

Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **683**.

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Quincena del 1 al 15 de mayo de 2013

Vamos a construir el triángulo \widehat{ABC} , rectángulo en el vértice B y en el que suponemos dado la longitud a del lado BC (sin que con esto el problema pierda generalidad; incluso podemos tomar la cantidad a como unidad de medida).

La circunferencia inscrita $I(r)$ en un triángulo \widehat{ABC} tiene por ecuación baricéntrica:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{4}(x+y+z)((b+c-a)^2x + (c+a-b)^2y + (a+b-c)^2z) = 0.$$

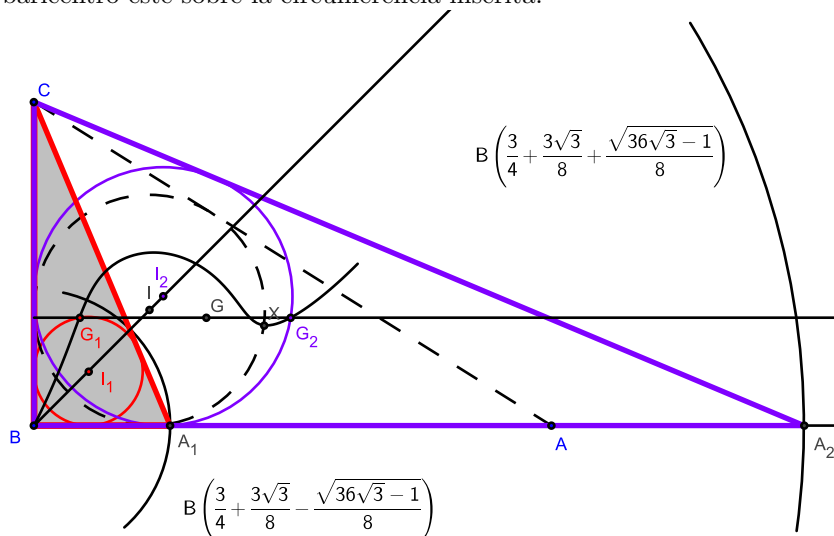
Si sustituimos en esta ecuación las coordenadas del baricentro $G(1:1:1)$ e imponemos que $b^2 = a^2 + c^2$, resulta que debemos resolver el sistema de ecuaciones, en las variables b y c :

$$3ab + 3ac + 3bc - 5a^2 - 5c^2 = 0, \quad b^2 = a^2 + c^2.$$

Tomando $a = 1$ (nueva unidad de medida), resulta que:

$$c = \frac{1}{8} \left(6 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{36\sqrt{3} - 1} \right).$$

Longitudes que pueden ser construidas con regla y compás. Por lo que existen dos triángulos rectángulos, conocido un cateto y tal que su baricentro esté sobre la circunferencia inscrita.



Appet GeoGebra

Problemas similares:

- Construir un triángulo isósceles con el baricentro sobre la circunferencia inscrita.

Al sustituir las coordenadas del baricentro $G(1 : 1 : 1)$ en la ecuación de la circunferencia inscrita y poner $b = c$ (triángulo isósceles), resulta:

$$(a - 2b)(5a - 2b) = 0.$$

La única solución posible es que $b = c = 5a/2$.

- Construir un triángulo isósceles con el circuncentro sobre la circunferencia inscrita.

Al sustituir las coordenadas del circuncentro $G(a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$ en la ecuación de la circunferencia inscrita y poner $b = c$ (triángulo isósceles), resulta:

$$a^4(a - 2b)(a + 2b)(a^2 - 2b^2)(a^2 - 4ab + 2b^2) = 0.$$

Las únicas solución válidas para $b = c$ son:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \frac{(2 + \sqrt{2})a}{2}.$$

