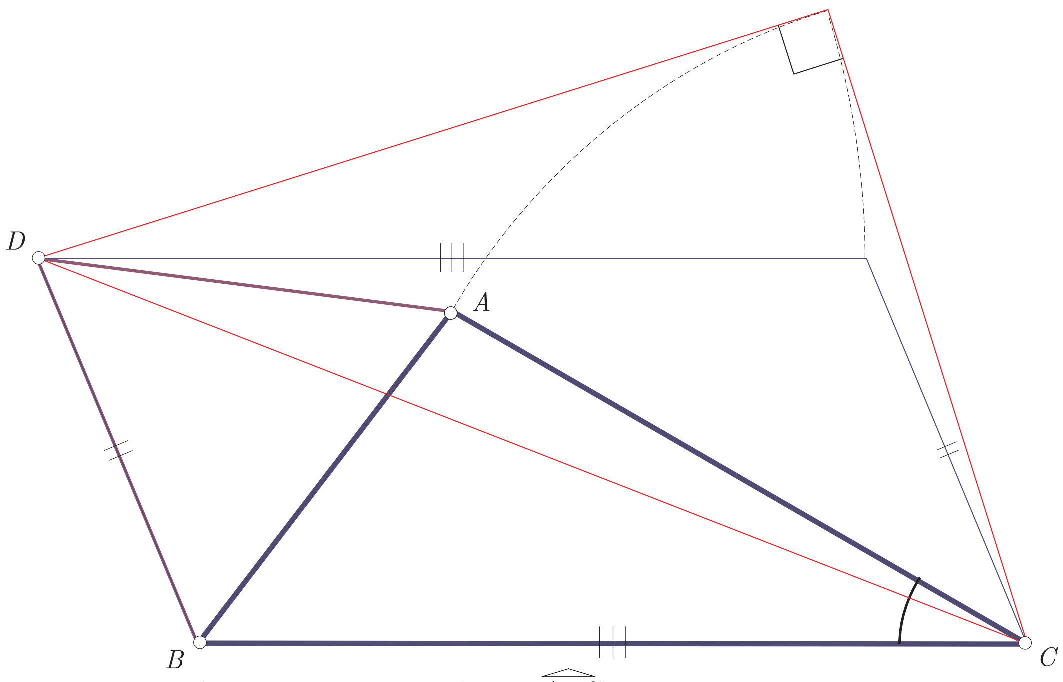
En un triángulo $\widehat{ABC}$ cuyo ángulo en C es de 30°, se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **567**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *En un triángulo ABC cuyo ángulo C es de 30°, se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.*
>
> *Rabinowitz, S. (1963): Mathematics Student Journal 10, 6*

—— - ——



Usando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$ y resultados dados por Paul Yiu en "Introduction to Triangle Geometry", de los que indicamos números de párrafos y páginas, podemos obtener sin dificultad la propiedad enunciada.

De la fórmula de Conway (P. Yiu, §3.4.2, p. 34 o en A. Montesdeoca. Geometría con coordenadas baricéntricas. http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#geoba-formula-Conway) se deduce que las coordenadas de D son:

$$D\left(S_B + \frac{S}{\sqrt{3}} : S_A + \frac{S}{\sqrt{3}} : -c^2\right).$$

Siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$, $S_A = S \operatorname{cotag} A, S_B = S \operatorname{cotag} B, S_C = S \operatorname{cotag} C$.

El cuadrado de la distancia entre C y D (§7.1, p. 88) da:

$$\overline{CD}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}S\right).$$

Como en el caso particular que nos ocupa $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi/6)$ y $S = ab\operatorname{sen}(\pi/6)$, al sustituir en la última fórmula da $\overline{CD}^2 = a^2 + b^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2$, por lo que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2431.pdf