Sea dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos respectivamente con $O, I, H, G, K$ el circuncentro, el incentro, el ortocentro, el baricentro y el punto de Lemoine. Sean $M$ el punto medio de $AC$ y $N$ el punto de intersección de la recta $AB$ con la mediatriz de $AC$ y sea $\Gamma$ la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{BNC}$. Probar que:
(1) el punto $O$ pertenece a la circunferencia $\Gamma$
(2) el punto $I$ pertenece a la circunferencia $\Gamma$ si y sólo si: $A = 60°$
(3) el punto $H$ pertenece a la circunferencia $\Gamma$ si y sólo si: $(A = 60°)$ ó $(A = 120°)$ ó $(B = 90°)$ ó $(C = 90°)$
(4) el punto $G$ pertenece a la circunferencia $\Gamma$ si y sólo si: $a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 = 0$
(5) el punto $K$ pertenece a la circunferencia $\Gamma$ si y sólo si: $2a^2 = b^2 + c^2$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **583**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Sea dado un triángulo ABC, y denotamos respectivamente con O,I,H,G,K el circuncentro, el incentro, el ortocentro, el baricentro y el punto de Lemoine. Sea M el punto medio de AC, sea N el punto de intersección de la recta AB con la mediatriz de AC y sea g la circunferencia circunscrita al triángulo BNC. Probar que:*
>
> *(1) el punto O pertenece a la circunferencia g*
>
> *(2) el punto I pertenece a la circunferencia g si y solo si :* $A = 60°$
>
> *(3) el punto H pertenece a la circunferencia g si y solo si :* $(A = 60°)$ *o* $(A = 120°)$ *o* $(B = 90°)$ *o* $(C = 90°)$
>
> *(4) el punto G pertenece a la circunferencia g si y solo si:* $a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 = 0$
>
> *(5) el punto K pertenece a la circunferencia g si y solo si:* $2a^2 = b^2 + c^2$ *(es decir el triangulo ABC es automediano)*
>
> *Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico. "A. Einstein" Teramo, Italia*

—— - ——

El uso de coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$, permite resolver de forma inmediata este problema:

La mediatriz del segmento $AC$ es: $b^2x + (a^2 - c^2)y - b^2z = 0$; y el punto de intersección de ésta con el lado $AB$ es $N(c^2 - a^2 : b^2 : 0)$.

La circunferencia circunscrita a $\widehat{BNC}$ es:

$$\Gamma : \; a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2 - a^2}x(x + y + z) = 0.$$

(1) El circuncentro $O\left(a^2(b^2 + c^2 - a^2), b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)\right)$, está en $\Gamma$.

(2) El incentro $I(a : b : c)$ está en $\Gamma$ si y sólo si

$$\frac{abc(a + b + c)\left(a^2 - b^2 - c^2 + bc\right)}{a^2 - b^2 - c^2} = \frac{abc(a + b + c)(-2\cos A + 1)}{-2\cos A} = 0 \Leftrightarrow A = 60°.$$

Hemos usado que $b^2 + c^2 - a^2 = 2S \operatorname{cotag} A$ y que $bc \operatorname{sen} A = S$ ($S$ el doble del área de $\widehat{ABC}$).

(3) El ortocentro $H\left((c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) : (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)\right)$ está en $\Gamma$ si y sólo si

$$\frac{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)\left(c^2 + a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 - b^2 - c^2 - bc\right)\left(a^2 - b^2 - c^2 + bc\right)}{16\left(a^2 - b^2 - c^2\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (B = 90°) \text{ ó } (C = 90°) \text{ ó } (A = 60°) \text{ ó } (A = 120°).$$

(4) El baricentro $G(1 : 1 : 1)$ está en $\Gamma$ si y sólo si

$$\frac{a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2}{a^2 - b^2 - c^2} = 0 \Leftrightarrow a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 = 0.$$

(5) El simediano $K(a^2 : b^2 : c^2)$ está en $\Gamma$ si y sólo si

$$\frac{2a^2b^2c^2\left(2a^2-b^2-c^2\right)}{a^2-b^2-c^2}=0 \Leftrightarrow 2a^2b^2c^2\left(2a^2-b^2-c^2\right)=0.$$

**http://webpages.ull.es/users/amontes**/pdf/ejrb2462.pdf