

Dadas tres circunferencias Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 de un haz con puntos base A y B , entonces la razón simple de los puntos en que las circunferencias cortan a una recta arbitraria, que pasa por uno de los puntos base, es constante.

SOLUCIÓN:

Este ejercicio expone una solución del Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **519**.

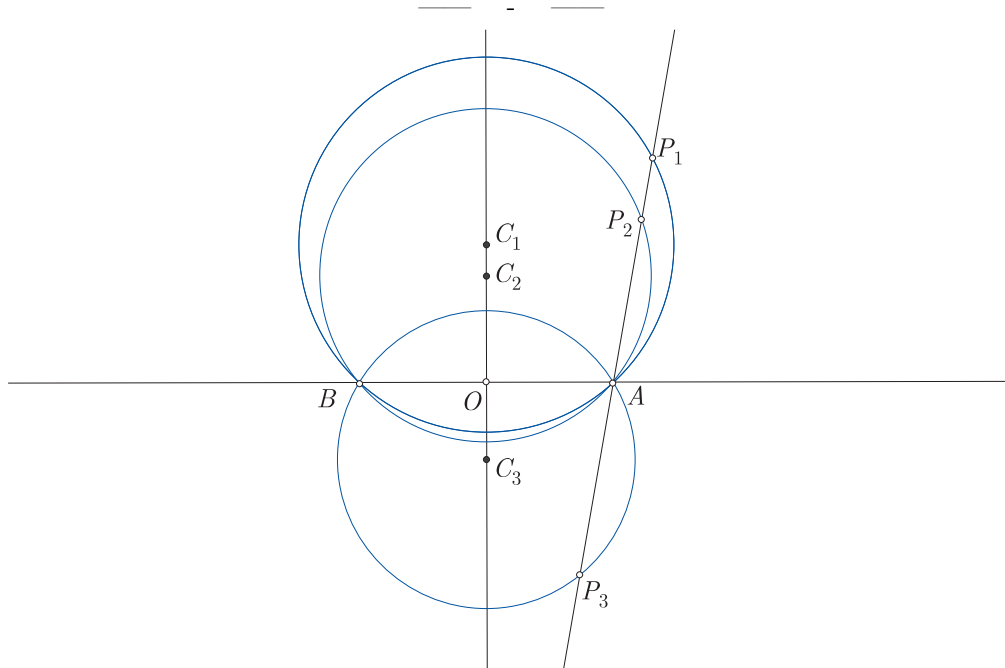
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein", 64100 Teramo, Italia; con el siguiente enunciado:

Una circunferencia que pasa por el vértice A de un triángulo ABC , interseca el lado AB en P , y el lado AC en Q .

Tomamos dos puntos, M sobre PB y N sobre QC tales que $PM : MB = QN : NC$.

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos APQ , AMN , ABC concurren en un punto X (con X distinto de A).



Tomemos un sistema coordenado rectangular con origen en el punto medio del segmento AB y eje de abscisas conteniendo a este segmento. Si $A(a, 0)$, una circunferencia Γ_t del haz tendrá centro $C(0, t)$, en el eje de ordenadas, y radio CA , por lo que su ecuación es:

$$x^2 + (y - t)^2 = a^2 + t^2, \quad x^2 + y^2 - 2atx - a^2 = 0.$$

Una recta que pase por A tiene por ecuación $\ell_m : y = m(x - a)$. Para determinar la intersección de Γ_t y ℓ_m , debemos resolver:

$$(x - a)(x + m^2x + a - am^2 - 2mt) = 0.$$

Por lo que, además del A , se cortan en el punto de abscisa:

$$x = \frac{2mt - a + am^2}{m^2 + 1}.$$

Si tomamos tres circunferencias del haz Γ_1, Γ_2 y Γ_3 correspondientes a los valores de t, t_1, t_2 y t_3 , los puntos de corte con la recta ℓ_m , P_1, P_2, P_3 , tienen por abscisas:

$$x_1 = \frac{2mt_1 - a + am^2}{m^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2mt_2 - a + am^2}{m^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{2mt_3 - a + am^2}{m^2 + 1}.$$

Por tanto la razón simple $(P_1 P_2, P_3)$ es:

$$(P_1 P_2, P_3) = \frac{P_1 P_2}{P_1 P_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Este valor no depende de la recta ℓ_m tomada; sólo de las tres circunferencias del haz.

<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2385.pdf>