Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ circunscrito a una cónica $\mathcal{C}$, t una tangente arbitraria a $\mathcal{C}$ y P_a el punto de contacto de BC con $\mathcal{C}$.

Consideremos las distancias $d_b = d(B,t), d_c = d(C,t), d_a = d(A,t)$ y $d_1 = d(P_a,t)$. Se cumple que:

$$\frac{d_b d_c}{d_a d_1}$$

es constante.

SOLUCIÓN:

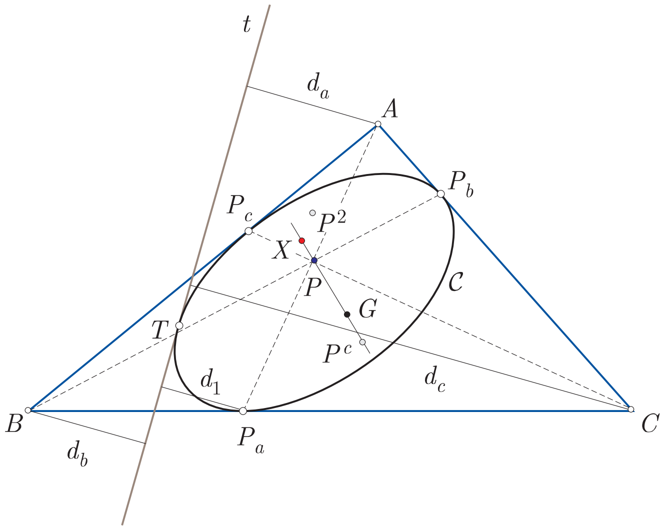
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **621**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Sea un triángulo ABC circunscrito a una cónica.
Sea r una recta cualquiera tangente a esa cónica.
Sea A^* el punto de contacto de BC con la cónica.
Consideremos $d(B,r), d(C,r), d(A,r)$ y $d(A^*,r)$
Se cumple que $(d(B,r)d(C,r))/(d(A,r)d(A^*,r))$ es constante.

García de Galdeano, Z.(1892) Geometría General. Parte primera. Teoremas, problemas y métodos geométricos. Zaragoza.Imprenta de Calisto Ariño. (p.95)

Utilizaremos coordenadas baricéntricas, lo cual nos sirve. por añadidura, para encontrar el punto X cuyas coordenadas son las cantidades constantes, con signo, que aparecen en el enunciado, procediendo cíclicamente sobre los vértices del triángulo dado.



Sea la cónica inscrita $\mathcal{C}$ de perspector (punto de Brianchon) $P(p:q:r)$, que tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}-2\frac{yz}{qr}-2\frac{zx}{pr}-2\frac{xy}{pq}=0.$$

Una recta genérica que pasa por $P_a(0:q:r)$ se puede poner de la forma:

$$rvx - ruy + quz = 0.$$

Esta recta vuelve a cortar a $\mathcal{C}$ en el punto

$$T\left(4pq^2u^2 : q(qu+pv)^2 : r(qu-pv)^2\right).$$

La tangente en T a $\mathcal{C}$ (polar de T respecto a $\mathcal{C}$) es:

$$t \equiv\ r\left(q^2u^2-p^2v^2\right)x + 2pru(pv-qu)y - 2pqu(qu+pv)z = 0.$$

Las distancias de los puntos A, B, C y P_a a t son, respectivamente:

$$d_a = \left|\frac{rS(qu-pv)(qu+pv)}{\sqrt{\Phi}}\right|,\quad d_b = \left|\frac{2prSu(pv-qu)}{\sqrt{\Phi}}\right|,\quad d_c = \left|\frac{2pqSu(qu+pv)}{\sqrt{\Phi}}\right|,\quad d_1 = \left|\frac{4pq^2rSu^2}{(q+r)\sqrt{\Phi}}\right|.$$

Donde

$$\Phi = r^2p^4a^2v^4 - 4rp^4(qS_B - rS_C)uv^3 + 2p^2\left(2p^2(q+r)^2S_A + \left(2p(p-r)-r^2\right)S_Bq^2 + \left(2p(p-q)-q^2\right)r^2S_C\right)u^2v^2 +$$

$$4p^2q\left(2p(q^2-r^2)S_A + (2p+r)S_Bq^2 - (2p+q)r^2S_C\right)u^3v + q^2\left(4p^2(q-r)^2S_A + q^2(2p+r)^2S_B + (2p+q)^2r^2S_C\right)u^4,$$

siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$, $S_A = S \operatorname{cotg} A = (b^2+c^2-a^2)/2, \ldots$

Con lo que

$$\frac{d_bd_c}{d_ad_1} = \left|\frac{p(q+r)}{qr}\right|$$

es constante, para cada cónica y para cualquier tangente a ella.

Si la cónica es una parábola (es decir, su perspector $P(p:q:r)$ está en la la elipse circunscrita de Steiner, $yz+zx+xy=0$), entonces $d_bd_c/d_ad_1 = 1$.

NOTA ADICIONAL

Si tomamos los puntos de tangencia, P_b y P_c, de $\mathcal{C}$ con los lados CA y AB, respectivamente, se tienen las correspondientes fracciones de productos de distancias (considerando el signo) a una tangente arbitraria:

$$\frac{q(r+p)}{rp}, \qquad \frac{r(p+q)}{pq}.$$

El punto X de coordenadas baricéntricas estas tres constantes obtenidas para una cónica inscrita de perspector $P(p:q:r)$,

$$\left(\frac{p(q+r)}{qr} : \frac{q(r+p)}{rp} : \frac{r(p+q)}{pq}\right) \equiv \left(p^2(q+r) : q^2(r+p) : r^2(p+q)\right),$$

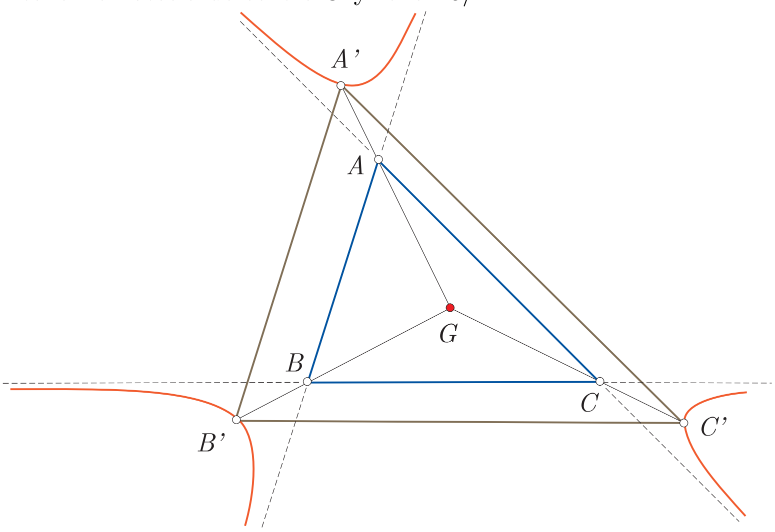
está alineado con P y G (baricentro de $\widehat{ABC}$) es el producto baricéntrico de P por el complemento de P y divide al segmento GP en la razón:

$$GX : XP = -\frac{(p+q+r)(pq+qr+rp)}{3pqr}.$$

Esta razón se anula si el punto X coincide con el baricentro, es decir, cuando P está sobre la elipse circunscrita de Steiner $yz+zx+xy=0$ o si P está en la recta del infinito, en este caso X recorre en la cúbica:

$$x^3+y^3+z^3+3xy^2+3xz^2+3yz^2+3yx^2+3zx^2+3zy^2-21xyz = 0,$$

que es "Tucker nodal cubic" (http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/Exemples/k015.html) respecto al triángulo homotético a $\widehat{ABC}$ mediante la homotecia de centro G y razón $3/2$.



Más en general, si P se mueve en una recta ℓ que no pasa por el baricentro, entonces X recorre una cúbica tangente a los lados de $\widehat{ABC}$ en los puntos de corte de ℓ con ellos y teniendo como punto doble el baricentro.