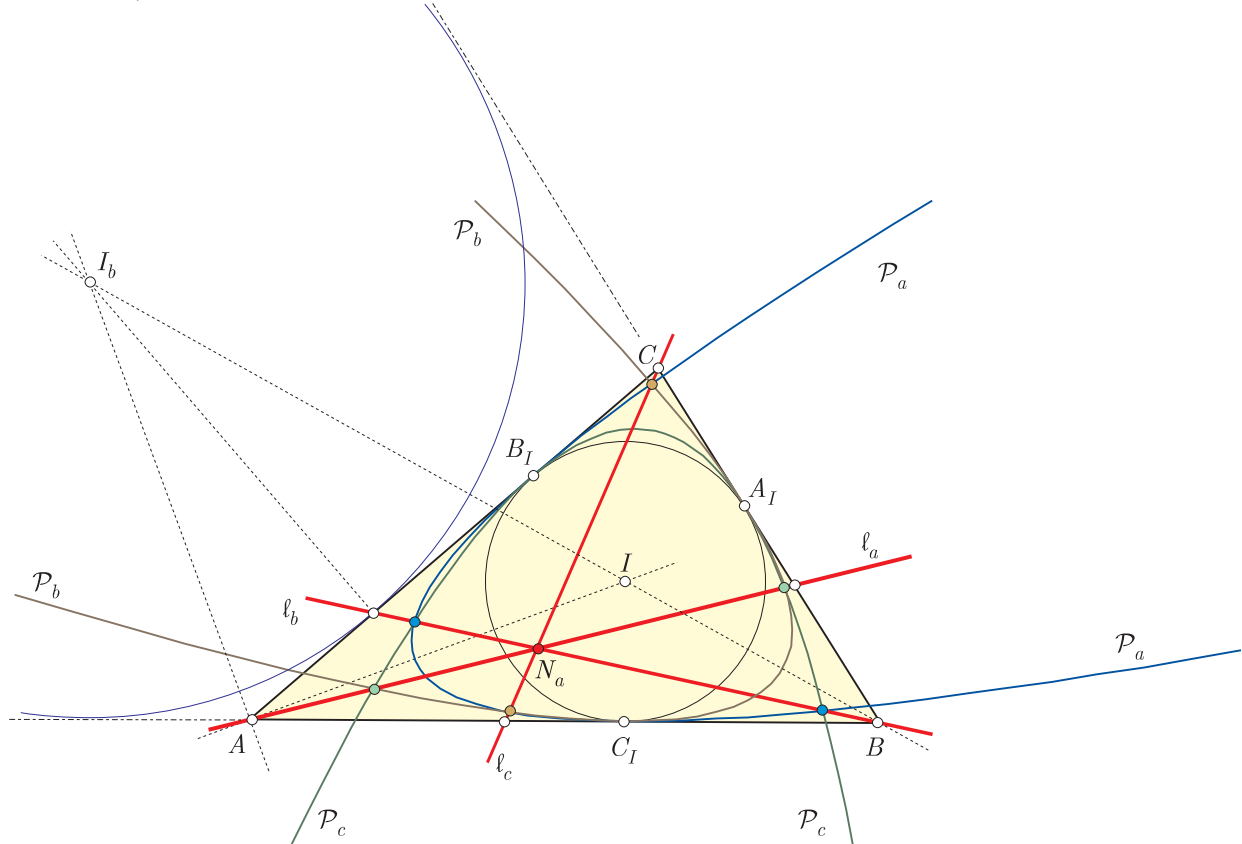
$$(2b^2 - a^2)(v-w)(a^2v + a^2w - 2b^2(u+v) - 2b^2(u+w)) + a^2(w-u)(-a^2w - b^2(v-w) + 2b^2(u+w)) + a^2(u-v)(-a^2v + 2b^2(u+v) + b^2(v-w)) = -(a-2b)(a+2b)(v-w)((2b^2 - a^2)u + b^2v + b^2w) = 0.$$

⁽¹⁾ Un ejemplo de determinación de polares recíprocas de una circunferencia respecto a otra, puede verse en el ejercicio: <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1849.pdf>. Otros ejemplos del uso de polares recíprocas se encuentra en <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejcg1854.pdf>, <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2130.pdf>.

Consideremos el caso en que la circunferencia $\Gamma = I(r)$ sea la inscrita a un triángulo \widehat{ABC} y denotamos por \mathcal{P}_a la parábola homológica de $I(r)$ en la homología de centro A , eje la polar de A respecto a $I(r)$ (lado $B_I C_I$ del triángulo de contacto interior) y recta límite de la primera figura la tangente a $I(r)$ paralela a la polar de A , no comprendida entre este punto y su polar.

Similarmente, se determinan las parábolas \mathcal{P}_b y \mathcal{P}_c . Se tiene entonces que:

Las rectas que pasan por los pares de puntos de intersección (distintos de los vértices del triángulo de contacto interior) de cada dos de estas parábolas, se cortan en el punto de Nagel.



Para establecer este hecho, vamos a determinar la ecuación de la parábola \mathcal{P}_a a partir de la de ecuación $x^2 = 4yz$ de la parábola \mathcal{P} .

Las ecuaciones que dan las coordenadas baricéntricas $(x' : y' : z')$ respecto al triángulo $\widehat{AB_I C_I}$ en función de las coordenadas $(x : y : z)$ baricéntricas respecto a \widehat{ABC} , son:

$$x' = x - \frac{a-b+c}{b+c-a}y - \frac{a+b-c}{b+c-a}z, \quad y' = \frac{2b}{b+c-a}z, \quad z' = \frac{2c}{b+c-a}y.$$

Sustituyendo en la ecuación matricial de \mathcal{P} ,

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0,$$

se obtiene la matriz asociada a la parábola \mathcal{P}_a :

$$\mathcal{P}_a : \begin{pmatrix} (b+c-a)^2 & (a-b)^2 - c^2 & (c-a)^2 - b^2 \\ (a-b)^2 - c^2 & (c+a-b)^2 & a^2 - (b+c)^2 - 4bc \\ (c-a)^2 - b^2 & a^2 - (b+c)^2 - 4bc & (a+b-c)^2 \end{pmatrix}.$$

Procediendo cíclicamente, se obtienen las matrices asociadas a las parábolas \mathcal{P}_b y \mathcal{P}_c , que son, respectivamente:

$$\mathcal{P}_b : \begin{pmatrix} (b+c-a)^2 & (a-b)^2 - c^2 & b^2 - (c+a)^2 - 4ca \\ (a-b)^2 - c^2 & (c+a-b)^2 & (b-c)^2 - a^2 \\ b^2 - (c+a)^2 - 4ca & (b-c)^2 - a^2 & (a+b-c)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_c : \begin{pmatrix} (b+c-a)^2 & c^2 - (a+b)^2 - 4ab & (a-c)^2 - b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 - 4ab & (c+a-b)^2 & (b-c)^2 - a^2 \\ (a-c)^2 - b^2 & (b-c)^2 - a^2 & (a+b-c)^2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar los puntos base del haz de cónicas formado por el par de parábolas \mathcal{P}_b y \mathcal{P}_c , vamos a hallar las cónicas degeneradas de haz, que, en este caso, sólo hay dos cónicas degeneradas: una formada por la tangente común BC a las parábolas y por la recta ℓ_a que pasa por los otros dos puntos distintos; y otra cónica formada por las rectas que unen el punto de tangencia A_I con los otros dos puntos de intersección.

Las cónicas degeneradas del haz $\mu\mathcal{P}_b + \nu\mathcal{P}_c$ son las que se obtienen para los valores de μ y ν , para los cuales el determinante de la matriz asociada a la ecuación del haz, se anula.

El valor de tal determinante es:

$$-\frac{64a^2(c(a+b-c)\mu + b(a-b+c)\nu)^2((a+b-c)^2\mu + (a-b+c)^2\nu)}{(a+b-c)^4(a-b+c)^4}.$$

Y los pares de valores de μ y ν que lo anulan son:

$$(b(a-b+c), -c(a+b-c)), \quad ((a-b+c)^2, -(a+b-c)^2).$$

De estos pares de valores, el segundo es el que da lugar a la cónica degenerada $x((a+b-c)y - (a-b+c)z) = 0$, producto del lado BC y la recta $\ell_a : (a+b-c)y - (a-b+c)z = 0$. Esta recta es la ceviana por A del punto de Nagel, X_8 en ETC:

$$N_a(b+c-a : c+a-b : a+b-c).$$

Estudio similar nos lleva a encontrar las otras dos rectas ℓ_b y ℓ_c , para los pares de parábolas \mathcal{P}_c y \mathcal{P}_a , \mathcal{P}_a y \mathcal{P}_b , que son las otras dos cevianas de N_a .