

¿Serán necesariamente iguales dos triángulos acutángulos e isósceles, que tengan el mismo radio de la circunferencia inscrita y también iguales los dos pares de lados "laterales"?

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 597
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Con el siguiente enunciado:

¿Serán necesariamente iguales dos triángulos acutángulos e isósceles, que tengan el mismo radio del círculo inscrito y también iguales los dos pares de lados "laterales"?

Kvant (1979) M556

Podemos tomar, sin pérdida de generalidad, la circunferencia inscrita como la circunferencia de radio uno y centrada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas rectangular (su radio es nuestra unidad de medida). El vértice donde se cortan los lados iguales lo podemos tomar en el eje de ordenadas: $A(0, t)$, $t > 1$.

Las tangentes desde $A(0, t)$ a la circunferencia, de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tienen ecuación conjunta:

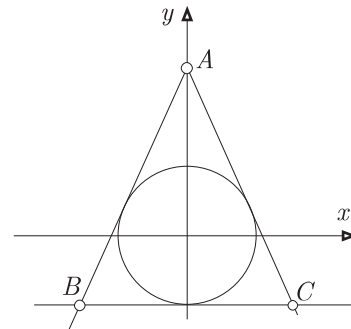
$$(ty - 1)^2 - (t^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Estas tangentes cortan a la recta $y = -1$ en los puntos:

$$B\left(-\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}, -1\right), \quad C\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}, -1\right).$$

El cuadrado de la longitud del lado AB es:

$$d(t) = \frac{t^2(t+1)}{t-1}.$$

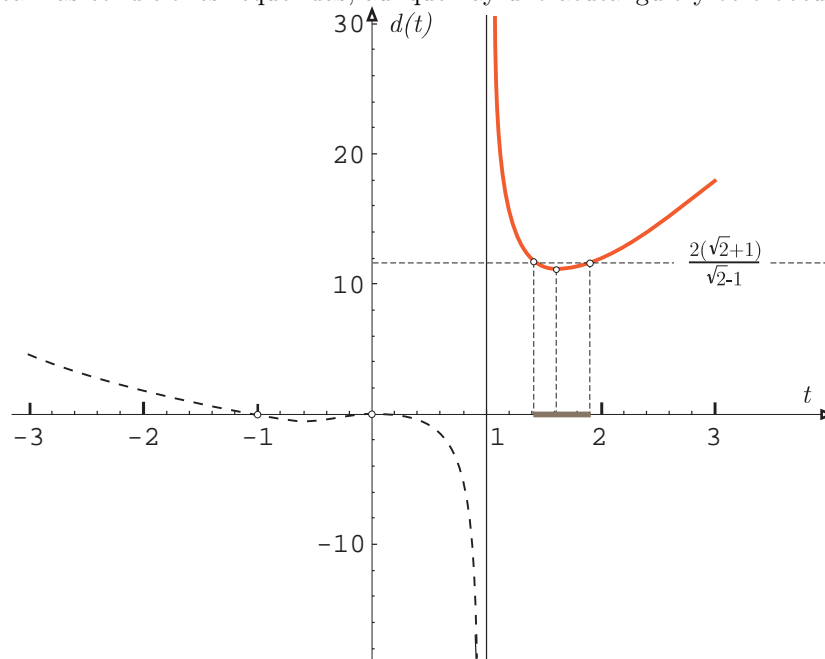


Esta cantidad, se hace infinito para $t = 1$ y tiene un un mínimo para $t = (1 + \sqrt{5})/2$. El valor para el cual el ángulo en A es $\pi/2$ es $t = \sqrt{2}$, que se obtiene poniendo $2AB^2 = BC^2$; para valores de t tales que $1 < t < \sqrt{2}$, el ángulo en A es obtuso.

En el intervalo $\left[\sqrt{2}, \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{2} + \sqrt{4(4 + 3\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})^2}\right)\right] = [1.41421, 1.90733]$,

existen dos valores de t para los cuales los triángulos isósceles son acutángulos, tienen el mismo radio de sus circunferencias inscritas y también iguales los dos pares de lados "laterales".

Para valores de t fuera del intervalo anterior y $t > 1$, hay dos valores de t para los que los triángulos isósceles correspondientes verifican las condiciones requeridas, aunque hay uno acutángulo y otro obtusángulo.



<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2470.pdf>