Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar D sobre la recta BC, E sobre AC y F sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2, \quad BA^2 + AE^2 = BC^2 + CE^2, \quad CA^2 + AF^2 = CB^2 + BF^2.$$

Demostrar que las cevianas AD, BE y CF concurren.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **620**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado (que hemos modificado, para que se adapte mejor a ciertas notaciones personales):

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar E sobre la recta BC, F sobre AC y G sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CE^2 = AB^2 + BE^2, \quad BA^2 + AF^2 = BC^2 + CF^2, \quad CA^2 + AG^2 = CB^2 + BG^2.$$

Demostrar que las cevianas AE, BF y CG concurren.

Utilizando coordenadas baricéntricas, sean los puntos

$$D(0 : d_2 : d_3), \qquad E(e_1 : 0 : e_3), \qquad F(f_1 : f_2 : 0).$$

Las tres condiciones impuesta equivalen, respectivamente, a las siguientes:

$$b^2 - c^2 = \frac{a^2(d_3 - d_2)}{d_2 + d_3}, \quad c^2 - a^2 = \frac{b^2(e_1 - e_3)}{e_1 + e_3}, \quad a^2 - b^2 = \frac{c^2(f_2 - f_1)}{f_2 + f_1}.$$

Esta ecuaciones junto con la condición de que AD, BE y CF sean concurrentes, $d_2e_3f_1 - d_3e_1f_2 = 0$, dan como solución:

$$d_2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} d_3, \quad e_3 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} e_1, \quad f_1 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2} f_2.$$

Con lo que D, E y F son pies de las cevianas del punto de coordenadas:

$$(-a^2 + b^2 + c^2 : a^2 - b^2 + c^2 : a^2 + b^2 - c^2).$$

Es el conjugado isotómico del ortocentro, X_{69} el la Enciclopedia de Kimberling (ETC).