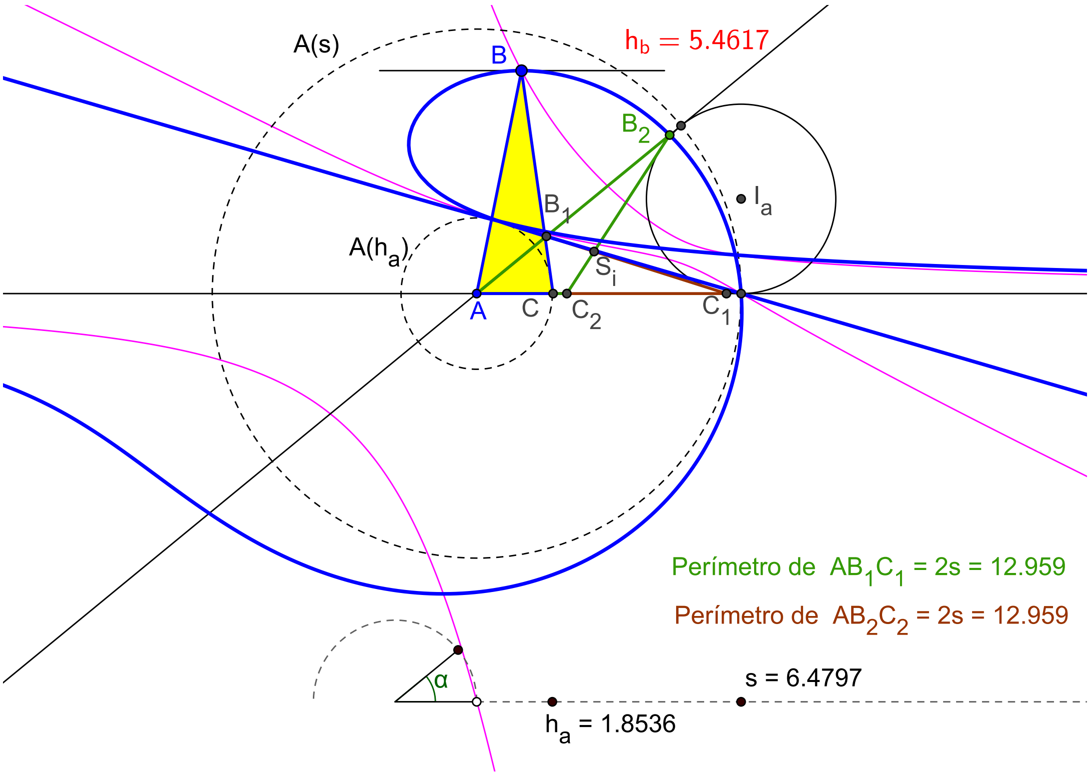
Construir un triángulo ABC del que se conocen su perímetro $(2s)$, la altura (h_a) desde el vértice A y tal que la altura (h_b) desde el vértice B sea máxima.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **761**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Jesús Sánchez, con el siguiente enunciado:

La altura máxima correspondiente al lado b de un triángulo cualquiera (abc) conocido el valor de su perímetro y la altura correspondiente al lado a.



Hoja dinámica GeoGebra

Haremos un estudio algebraico de este problema y sólo presentaremos una solución numérica para datos particulares, dada la dificultad para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes. Cabe intuir que el problema no es resoluble con regla y compás.

Si fijamos el vértice A, el lado opuesto del triángulo a construir es tangente a la circunferencia $A(h_a)$ (de centro en A y radio h_a) en uno de sus puntos. Si el ángulo en el vértice A tuviera valor α, procedemos a construir un triángulo del que se conocen $\hat{A} = \alpha, 2s$ y un punto en lado opuesto al vértice A.

Para ello trazamos un ángulo con vértice en A y amplitud α y las circunferencias $A(h_a)$ y $A(s)$. Sea $I_a(t)$ la circunferencia tangente a los lados del ángulo trazado en sus puntos de intersección con la circunferencia $A(s)$.

Ahora sólo queda trazar las tangentes desde el centro de homotecia interior S_i a las circunferencias $A(h_a)$ y $I_a(t)$, para obtener dos triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2, cumpliendo las condiciones requeridas.

Al variar α los vértices B_1 y B_2 describen una cuártica. Los puntos de esta curva donde la tangente es horizontal son vértices del triángulo solución al problema planteado originalmente.

La ecuación de la cuártica la obtenemos tomando una referencia cartesiana rectangular con origen en A y tomando uno de los lados del triángulo a construir sobre el eje de abscisas.

$A(h): \quad x^2 + y^2 = h^2$ (donde $h = h_a$), $A(s): \quad x^2 + y^2 = s^2$, $I_a(t): \quad (x-s)^2 + (y-t)^2 = t^2$.

Centro interior de homotecia S_i de las circunferencias $A(h)$ y $I_a(t)$ es la intersección de la recta AI_a con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(s, 0)$ y $(0, h)$. Así:

$$S_i\left(\frac{hs}{h+t}, \frac{ht}{h+t}\right).$$

La ecuación conjunta de las tangentes desde S_i a las circunferencias $A(h)$ y $I_a(t)$ es:

$$(h^2+2ht+2t^2)x^2+(h^2+s^2+2ht+t^2)y^2-2stxy-2s(h^2+ht)x-2t(h^2+ht)y+h^2(s^2+t^2)=0.$$

Intersecando estas tangentes con los lados del ángulo en A, $y=0$ y $-2stx+(s^2-t^2)y=0$, se obtienen los puntos B_1 y C_1, B_2 y C_2:

$$B_{1,2}\left(\frac{h(s-t)(s+t)\left(\pm s\sqrt{(s^2-h(h+2t)}+ht+s^2+2t^2\right)}{(\mp 2t^3\mp ht^2\pm hs^2)\sqrt{(s^2-h(h+2t)}+2h^2st+hs^3+5hst^2+2st^3},\right.$$

$$\left.\frac{2hst\left(\pm s\sqrt{(s^2-h(h+2t)}+ht+s^2+2t^2\right)}{(\mp 2t^3\mp ht^2\pm hs^2)\sqrt{(s^2-h(h+2t)}+2h^2st+hs^3+5hst^2+2st^3}\right),$$

$$C_{1,2}\left(\frac{\pm\sqrt{t^2\left(s^2-h(h+2t)\right)}+s(h+t)}{h+2t},0\right),$$

Cuando t varía (α varía) el lugar geométrico que describen los puntos B_1 y B_2 es la cuártica:

$$4h^2s^4-8h^2s^3x+4h^2s^2x^2-8hs^4y+8hs^3xy+4hs^2x^2y-4hsx^3y+4s^4y^2+(h^2-4s^2)x^2y^2+4hs^2y^3-4hsxy^3+(h^2-4s^2)y^4=0.$$

Para obtener los vértices B para los cuales la altura h_b es máxima debemos encontrar los puntos de la cuártica, en los cuales la tangente es horizontal; es decir, los puntos donde la derivada respeto a "x" se anula:

$$4h^2s^3-4h^2s^2x-4hs^3y-4hs^2xy+6hsx^2y-h^2xy^2+4s^2xy^2+2hsy^3=0.$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones son engorrosas. Solamente tomando valores numéricos para h_a y s, pueden ser resueltas numéricamente. Descartando los casos en que los puntos son dobles. En la figura se muestra una solución.

NOTA. Usando estas ecuaciones y con los valores particulares tomados por Philippe Fondanaich, $h_a=5$ y $2s=23$ se obtiene el valor de $h_b=8.5419692784586$. Los vértices del triángulo ABC son:
$A(0,0), B(3.33970426425702, 8.5419692784586), C(5.1057442496643, 0)$