Las alturas de un triángulo $\widehat{ABC}$ se cortan en un punto H. Determínese el valor del ángulo $\widehat{BCA}$ sabiendo que $AB = CH$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **569**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

Las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto H. Determínese el valor del ángulo <BCA sabiendo que AB=CH.

De Diego, B.,Llerena, A.,Baena,F.,Rodríguez,M.B.,Gamboa,J.M:,Lorenzo, J.M. (2005): Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. p.745 (Ceuta) Año 2004.

—— - ——

La longitud de segmento CH viene dada por:

$$CH^2 = \frac{c^2(a^2-b^2-c^2)^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Por lo que, esta distancia coincide con la del lado $AB = c$ si

$$\frac{2c^2(a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2)}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = 0.$$

Es decir, si $CH = AB$, se ha de cumplir que:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2 = 0.$$

Ecuación que resuelta en c^2 da:

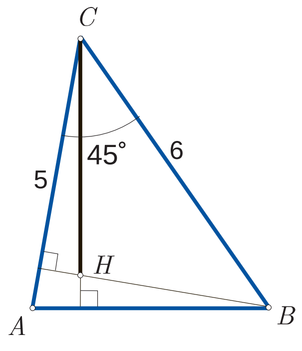
$$c^2 = a^2+b^2 \pm \sqrt{2}ab.$$

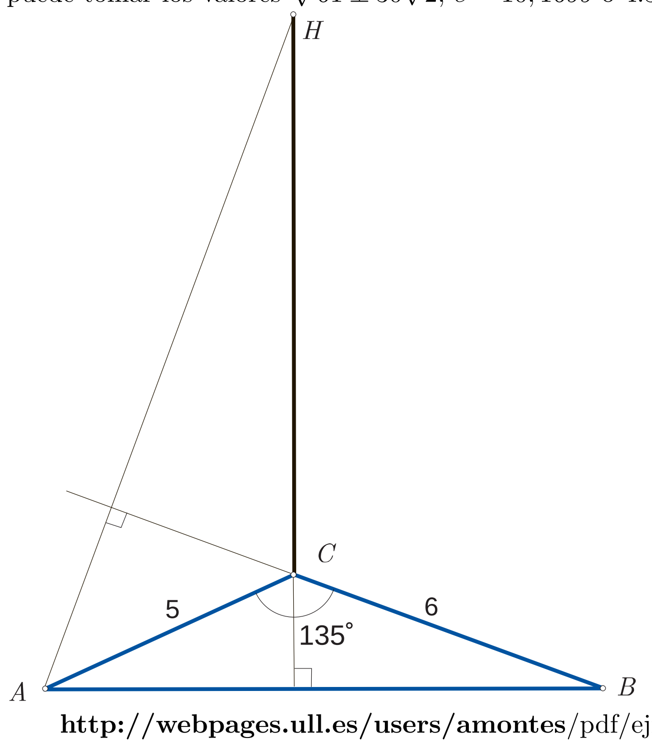
Usando la ley del coseno ($c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$), se tiene que:

$$\pm\sqrt{2}ab = -2ab\cos C.$$

Así los valores del ángulo pedido, $\widehat{ACB}$, son $\pi/4$ y $3\pi/4$.

Por ejemplo, para $a = 6$ y $b = 5$, se tiene que c puede tomar los valores $\sqrt{61 \pm 30\sqrt{2}}$; $c = 10,1699$ ó 4.3097.





http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2437.pdf