Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar el punto en el lado BC de forma que la recta que une los pies de las perpendiculares a los otros lados de desde él sea paralela a BC.

SOLUCIÓN:

Este ejercicio expone una solución del Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\textbf{527}}$.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

> *Encontrar un punto en la base de un triángulo dado de forma que desde él se trazan perpendiculares a los lados, la línea que una sus extremos sea paralela a la base. Resolver (1) trigonométricamente, (2) geométricamente.*
>
> *Carroll, L. (2005): Problemas de almohada. Nívola. [Pillow Problems].*

—— - ——

Sea un punto $P(0:v:w)$, dado por sus coordenadas baricéntricas homogéneas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$, situado en el lado BC. Los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados AC y AB son, respectivamente:

$$B_P\left(S_Cv:0:S_Cw+S_A(v+w)\right), \qquad C_P\left(S_Bw:S_Bv+S_A(v+w):0\right).$$

La condición para que estos puntos estén alineados con el punto del infinito $(0:1:-1)$ de la recta BC es que:

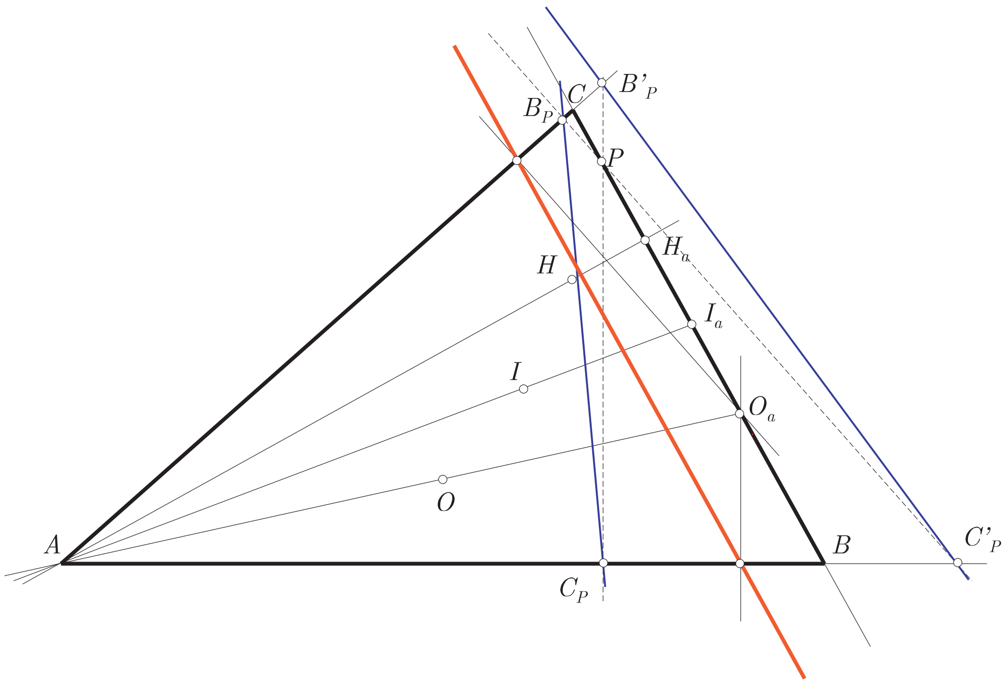
$$-(v+w)(S_AS_Cv+S_BS_Cv-S_AS_Bw-S_BS_Cw)=0.$$

Luego el punto pedido es:

$$O_a\left(0:b^2S_B:c^2S_C\right),$$

pie de la ceviana del circuncentro. Y la recta que es paralela a BC cuando $P=O_a$ es:

$$\ell_O:\ -(S_AS_B+c^2S_C)(b^2S_B+S_AS_C)x+S_BS_C(S_AS_B+c^2S_C)y+S_BS_C(b^2S_B+S_AS_C)z=0.$$



COMPLEMENTO:

Exponemos unas situaciones similares a este ejercicio, relativas a otras paralelas.

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar el punto en el lado BC de forma que la recta $B'_PC'_P$ sea paralela a BC, siendo B'_P y C'_P los puntos de intersección con los lados AC y AB con las perpendiculares desde él a los lados AB y AC, respectivamente (B'_P y C'_P distintos de los pies de tales perpendiculares).

La perpendicular por $P(0:v:w)$ al lado AC es:

$$(S_C w + S_A(v+w))x + S_C wy - S_C vz = 0,$$

que corta a AB en $P'_C\,(-S_C w : S_C w + S_A(v+w) : 0)$.

La perpendicular por $P(0:v:w)$ al lado AB es:

$$(-S_B v - S_A(v+w))x + S_B wy - S_B vz = 0,$$

que corta a AC en $P'_B\,(-S_B v : 0 : S_B v + S_A(v+w))$.

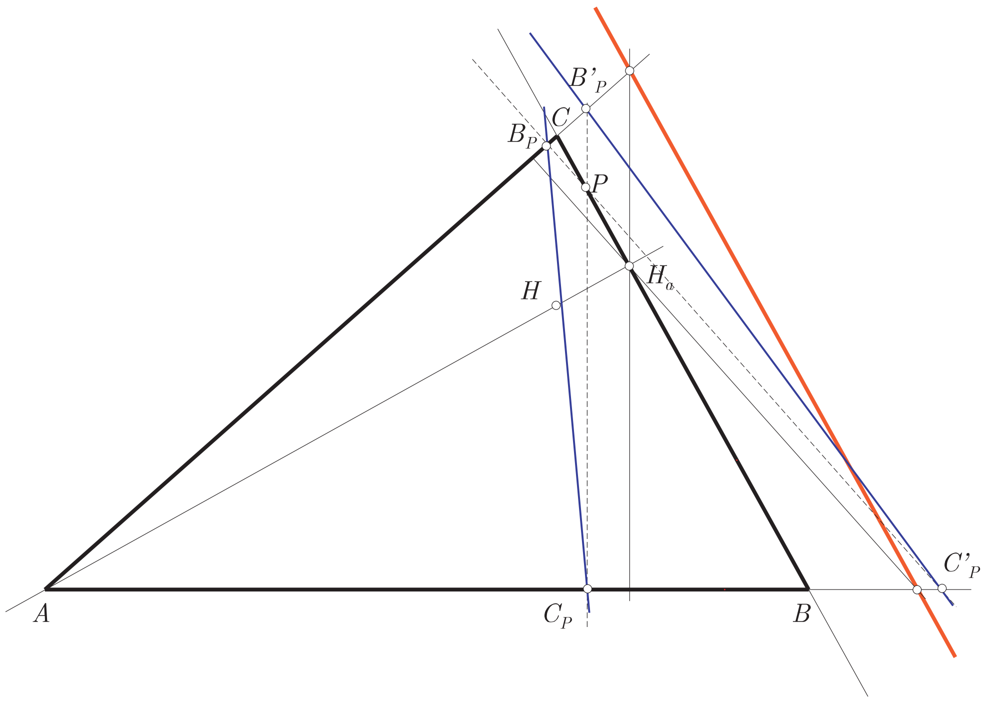
La condición para que los puntos $P'_B P'_C$ estén alineados con el punto del infinito $(0:1:-1)$ de la recta BC es que:

$$S_A(v+w)(S_B v - S_C w) = 0.$$

Luego el punto pedido es:

$$H_a(0 : S_C : S_B),$$

pie de la ceviana del ortocentro.



Con las notaciones anteriores:

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar puntos en el lado BC de forma que las rectas $B_P C_P$ y $B'_P C'_P$ sean paralelas.

Las rectas $P_B P_C$ y $P'_B P'_C$ son, respectivamente:

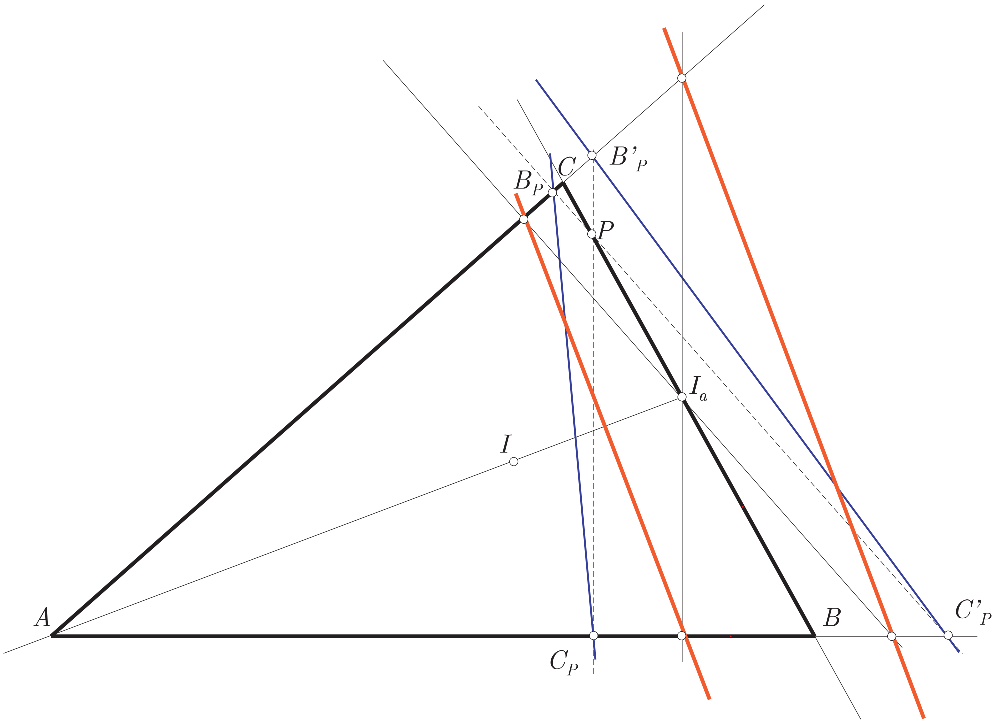
$$-(S_B v + S_A(v+w))(S_C w + S_A(v+w))x + S_B w(S_C w + S_A(v+w))y + S_C v(S_B v + S_A(v+w))z = 0,$$

$$-(S_B v + S_A(v+w))(S_C w + S_A(v+w))x - S_C w(S_B v + S_A(v+w))y - S_B v(S_C w + S_A(v+w))z = 0.$$

Estas rectas concurren en la recta del infinito $x+y+z=0$ si

$$S_A(S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C)(v+w)^2(-S_A v^2 - S_B v^2 + S_A w^2 + S_C w^2) = 0.$$

El último factor se descompone en $(cv - bw)(cv + bw) = 0$; luego, los puntos buscados son los de intersección del lado BC con las dos bisectrices (interior y exterior) en el vértice A.



Ahora vamos a considerar las parábolas envolventes de las rectas B_PC_P y $B'_PC'_P$ cuando P varía en la recta BC y tratar de encontrar los puntos de tangencia con las rectas paralelas obtenidas anteriormente.

La envolvente de las rectas B_PC_P es la cónica cuya matriz asociada a su ecuación tangencial (parábola: contiene a la recta del infinito) es:

$$\begin{pmatrix} 2S_BS_C & S_AS_C & S_AS_B \\ S_AS_C & 0 & -S_Aa^2 - S_BS_C \\ S_AS_B & -S_Aa^2 - S_BS_C & 0 \end{pmatrix}$$

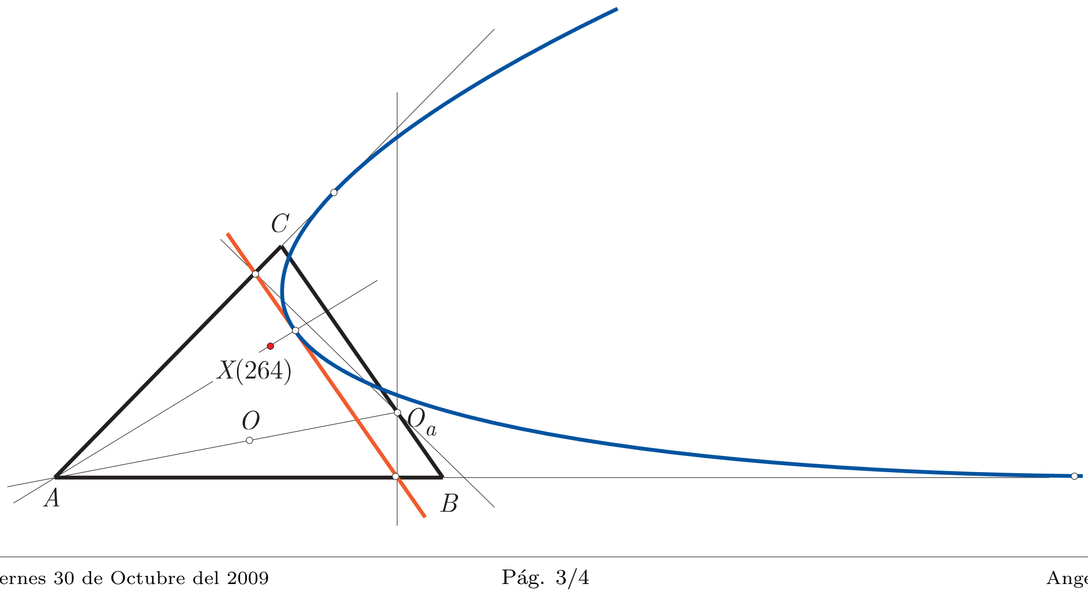
Multiplicando esta matriz por la matriz columna formada por los coeficientes de la recta ℓ_O, nos da el punto de tangencia con dicha cónica, con coordenadas de la forma:

$$(* * * : c^2S_C : b^2S_B)$$

Si procedemos similarmente y cíclicamente, partiendo de puntos Q y R en los lados CA y AB se obtienen puntos de tangencia en las parábolas correspondientes, cuyas rectas que los unen con los vértices correspondientes B y C, dan rectas que concurren ene el punto (X_{264} en ETC):

$$\left(\frac{1}{a^2S_A} : \frac{1}{b^2S_B} : \frac{1}{c^2S_C} \right).$$

conjugado isotómico del circuncentro.



La envolvente de las rectas $B'_P C'_P$ es la cónica cuya matriz asociada a su ecuación tangencial (parábola: contiene a la recta del infinito) es:

$$\begin{pmatrix} -2S_BS_C & b^2S_B & c^2S_C \\ b^2S_B & 0 & -S_Aa^2-S_BS_C \\ c^2S_C & -S_Aa^2-S_BS_C & 0 \end{pmatrix}$$

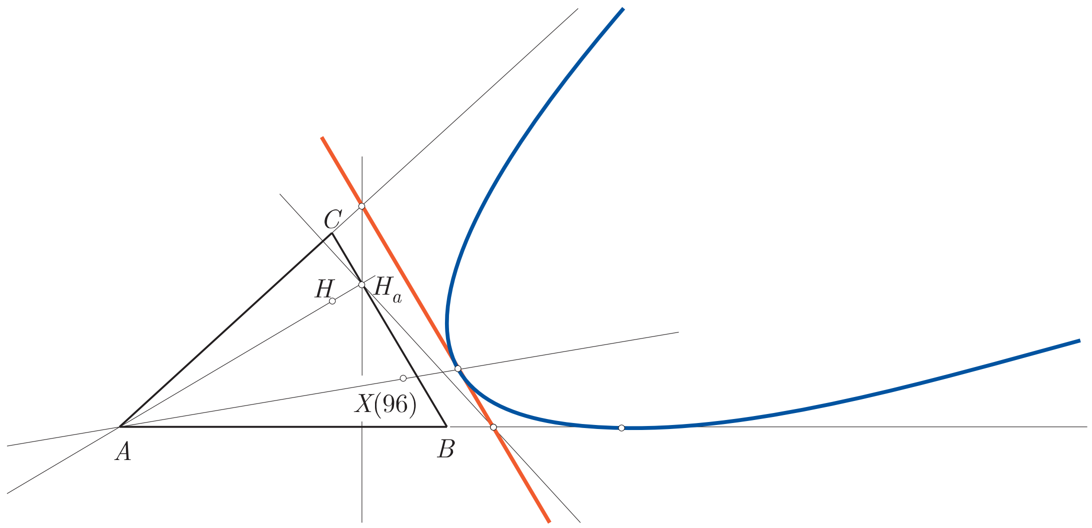
Multiplicando esta matriz por la matriz columna formada por los coeficientes de la recta ℓ_O, nos da el punto de tangencia con dicha cónica, con coordenadas de la forma:

$$(***: S_B : S_C).$$

Si procedemos similarmente y cíclicamente, partiendo de puntos Q y R en los lados CA y AB se obtienen puntos de tangencia en las parábolas correspondientes, cuyas rectas que los unen con los vértices correspondientes B y C, dan rectas que concurren ene el punto (X_{96} en ETC):

$$(S_A : S_B : S_C)\,.$$

conjugado isotómico del ortocentro.



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2395.pdf