Dados $\widehat{ABC}$ un triángulo y $\widehat{MNP}$ un triángulo inscrito en $\widehat{ABC}$, con M en BC, N en CA y P en AB, construir un tercer triángulo $\widehat{A'B'C'}$ inscrito en $\widehat{MNP}$, con A' en NP, B' en PM, C' en MN, $A'B'$ paralelo a AB, $B'C'$ paralelo a BC, y $C'A'$ paralelo a CA ($\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ homotéticos).

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **549**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

Sea ABC un triángulo dado Sea MNP un triángulo inscrito en ABC, con M en BC, N en CA y P en AB.

Construir un tercer triángulo A'B'C' inscrito en MNP tal que los lados homólogos sean paralelos, es decir, A' en NP, B' en PM, C' en MN, A'B' paralelo a AB, B'C' paralelo a BC, y C'A' paralelo a CA.

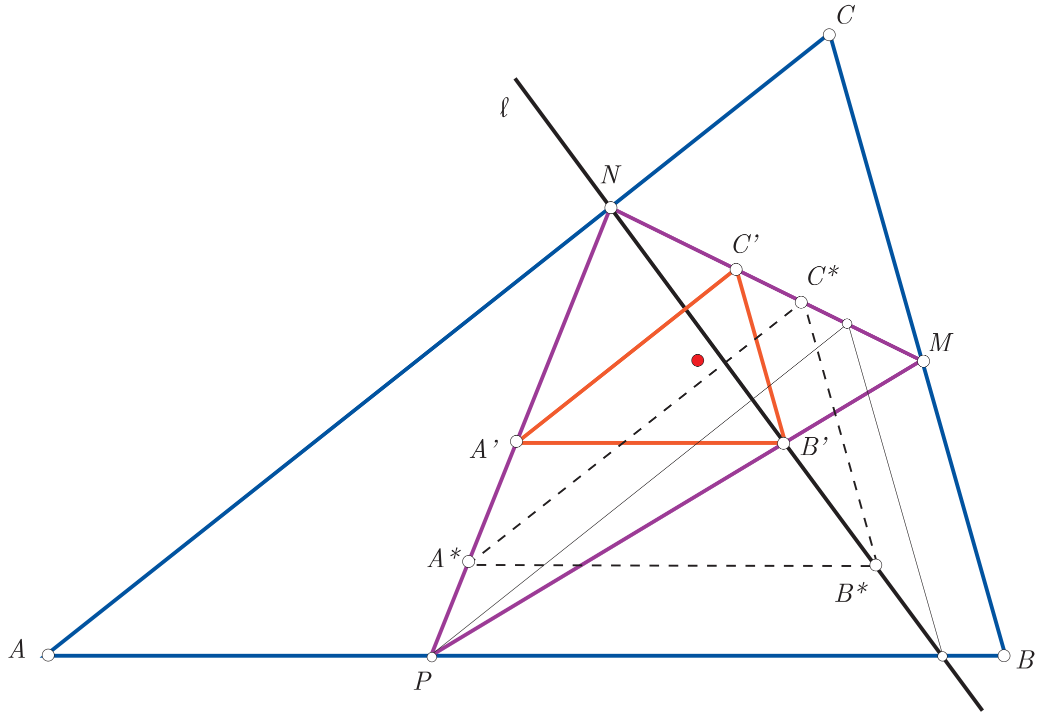
Sortais, Yvonne et René (1993): Géométrie de l'espace et du plan : synthese de cours, exercices résolus (p. 103)

Este problema también se encuentra en:

Campo, S. (2005) Métodos sintéticos de la geometría. Edición de autor. Salamanca.cap. III, 4.4.,pag. 128

—— - ——

Tomemos un triángulo $\widehat{A^*B^*C^*}$ variable con lados A^*B^*, B^*C^*, C^*A^* respectivamente paralelos a AB, BC, CA y tal que A^* está en NP y C^* en MN; cuando A^* varía en el lado NP, B^* recorre una recta ℓ, que pasa por N.



Tomamos como vértice B', del triángulo a construir, el punto de intersección de ℓ con el lado PM; los otros vértices, C' y A', son obtenidos sin más que trazar paralelas por B' a AB y a BC.

NOTAS COMPLEMENTARIAS, relativas al centro de homotecia de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$

Vamos a obtener las coordenadas baricéntricas (respecto a $\widehat{ABC}$) del centro de la homotecia que transforma el triángulo $\widehat{ABC}$ en el construido, $\widehat{A'B'C'}$; lo que utilizaremos para estudiar casos particulares dependiendo del triángulo inscrito $\widehat{PMN}$.

Sean $M(0 : m_2 : m_3), N(n_1 : 0 : n_3)$ y $P(p_1 : p_2 : 0)$, vamos a determinar otro punto de la recta ℓ (distinto de N). Podemos considerar el caso particular en que A^* coincida con P; la recta paralela por P a AC interseca a MN en el punto:

$$(-n_1(m_2p_1 - m_3p_2) : -m_2p_2(n_1 + n_3) : -m_2n_3p_1 - m_3n_1p_2).$$

La paralela por este punto a BC corta a AB en:

$$(n_1(m_2p_1 - m_3p_2) : m_2n_3p_1 + m_2n_1p_2 + m_3n_1p_2 + m_2n_3p_2 : 0).$$

La recta ℓ, que pasa por este punto y por N, corta a PM en:

$$B'\left(n_1p_1(m_2 + m_3) : m_2n_3p_1 + m_2n_1p_2 + m_3n_1p_2 + m_2n_3p_2 : m_3n_3(p_1 + p_2)\right).$$

Procediendo cíclicamente, es decir, considerando triángulos $\widehat{A^*B^*C^*}$ homotéticos a $\widehat{ABC}$, tomando primero, B^* en PM y C^* en MN y, luego, C^* en MN y A^* en NP, se obtiene:

$$C'\left(n_1p_1(m_2 + m_3) : p_2m_2(n_3 + n_1) : ***\right), \qquad A'\left(*** : p_2m_2(n_3 + n_1) : m_3n_3(p_1 + p_2)\right).$$

Por lo que el centro de homotecia es el punto:

$$\left(n_1p_1(m_2 + m_3) : p_2m_2(n_3 + n_1) : m_3n_3(p_1 + p_2)\right).$$

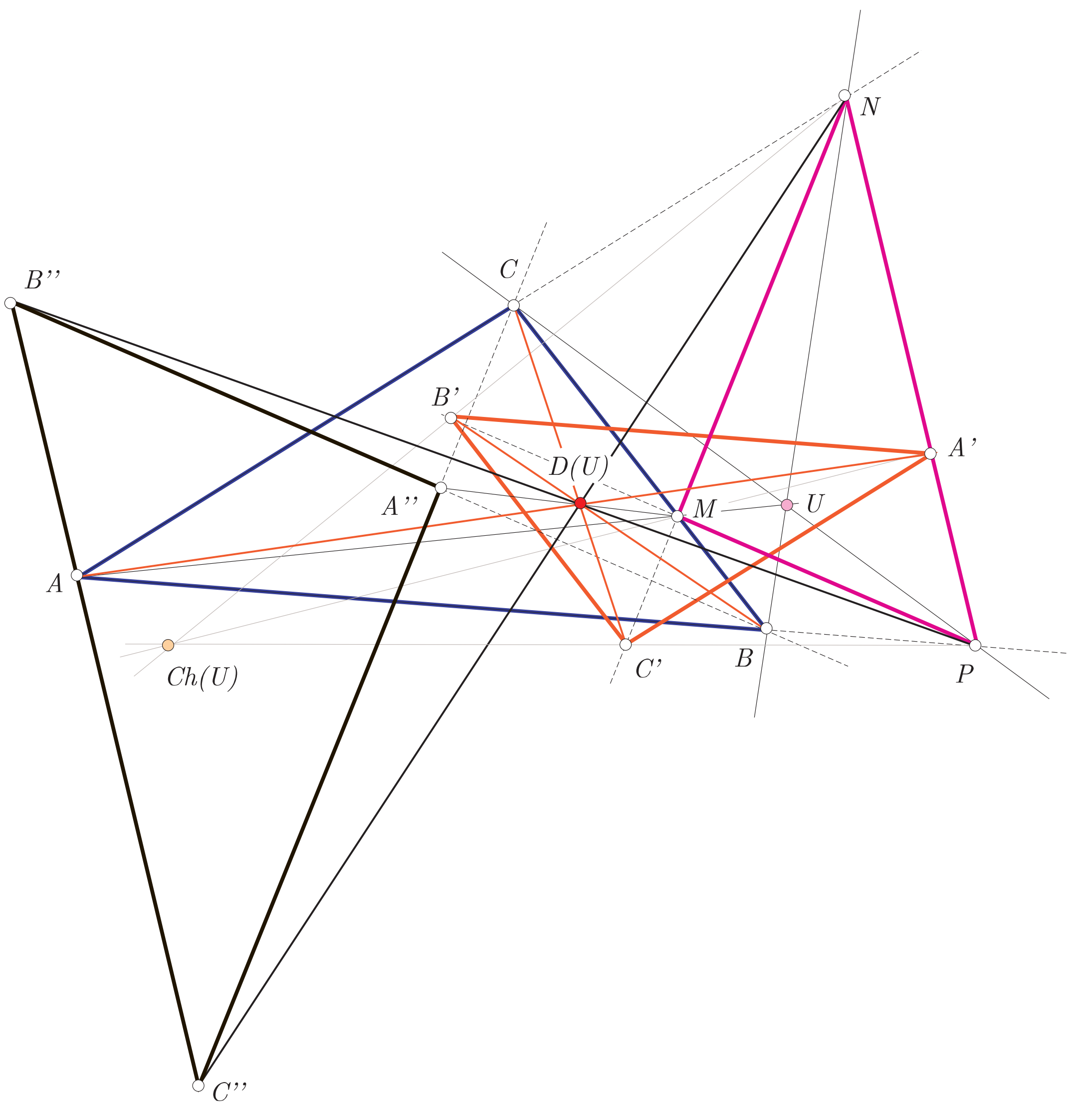
La razón de la homotecia que transforma $\widehat{ABC}$ en $\widehat{A'B'C'}$ es:

$$k = \frac{m_2n_3p_1 + m_3n_1p_2}{(m_2 + m_3)(n_1 + n_3)(p_1 + p_2)}.$$

Casos particulares

★ Caso en que $\widehat{PMN}$ es el triángulo ceviano de un punto $U(u : v : w)$:

$$M(0 : v : w), \qquad N(u : 0 : w), \qquad P(u : v : 0).$$



El centro de homotecia de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ es:

$$D(U) = \left(u^2(v+w) : v^2(w+u) : w^2(u+v)\right).$$

Se trata del punto producto baricéntrico del cuadrado baricéntrico de U por su complemento, también conocido como punto Danneels $D(U)$ de U (Hyacinthos. Message #11037 Fri Jan 28, 2005 9:46 pm.: *"Las rectas paralelas por A, B y C a los lados NP, PM y MN del triángulo ceviano de U forman un triángulo $\widehat{A''B''C''}$ homotético a $\widehat{PMN}$ con centro de homotecia en $D(U)$"*).

Algunos pares $U - D(U)$ y su primera coordenada baricéntrica son:

U		$D(U)$	
X_1	a	X_{42}	$a^2(b+c)$
X_2 X_{99}	1 $\dfrac{1}{b^2-c^2}$	X_2	1
X_3	a^2S_A	X_{418}	$a^4S_A^2(b^2S_B+c^2S_C)$
X_4 X_{1113} X_{1114}	S_BS_C (recta de Euler) $\cap$ circunscírculo $''$	X_{25}	$a^2S_BS_C$
X_5	$S^2+S_BS_C$	X_{3078}	$(S^2+S_BS_C)^2(2S^2+a^2S_A)$
X_6	a^2	X_{3051}	$a^4(b^2+c^2)$
X_7	$\dfrac{1}{b+c-a}$	X_{57}	$\dfrac{a}{b+c-a}$
X_8	$b+c-a$	X_{200}	$a(b+c-a)^2$
X_9	$a(s-a)$		$a^2(s-a)\left(\dfrac{b}{s-c}+\dfrac{c}{s-b}\right)$
X_{10}	$b+c$		$(b+c)^2(2a+b+c)$
X_{69}	S_A	X_{394}	$a^2S_A^2$
X_{75}	bc	X_{321}	$bc(b+c)$
X_{100}	$a(a-b)(a-c)$	X_{55}	$a^2(b+c-a)$
X_{110}	$a^2(a-b)(a+b)(a-c)(a+c)$	X_{184}	a^4S_A
X_{264}	$\dfrac{1}{a^2S_A}$	X_{324}	$\dfrac{b^2S_B+c^2S_C}{a^2S_A^2}$
X_{366}	$\sqrt{a}$	X_{367}	$a(\sqrt{b}+\sqrt{c})$
X_{651}	$a(a-b)(a-c)(a+b-c)(a-b+c)$	X_{222}	$\dfrac{a^2S_A}{b+c-a}$
X_{653}	$\dfrac{1}{(b-c)(b+c-a)S_A}$	X_{196}	$\dfrac{(a-c)(a-b+c)S_B-(a-b)(a+b-c)S_C}{(b-c)(b+c-a)S_A}$
X_{1370}	$c^2S_AS_B+b^2S_AS_C-a^2S_BS_C$	X_{455}	$a^2S_BS_C(c^2S_AS_B+b^2S_AS_C-a^2S_BS_C)^2$

Por otra parte, se tiene que el triángulos $\widehat{MNP}$, ceviano de U, y el triángulo $\widehat{A'B'C'}$, homotético a $\widehat{ABC}$, son perspectivos con centro de perspectividad:

$$Ch(U) = \left(u^2(v+w)(u(v+w)+2vw) : v^2(w+u)(v(w+u)+2wu) : w^2(u+v)(w(u+v)+2uv)\right).$$

Algunos de los pares $U - Ch(U)$ son:

$$Ch(X_1) = X_{2667}; \qquad Ch(X_2) = X_2; \qquad Ch(X_4) = X_{1843}\left(\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2+c^2-a^2} : \cdots : \cdots\right),$$

$$Ch(X_7) = X_{65}\left(\frac{a(b+c)}{b+c-a} : \cdots : \cdots\right); \qquad Ch(X_8) = X_{3059}.$$

ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS DESCRITOS POR PUNTOS DANNEELS

• Si U está en una recta pasando por el baricentro, su punto Danneels, $D(U)$, está en la misma recta. En efecto, el centro de homotecia correspondiente a un punto de la forma $(p+t : q+t : r+t)$ es:

$$\big((p+t)^2(q+r+2t) : (q+t)^2(p+r+2t) : (r+t)^2(p+q+2t)\big),$$

que está en la recta por $(1:1:1)$ y $(p:q:r)$.

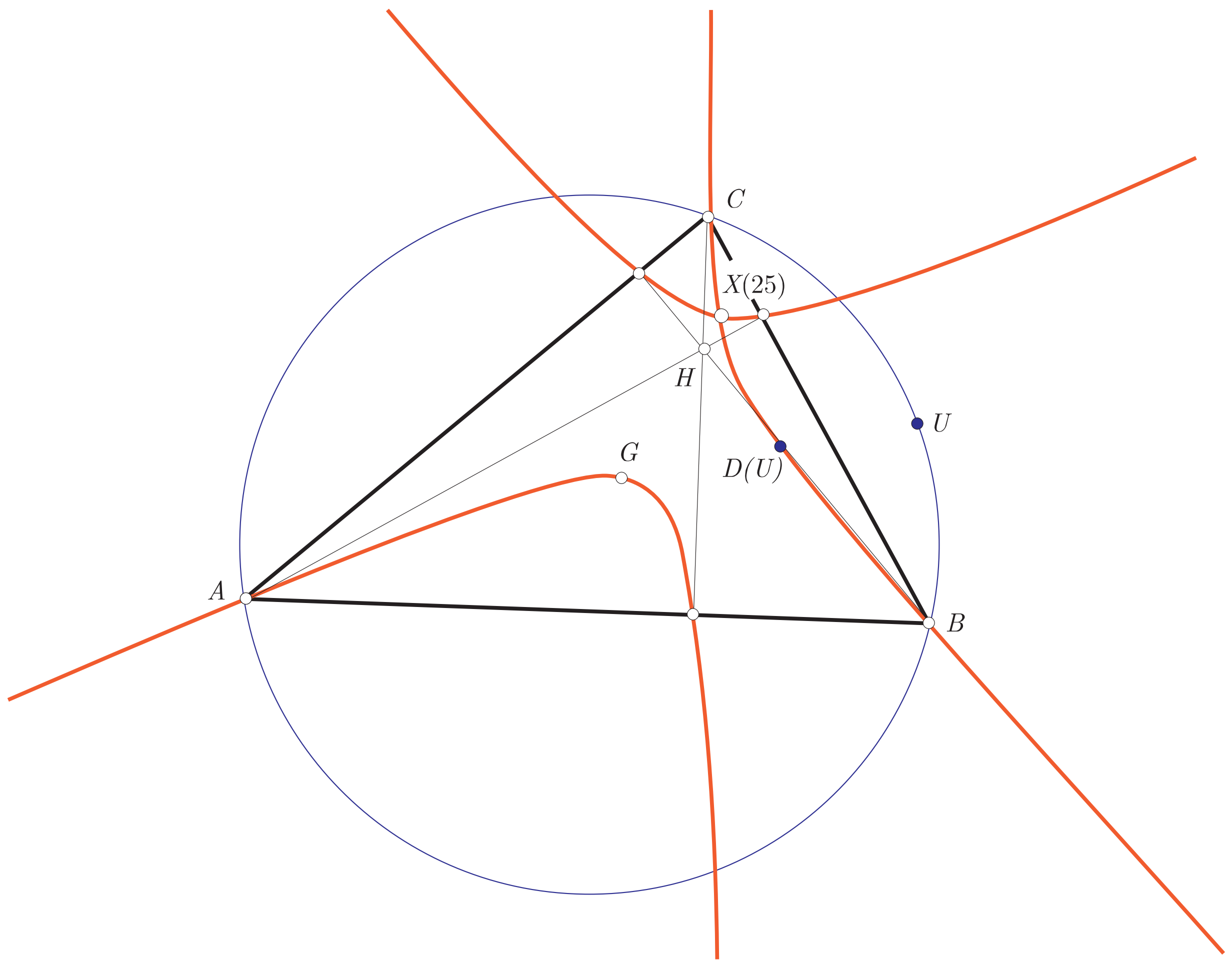
• El punto Danneels $D(U)$, cuando U recorre la elipse circunscrita de Steiner, $yz+zx+xy=0$, es siempre el baricentro G. En efecto, un punto genérico de tal elipse se puede poner de la forma $U(1/t : -1 : 1/(1-t))$ (conjugado isotómico del punto del infinito $(t : -1 : 1-t)$), y el correspondiente centro de homotecia es $((1-t)t : (1-t)t : (1-t)t)$).

• Cuando U está en la recta del infinito, $D(U)$ describe la cúbica con asíntotas los lados de $\widehat{ABC}$ y con el baricentro como punto doble aislado:

$$x^3+y^3+z^3+3yx^2+3zx^2+3y^2x+3z^2x+3yz^2+3y^2z-21xyz=0. \qquad (1)$$

• Si U está en la circunferencia circunscrita, $D(U)$ está en la cúbica pseudo-pivotal $ps\mathcal{K}(X_{1974}, X_4, X_2)$ [(1)], X_{1974}–isoconjugada de la **K429** en CTC — Catalogue Triangle Cubic, Bernard Gibert —:

$$\underset{ciclica}{\mathfrak{S}}\left(S_A x^2(c^4y-b^4z)\right) - (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)xyz = 0.$$



(1) Bernard Gibert.- Pseudo–Pivotal ubics and Poristic Triangles. (http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/files/psks.html)

Esta ecuación resulta de eliminar t entre las coordenadas de $D(U)$, con $U(a^2(t-1) : b^2t(1-t) : -c^2t)$ en la circunferencia circunscrita:

$$D(U) = \left(a^4(-c^2 - b^2(t-1))(t-1) : b^4t(t-1)(a^2(t-1) - c^2t) : c^4t(a^2 - b^2t)\right).$$

Dicha cúbica contiene al baricentro X_2(punto Danneels del X_{99}, de intersección de la circunferencia circunscrita con la elipse circunscrita de Steiner), pasa por los pies de las alturas[(2)], tiene un punto doble (cúbica unicursal) en $X_{25} = (a^2S_BS_C : b^2S_CS_A : c^2S_AS_B)$ (punto Danneels de los puntos X_{1113} y X_{1114}, de intersección de la recta de Euler con la circunferencia circunscrita) y las tangentes en los vértices,

$$c^4y - b^4z = 0, \qquad a^4z - c^4x = 0, \qquad b^4x - a^4z = 0,$$

concurren en el punto X_{32}, $(a^4 : b^4 : c^4)$.

Además la conjugada isogonal de $ps\mathcal{K}(X_{1974}, X_4, X_2)$ es la cúbica **K257**, es decir, la pseudo-pivotal $ps\mathcal{K}(X_{69}, X_{76}, X_6)$.

• Más en general, si U se mueve en una <u>cónica circunscrita</u>, $pyz + qzx + rxy = 0$, de perspector $Q(p : q : r)$, $D(U)$ está en la <u>cúbica pseudo-pivotal</u>:

$$ps\mathcal{K}\left(\left(\frac{p^2}{q+r-p} : \frac{q^2}{r+p-q} : \frac{r^2}{p+q-r}\right), \left(\frac{1}{q+r-p} : \frac{1}{r+p-q} : \frac{1}{p+q-r}\right), X_2\right),$$

de ecuación:

$$\underset{ciclica}{\mathfrak{S}} \left((q+r-p)x^2(r^2y - q^2z)\right) - 2(p-q)(q-r)(r-p)xyz = 0.$$

Su punto nodal es:

$$\left(\frac{p}{q+r-p} : \frac{q}{r+p-q} : \frac{r}{p+q-r}\right).$$

• Cuando U recorre una <u>recta que pasa por el vértice</u> A, el punto Danneels $D(U)$ recorre una <u>cónica</u>, $\mathcal{C}_a$, que pasa por A y G y es tangente al lado BC, en el punto que dicha recta lo corta.

Si U se hace variar sobre las cevianas de un punto $Q(p : q : r)$, $D(U)$ describe tres cónicas, del tipo de las citadas, $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, que además concurren en el punto $D(Q)$. Con estos datos tales cónicas están determinadas y sus ecuaciones también pueden obtenerse como el lugar geométrico descrito (para el caso de $\mathcal{C}_a$) por el punto Danneels de $U(p+t : q : r)$:

$$D(U) \equiv \left((q+r)(p+t)^2 : q^2(p+q+t) : r^2(p+r+t)\right)$$

Y resulta, eliminando t,

$$\mathcal{C}_a : \; r^2(q+r)y^2 + q^2(q+r)z^2 - 2qr(q+r)yz - q^2(q-r)zx + r^2(q-r)xy = 0.$$

Similarmente,

$$\mathcal{C}_b : \; r^2(r+p)x^2 + p^2(r+p)z^2 + p^2(r-p)yz - 2rp(r+p)zx - r^2(r-p)xy = 0,$$

$$\mathcal{C}_c : \; q^2(p+q)x^2 + p^2(p+q)y^2 - p^2(p-q)yz + q^2(p-q)zx - 2pq(p+q)xy = 0.$$

Estas tres cónicas tienen tangentes en los vértices de $\widehat{ABC}$, respectivamente,

$$-r^2y + q^2z = 0, \qquad r^2x - p^2z = 0, \qquad -q^2x + p^2y = 0.$$

---

(2) Los pies de las alturas H_a, H_b, H_c, son puntos de Danneels de $D_a(a^2 : c^2-b^2 : b^2-c^2)$, $D_b(c^2-a^2 : b^2 : a^2-c^2)$, $D_c(b^2-a^2 : a^2-b^2 : c^2)$, respectivamente.

El triángulo tangencial $\widehat{O_aO_bO_c}$ de $\widehat{D_aD_bD_c}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el circuncentro. Las coordenadas de los vértices de $\widehat{O_aO_bO_c}$ son:

$$O_a(b^2c^2 - a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C), \quad O_b(a^2S_A : c^2a^2 - b^2S_B : c^2S_C), \quad O_c(a^2S_A : b^2S_B : a^2b^2 - c^2S_C).$$

Si $\widehat{M'_aM'_bM'_c}$ es el triángulo circunsceviano del baricentro:

$$M'_a(-a^2 : b^2+c^2 : b^2+c^2), \qquad M'_b(c^2+a^2 : -b^2 : c^2+a^2), \qquad M'_c(a^2+b^2 : a^2+b^2 : -c^2),$$

el triángulo tangencial de $\widehat{M'_aD_bD_c}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$ con centro de perspectividad en $O'_a(-2a^2S_BS_C/(a^2+b^2+c^2) : b^2S_B : c^2S_C)$. Resultado similar se obtiene para los triángulos $\widehat{M'_bD_cD_a}$ y $\widehat{M'_cD_aD_b}$.

Los triángulos $\widehat{D_aD_bD_c}$ y $\widehat{M'_aM'_bM'_c}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en X_{22} (centro de perspectividad de $\widehat{ABC}$ y el triángulo tangencial del triángulo circunsceviano del baricentro, $\widehat{M'_aM'_bM'_c}$).

PROPUESTAS: ¿Cómo puede construirse el triángulo $\widehat{D_aD_bD_c}$? ¿Existen otros triángulos inscritos en la circunferencia circunscrita cuyo triángulo tangencial sea perspectivo con el triángulo de referencia y con centro de perspectividad en el circuncentro?

Tangentes que determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad:

$$\left(\frac{1}{p^2} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{r^2}\right).$$

Las tres cónicas $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$ se cortan dos a dos en otros dos puntos (a parte de G y $D(Q)$) que determinan tres rectas concurrentes. Para determinar las ecuaciones de estas rectas, tengamos en cuenta que una de las cónicas degeneradas del haz de cónicas, determinado por las cónicas $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, está formado por la recta $GD(Q)$, y la recta:

$$\ell_a : \ (-p^3(q+r) - p^2(q^2 - qr + r^2) + 2pqr(q+r) - q^2r^2)x + p^2(p+q)(p-r)y + p^2(p-q)(p+r)z = 0.$$

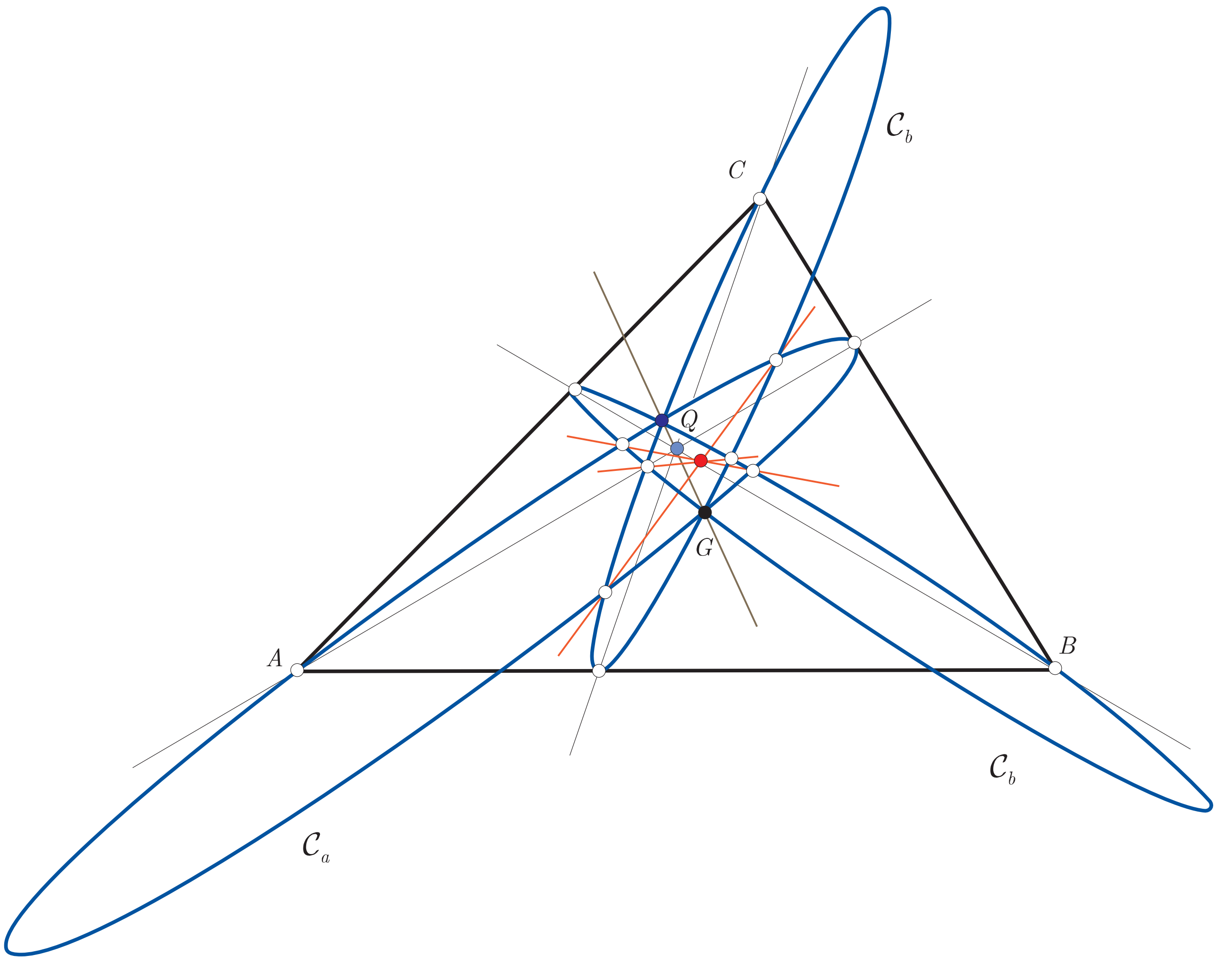
Procediendo cíclicamente, en las cónicas degeneradas que contienen a la recta $GD(Q)$ para los otros dos haces de cónicas determinados por $\mathcal{C}_c$ y $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_a$ y $\mathcal{C}_b$, las otras rectas son:

$$\ell_b : \ q^2(q-r)(q+p)x + (-q^3(r+p) - q^2(r^2 - rp + p^2) + 2qrp(r+p) - r^2p^2)y + q^2(q+r)(q-p)z = 0,$$

$$\ell_b : \ r^2(r+p)(r-q)x + r^2(r-p)(r+q)y + (-r^3(p+q) - r^2(p^2 - pq + q^2) + 2rpq(p+q) - p^2q^2)z = 0.$$

Estas tres rectas se cortan en el punto cuya primera coordenada (las otras se obtienen por permutación cíclica) es:

$$\left(p^2\left(p^2(q-r)^2 - qr(q+r)^2 + p(q+r)(q^2 - 4qr + r^2)\right) : \cdots : \cdots\right).$$



A los puntos del infinito de las cevianas por $Q(p:q:r)$ le corresponden puntos Danneels siguientes, que son los de tangencia de la cúbica (1) con las cónicas $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, respectivamente:

$$\left(-(q+r)^3 : q^3 : r^3\right), \qquad \left(p^3 : -(r+p)^2 : r^3\right), \qquad \left(p^3 : q^3; -(p+q)^2\right).$$

Por lo que determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, de centro de perspectividad en $(p^3 : q^3 : r^3)$.

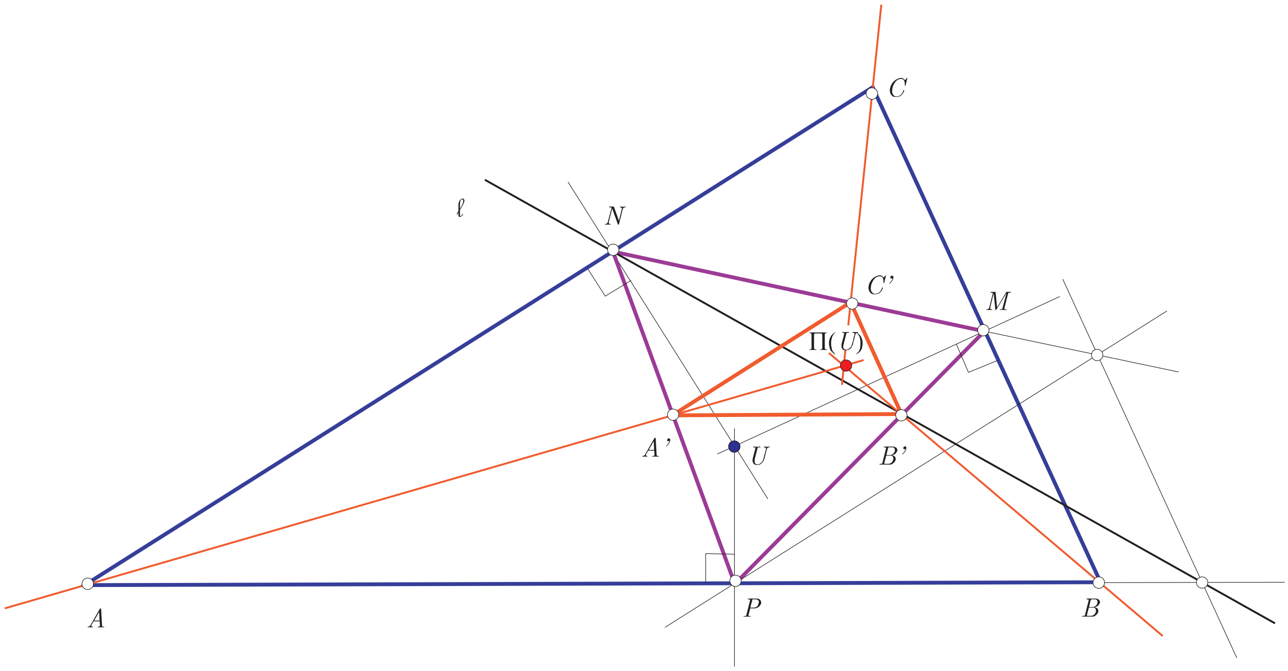
– – — — – — — – –

★ Caso en que $\widehat{PMN}$ es el triángulo pedal de un punto $U(u:v:w)$:

$$M(0:a^2v+S_Cu:a^2w+S_Bu),\qquad N(b^2u+S_Cv:0:b^2w+S_Av),\qquad P(c^2u+S_Bw:c^2v+S_Aw:0).$$

El centro de homotecia es:

$$\Pi(U)=\left((a^2(b^2u+S_Cv)(c^2u+S_Bw):b^2(a^2v+S_Cu)(c^2v+S_Aw):c^2(a^2w+S_Bu)(b^2w+S_Av)\right).$$



Algunos pares $U-\Pi(U)$ y su primera coordenada baricéntrica son:

U		$\Pi(U)$	
X_1	a	X_{57}	$\dfrac{a}{b+c-a}$
X_2	1	X_{3066}	$a^2(b^2+S_C)(c^2+S_B)$
X_3	a^2S_A	X_2	1
X_4	S_BS_C	X_{25}	$a^2S_BS_C$
X_5	$S^2+S_BS_C$		$a^2(b^2+2S_C)(c^2+2S_B)$
X_6	a^2	X_{1285}	$9a^4-(b^2-c^2)^2$
X_7	$\dfrac{1}{b+c-a}$		$\dfrac{a^2(c(a+b)-S_B)(b(a+c)-S_C)}{(b+c-a)^2}$
X_8	$b+c-a$		$a^2(b(c-a)+S_C)(c(b-a)+S_B)$
X_{10}	$b+c$		$a^2(b(b+c-a)+2S_C)(c(b+c-a)+2S_B)$

• Cuando U recorre una recta que pasa por un vértice, el punto $\Pi(U)$ recorre una cónica, que pasa por por dicho vértice. Si U se hace variar sobre las cevianas de un punto $Q(p:q:r)$, $D(U)$ describe tres cónicas, del tipo de la citada y las tangentes en los vértices de $\widehat{ABC}$ son:

$$c^2((a^2-c^2)q-b^2(q+2r))S_By-b^2((a^2-b^2)r-c^2(2q+r))S_Cz=0,$$

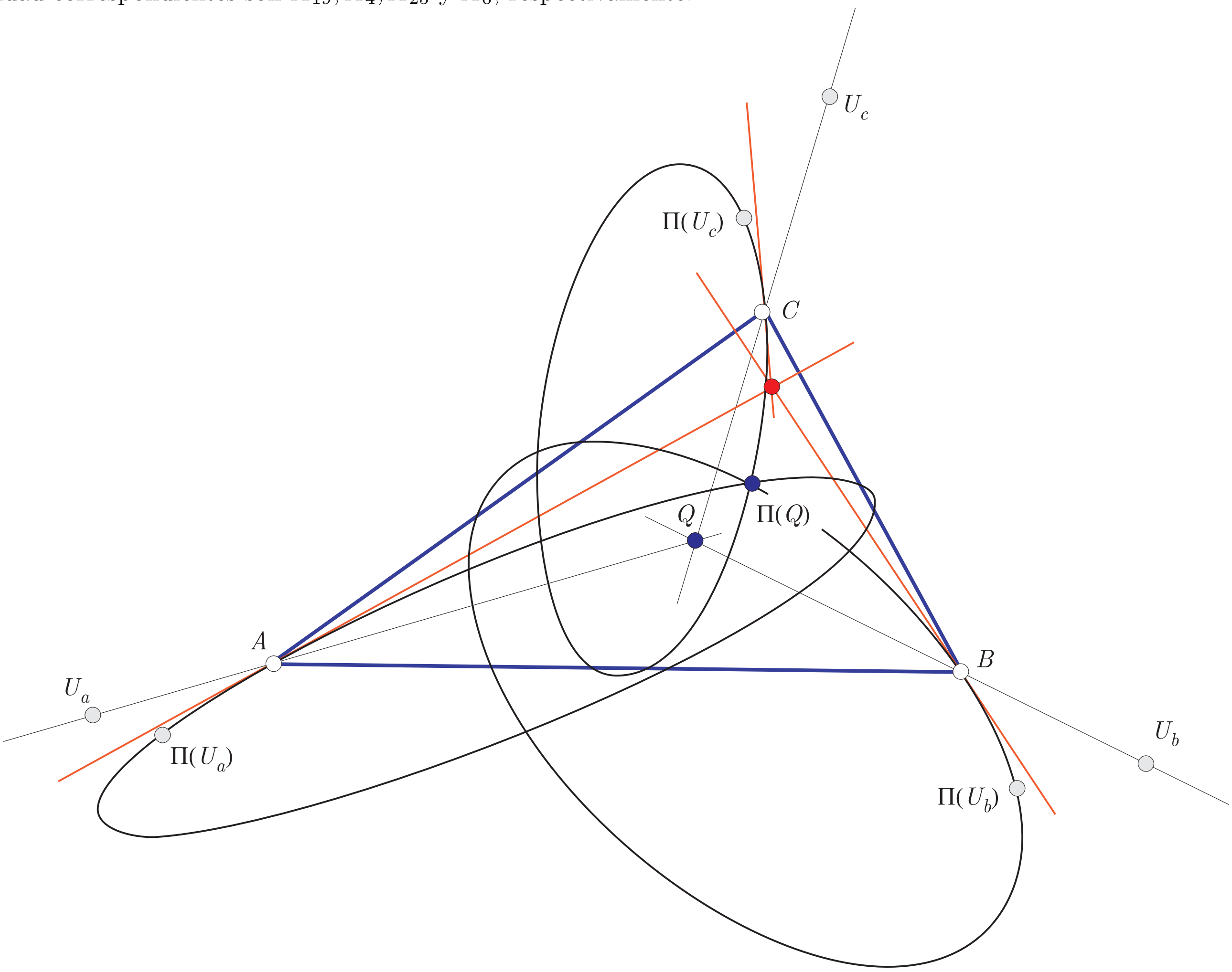
$$-c^2((b^2-c^2)p-a^2(2r+p))S_Ax+a^2((b^2-a^2)r-c^2(r+2p))S_Cz=0,$$

$$b^2((c^2-b^2)p-a^2(p+2q))S_Ax-a^2((c^2-a^2)q-b^2(2p+q))S_By=0.$$

El triángulo determinado por estas rectas es perspectivo con $\widehat{ABC}$ si sólo si $Q(p:q:r)$ está la cúbica de Darboux (**K004** en CTC), siendo la primera coordenada del centro de perspectividad (las otras dos se obtienen permutando cíclicamente):

$$a^2 S_B S_C \left((a^2-b^2)r + c^2(2p+r)\right)\left((a^2-c^2)q - b^2(q+2r)\right).$$

En particular, cuando Q coincide con los puntos X_1, X_3, X_4 y X_{20} de la cúbica de Darboux, los centro de perspectividad correspondientes son X_{19}, X_4, X_{25} y X_6, respectivamente.



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2409.pdf