Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, hallar dos triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B.

Hallar los lados de los dos triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ en función de a, b y c, lados de $\widehat{ABC}$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{636}}$

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Dado un triángulo ABC, hallar dos triángulos DEF y GHI tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B.

Hallar los lados de los dos triángulos DEF y GHI en función de a, b y c, lados de ABC.

Propuesto por Ricardo Barroso

—— - ——

Usando coordenadas baricéntrica homogéneas respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, sea $D(u : v : w)$ y para determinar las coordenadas del punto E, punto medio de A y D, normalicemos las coordenadas de estos puntos, de tal forma que las sumas de sus componentes sean iguales: $A(u + v + w : 0 : 0)$ y $D(u : v : w)$; luego,

$$E = A + D = (2u + v + w : v : w).$$

El punto medio F de B y E es:

$$(0 : 2u + 2v + 2w : 0) + (2u + v + w : v : w) = (2u + v + w : 2u + 3v + 2w : w).$$

Finalmente, las coordenadas del punto medio de $C(0 : 0 : 4u + 4v + 4w)$ y F son $(2u + v + w : 2u + 3v + 2w : 4u + 4v + 5w)$, que deben coincidir con las de $D(u : v : w)$, salvo un factor de proporcionalidad.

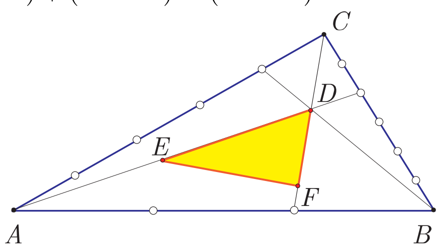
Tenemos que resolver el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

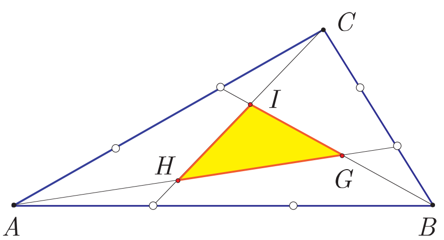
$$(2 - \lambda)u + v + w = 0, \quad 2u + (3 - \lambda)v + 2w = 0, \quad 4u + 4v + (5 - \lambda)w = 0.$$

Para que tenga solución, distinta de la trivial $u = v = w = 0$, se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 8) = 0.$$

El valor $\lambda = 1$ da lugar a la solución $u + v + w = 0$, es decir, el punto D ha de estar en la recta del infinito. Para $\lambda = 8$ se obtiene que $D(1 : 2 : 4)$ y, por consiguiente, $E = A + D$ es $(7 : 0 : 0) + (1 : 2 : 4) = (4 : 1 : 2)$ y $F = B + E = (0 : 7 : 0) + (4 : 1 : 2) = (2 : 4 : 1)$.





Cálculos similares nos permiten encontrar el triángulo $\widehat{GHI}$, de vértices [1]:

$$G(4 : 2 : 1), \qquad H(1 : 4 : 2), \qquad I(2 : 1 : 4).$$

Con esta coordenadas los triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ son fácilmente construibles, como se muestra en las gráfica precedentes, sin más que dividir cada lado de $\widehat{ABC}$ en partes iguales convenientes.

—— - ——

[1] La notación G, H e I no es para el baricentro, ortocentro e incentro se $\widehat{ABC}$, como se hace habitualmente en la geometría del triángulo.

Los cálculos realizados para determinar los triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ pedidos, los podemos hacer simultáneamente, si en vez de determinar el punto medio de un segmento, obtenemos un punto que lo divide en una razón dada.

Así, para un punto $B'(u:v:w)$, determinamos el punto C' que divide al segmento AB' en la razón t, es decir, $AC' : C'B' = t : 1$, con lo que

$$C' = (u+v+w:0:0) + t(u:v:w) = \big((1+t)u+v+w : tv : tw\big).$$

El punto A' tal que $BA' : A'C' = t : 1$ es

$$A' = \big(t\big((1+t)u+v+w\big) : (1+t)u + (1+t+t^2)v + (1+t)w : t^2w\big)\,.$$

Y, finalmente, el punto B^* tal que $CB^* : B^*A' = t : 1$ es:

$$\big(t^2((1+t)u+v+w) : t((1+t)u+(1+t+t^2)v+(1+t)w) : (1+t)^2u+(1+t)^2v+(1+2t+t^2+t^3)w\big)\,.$$

Tenemos que hacer coincidir las coordenadas de B^* con las de B', salvo una constante de proporcionalidad: $B^* = \lambda B'$. El único punto B', no situado en la recta del infinito, que se obtiene es para $\lambda = t^3+3t^2+3t+1$, y resulta:

$$A'(t(1+t) : (1+t)^2 : t^2), \qquad B'(t^2 : t(1+t) : (1+t)^2), \qquad C'((1+t)^2 : t^2 : t(1+t)).$$

Cálculos similares nos permiten determinar las coordenadas de los vértices del triángulo $\widehat{A''B''C''}$, tales que $AC'' : C''B'' = t : 1$, $CA'' : A''C'' = t : 1$ y $CB'' : B''A'' = t : 1$, que son:

$$A''(t(1+t) : t^2 : (1+t)^2), \qquad B''(t^2 : (1+t)^2 : t(1+t)), \qquad C''((1+t)^2 : t(1+t) : t^2).$$

Si el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ corresponde al valor t, el triángulo $\widehat{A''B''C''}$ corresponde al valor $-t-1$.

Los triángulos pedidos se obtienen para:
- $t_1 = 1$, el triángulo $\widehat{A'B'C'} = \widehat{FDE}$.
- $t_2 = -t_1 - 1 = -2$, el triángulo $\widehat{A'B'C'} = \widehat{IHG}$.

La razón entre las áreas de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ es:

$$\frac{\text{área}\widehat{ABC}}{\text{área}\widehat{A'B'C'}} = 3t^2+3t+1.$$

En particular, para $t=1$ y $t=-2$:

$$\frac{\text{área}\widehat{ABC}}{\text{área}\widehat{DEF}} = \frac{\text{área}\widehat{ABC}}{\text{área}\widehat{GHI}} = 7.$$

El triángulo $\widehat{A'B'C'}$ de área máxima se obtiene para $t=-1/2$ y es el triángulo anticomplementario $\widehat{ABC}$:

$$A'(-1:1:1), \qquad B'(1:-1:1), \qquad C'(1:1:-1).$$

Las longitudes de los lados del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ son:

$$\overline{B'C'} = \frac{\sqrt{-t(1+t)a^2+(1+t)(1+2t)b^2+t(1+2t)c^2}}{3t^2+3t+1},$$

$$\overline{C'A'} = \frac{\sqrt{t(1+2t)a^2-t(1+t)b^2+(1+t)(1+2t)c^2}}{3t^2+3t+1},$$

$$\overline{A'B'} = \frac{\sqrt{(1+t)(1+2t)a^2+t(1+2t)b^2-t(1+t)c^2}}{3t^2+3t+1}.$$

En los caso particulares de $t=1$ y $t=-2$:

$$\overline{DE} = \frac{1}{7}\sqrt{-2a^2+6b^2+3c^2}, \quad \overline{EF} = \frac{1}{7}\sqrt{3a^2-2b^2+6c^2}, \quad \overline{FD} = \frac{1}{7}\sqrt{6a^2+3b^2-2c^2}.$$

$$\overline{GH} = \frac{1}{7}\sqrt{-2a^2+3b^2+6c^2}, \quad \overline{HI} = \frac{1}{7}\sqrt{6a^2-2b^2+3c^2}, \quad \overline{IG} = \frac{1}{7}\sqrt{3a^2+6b^2-2c^2}.$$

Una construcción de los triángulos $\widehat{A'B'C'}$

El vértice A' está en la elipse $\mathcal{E}_a$ que pasa por el baricentro X_2 de $\widehat{ABC}$ y es tangente al lado AB en B y al lado AC en C (esta elipse es la trasladada de la elipse circunscrita de Steiner $\mathcal{E}$ mediante la traslación de vector $\overrightarrow{AX_2}$). Similarmente le ocurre a los vértices B' y C', que están en las elipses $\mathcal{E}_b$ y $\mathcal{E}_c$, trasladas de la elipse de Steiner, mediante los vectores $\overrightarrow{BX_2}$ y $\overrightarrow{CX_2}$, respectivamente.

Para construir uno de los triángulos $\widehat{A'B'C'}$, podemos proceder de la siguiente forma: Sea M un punto en la recta BC, la recta que pasa por M y por el baricentro X_2 de $\widehat{ABC}$, vuelve a cortar a la elipse $\mathcal{E}_a$ en un punto A'. El vértice B' es el otro punto en el que la recta $A'C$ corta a la elipse $\mathcal{E}_b$ y el vértice C' es el segundo punto en el que la recta $B'A$ corta a la elipse $\mathcal{E}_c$.

Para construir uno de los triángulos $\widehat{A''B''C''}$, procedemos de forma análoga a como hemos construido los triángulos $\widehat{A'B'C'}$, tomando el punto N simétrico de M respecto al punto medio de BC.

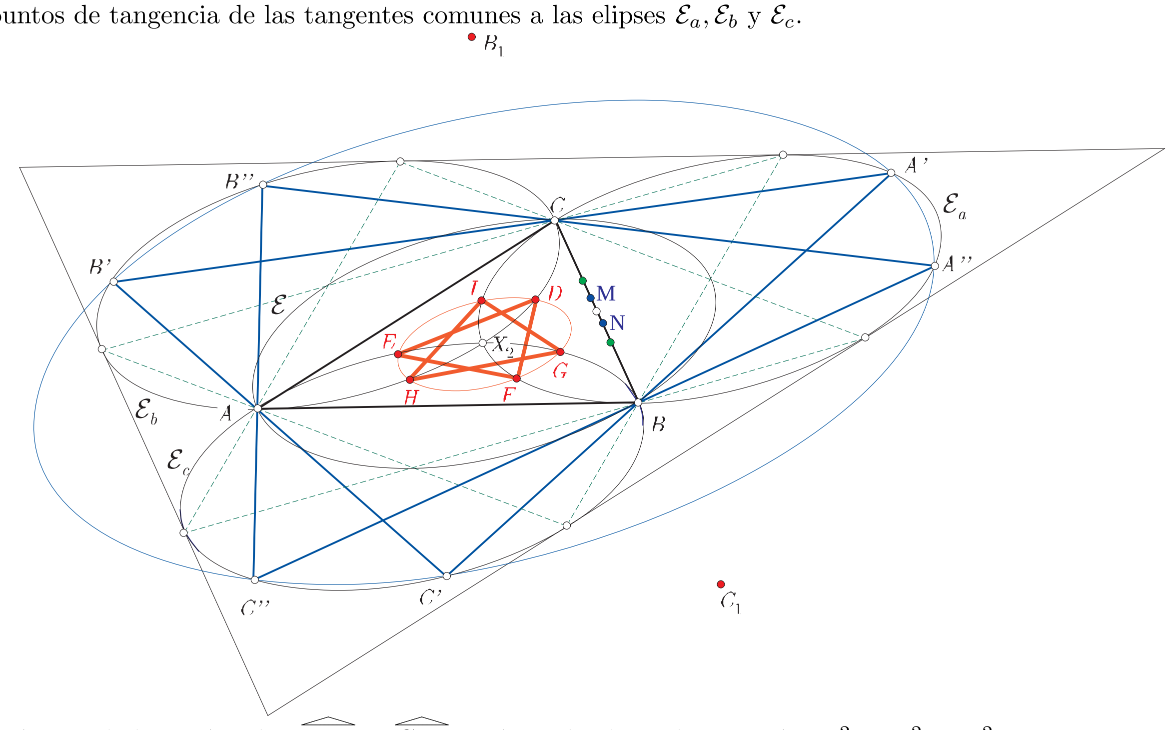
Casos particulares:

— Cuando M es el simétrico C_1 de C respecto a B, $\widehat{A'B'C'} = \widehat{FDE}$.

— Cuando M coincide con el simétrico B_1 de B respecto a C, $\widehat{A'B'C'} = \widehat{IHG}$.

— Cuando M es el punto medio de BC, $\widehat{A'B'C'}$ es el triángulo anticomplementario.

— Cuando M coincide con los puntos que trisecan a BC, los correspondientes triángulos $\widehat{A'B'C'}$ tiene sus vértices en los puntos de tangencia de las tangentes comunes a las elipses $\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b$ y $\mathcal{E}_c$.



Los vértices de los triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ están en la elipse de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3yz - 3zx - 3xy = 0$, imagen de la elipse circunscrita de Steiner mediante la homotecia de centro X_2 y razón $1/\sqrt{7}$.

En general, los vértices de los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{A''B''C''}$ están en la elipse, imagen de la elipse circunscrita de Steiner mediante la homotecia de centro X_2 y razón $1/\sqrt{3t^2 + 3t + 1}$.