Construir sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo $\widehat{ABC}$, exteriormente, los cuadrados $BCDE, ACFG, BAHK$, y construir los paralelogramos $FCDQ, EBKP$. Demostrar que APQ es un triángulo rectángulo isósceles.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\textbf{572}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

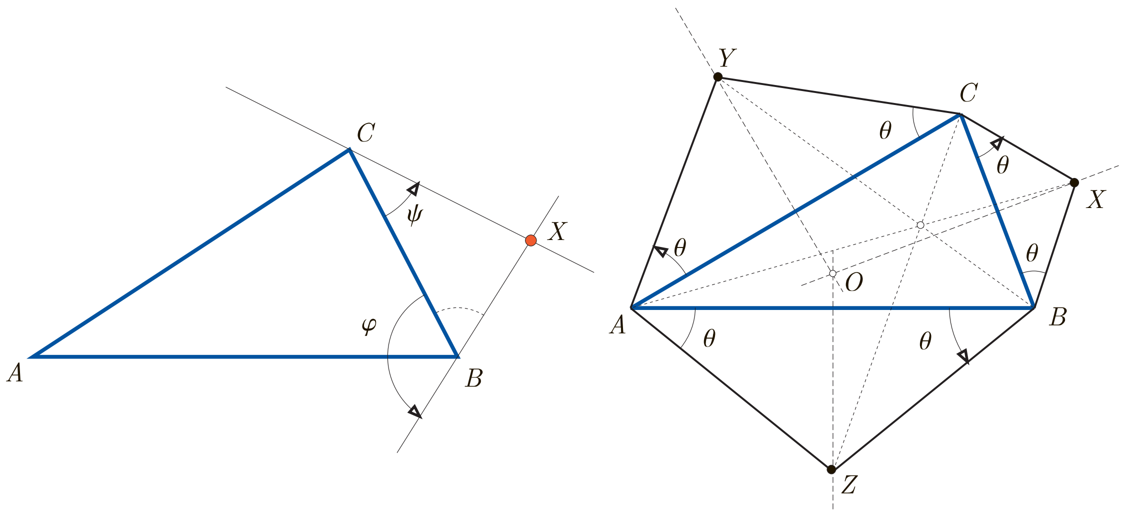
> *Construir sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, exteriormente, los cuadrados BCDE, ACFG, BAHK, y construir los paralelogramos FCDQ, EBKP. Demostrar que APQ es un triángulo rectángulo isósceles.*
>
> *Demir, H ()American Mathematical Monthly(1968), Vol 75 p 899 problem E2124. Propuesto por Hüseyin Demir; Midle East Technical University, Ankara, Turkey*

—— - ——

Podemos utilizar la fórmula de Conway y la de distancia entre dos puntos, en términos de coordenadas baricéntricas, para verificar este resultado.

Un punto X queda determinado por los ángulos que debemos girar un lado desde los dos vértices del triángulo de referencia, que determinan dicho lado, para que las rectas resultantes se corten en él. Sean φ y ψ los ángulos orientados que forman el lado BC con las rectas BX y CX, entonces las coordenadas de X son (Paul Yiu.- Introduction to Triangle Geometry, §3.4.2, p.34; http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#geoba-formula-Conway, A.Montesdeoca.- Geometría con coordenadas baricéntricas.):

$$X\left(-a^2 : S_C + S_\psi : S_B - S_\varphi\right).$$



Si tomamos $\psi = \theta$ y $\varphi = B + \theta$, obtenemos (ver figura anterior):

$$X(-a^2 : S_C + S_\theta : S_B + S_\theta), \qquad Y(S_C + S_\theta : -b^2 : S_A + S_\theta), \qquad Z(S_B + S_\theta : S_A + S_\theta : -c^2).$$

Para el caso que nos ocupa, X, Y, Z son los centros de los cuadrados $BCDE, ACFG, BAHK$, cuando $\theta = \pi/4$, con coordenadas:

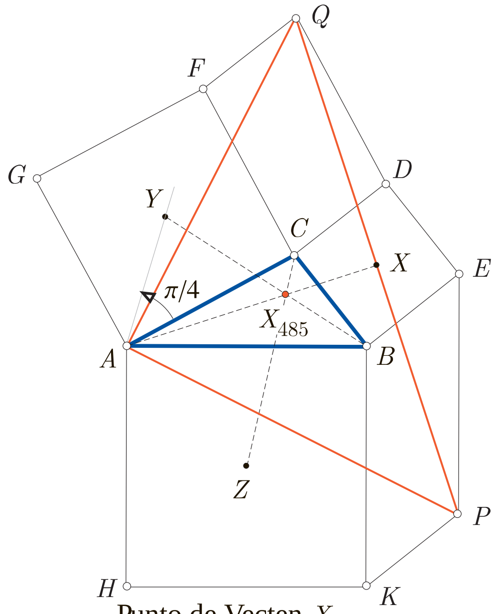
$$X\Big(-a^2 : S_C + S : S_B + S\Big), \qquad Y\Big(S_C + S : -b^2 : S_A + S\Big), \qquad Z\Big(S_B + S : S_A + S : -c^2\Big).$$

Los vértices D y F de los cuadrados $BCDE$ y $ACFG$, son los simétricos de B y A, respecto a X e Y:

$$D\left(-a^2 : S_C : S_B + S\right), \qquad F\left(S_C : -b^2 : S_A + S\right).$$

El punto Q es el simétrico de C, respecto al punto medio de de D y F, con coordenadas $Q(-S_B : -S_A : c^2 + S)$. Procediendo cíclicamente se obtiene que las coordenadas de R y P:

$$P(-S_C : b^2 + S : -S_A), \qquad Q(-S_B : -S_A : c^2 + S), \qquad R(a^2 + S : -S_C : -S_B).$$



Punto de Vecten X_{485}

Finalmente (Paul Yiu.- Introduction to Triangle Geometry, §7.1, p.88), se obtiene que:

$$\overline{AP}^2 = b^2 + c^2 + 2S, \qquad \overline{AQ}^2 = b^2 + c^2 + 2S, \qquad \overline{PQ}^2 = 2(b^2 + c^2 + 2S).$$

Por lo que (teorema de Pitágoras) el triángulo $\widehat{APQ}$ es un triángulo rectángulo isósceles.

Una demostración elemental:

Expresando los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ en términos de las componentes cartesianas de $\overrightarrow{AB}= (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{AC}= (v_1, v_2)$:

$$\overrightarrow{BC}= (v_1 - u_1, v_2, u_2), \quad \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}= (v_2 - u_2, u_1 - v_1), \quad \overrightarrow{BK}= (u_2, -u_1), \quad \overrightarrow{CF}= (-v_2, v_1).$$

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BK}= (u_1, u_2) + (v_2 - u_2, u_1 - v_1) + (u_2, -u_1) = (u_1 + v_2, u_2 - v_1),$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF}= (v_1, v_2) + (v_2 - u_2, u_1 - v_1) + (-v_2, v_1) = (v_1 - u_2, v_2 + u_1).$$

Entonces, el producto escalar $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}= 0$, es decir, son perpendiculares. Además, los productos escalares $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AQ}$, tienen el mismo valor:

$$u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2u_1v_2 - 2u_2v_1,$$

es decir, $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ tienen la misma longitud.

Otra solución puede verse en:

Charles Stanley Ogilvy.- Excursions in geometry. Dover Publications, Inc. New York, 1990. (pag. 196).

NOTA ADICIONAL

Si en vez de tomar cuadrados exteriores sobre los lados de $\widehat{ABC}$, los tomamos interiormente, obtenemos los puntos

$$P'(S_C : S - b^2 : S_A), \qquad Q'(S_B : S_A : S - c^2), \qquad R'(S - a^2 : S_C : S_B).$$

Los puntos P', Q', R' son los simétricos de P, Q, R, respecto a B, C, A, respectivamente y los triángulos $\widehat{AP'Q'}$, $\widehat{BQ'R'}$, $\widehat{CR'P'}$ son isósceles, con ángulo recto en los vértices A, B, C, respectivamente.

Además, los puntos $U = PQ \cap P'Q', V = QR \cap Q'R', W = RP \cap R'P'$ están alineados:

$$U\left(b^2 - c^2 : a^2 - 2b^2 : -a^2 + 2c^2\right), \qquad V\left(-b^2 + 2a^2 : c^2 - a^2 : b^2 - 2c^2\right), \qquad W\left(c^2 - 2a^2 : -c^2 + 2b^2 : a^2 - b^2\right).$$

lo que quiere decir que los triángulos $\widehat{PQR}$ y $\widehat{P'Q'R'}$ son perspectivos; su centro de perspectividad es el ortocentro de $\widehat{ABC}$.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2439.pdf