Si denominamos antisimediana al segmento conjugado isotómico de la simediana, es decir, el segmento cuyo pie es simétrico del pie de la simediana respecto del punto medio del lado, probar o refutar la siguiente proposición: "Existen triángulos no isósceles con dos antisimedianas de la misma longitud ".

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **568**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

Es bien conocido que si un triangulo ABC tiene dos medianas, o dos bisectrices interiores, o dos cevianas Gergonne, o dos simedianas de la misma longitud, entonces el triangulo es necesariamente isósceles. Por otra parte, también es conocido que si un triangulo tiene dos bisectrices exteriores iguales, el triangulo no es necesariamente isósceles. (A este tipo de triángulos se les denomina pseudoisósceles).

Si denominamos antisimediana al segmento conjugado isotomico de la simediana, es decir, el segmento cuyo pie es simétrico del pie de la simediana respecto del punto medio del lado, probar o refutar la siguiente proposición: "Existen triángulos no isósceles con dos antisimedianas de la misma longitud ".

Vicario, V. (2010): Comunicación personal.

—— - ——

En coordenadas baricéntricas respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, el simediano tiene coordenadas $K(a^2 : b^2 : c^2)$. Su isotómico conjugado es el punto $(b^2c^2 : c^2a^2 : a^2b^2)$, por lo que los pies de las "antisimedianas" desde los vértices A, B y C son, respectivamente,

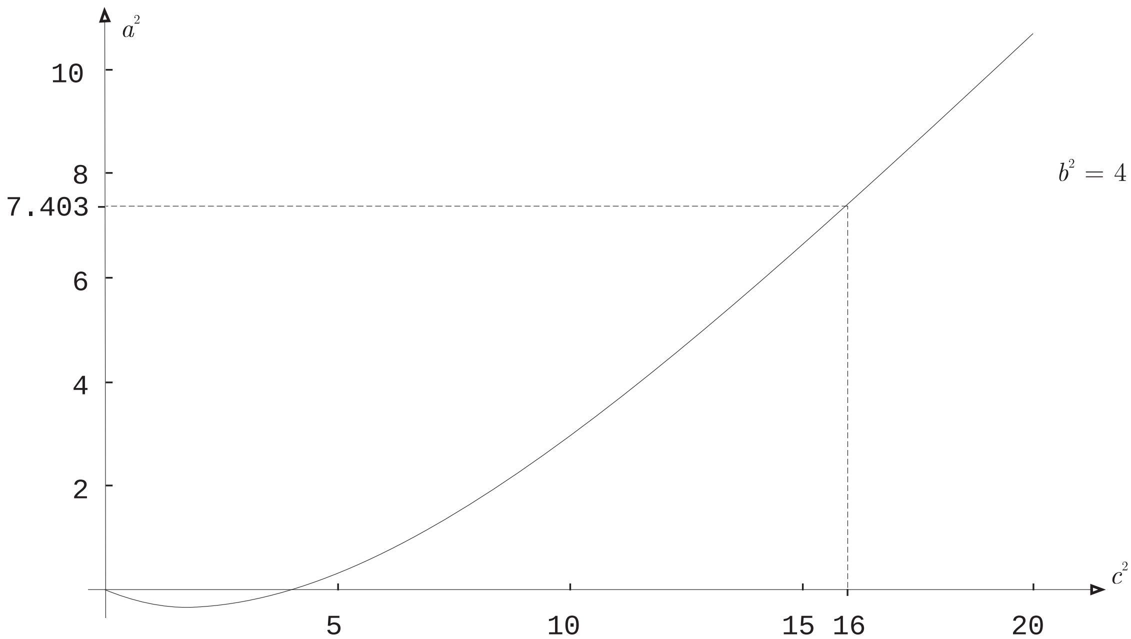
$$D(0 : c^2, b^2), \qquad E(c^2 : 0 : a^2), \qquad F(b^2 : a^2 : 0).$$

Vamos a obtener un triángulo para valores particulares de sus lados (todos distintos), para lo cual expresamos el cuadrado de la longitud de los segmentos AD y BD (Paul Yiu.- Introduction to the Geometry of the Triangle, §7.1, p. 88) por las relaciones siguientes:

$$\frac{b^6+c^6+b^2c^2(b^2+c^2-a^2)}{(b^2+c^2)^2}, \qquad \frac{c^6+a^6+c^2a^2(c^2+a^2-b^2)}{(c^2+a^2)^2}.$$

El sistema que resulta de igualar estas dos expresiones, resuelto en las variables a^2, b^2, c^2, tiene entre sus soluciones la siguiente:

$$a^2 = \frac{-3b^4c^2-4b^2c^4+c^2\sqrt{5b^8+12b^6c^2+16b^4c^4+12b^2c^6+4c^8}}{2(b^4+3b^2c^2+c^4)}.$$



Igualdad que se satisface para los siguientes valores particulares:

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{58}(256\sqrt{2101}-4864)} \simeq 2.7208, \qquad b = 2, \qquad c = 4.$$

En el triángulo (no isósceles) de lados estos valores, construible con regla y compás, las longitudes de los segmentos de "antisimedianas" AD y BE son las mismas e igual a:

$$\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{29}(2617-8\sqrt{2101})} \simeq 3.52356.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2432.pdf