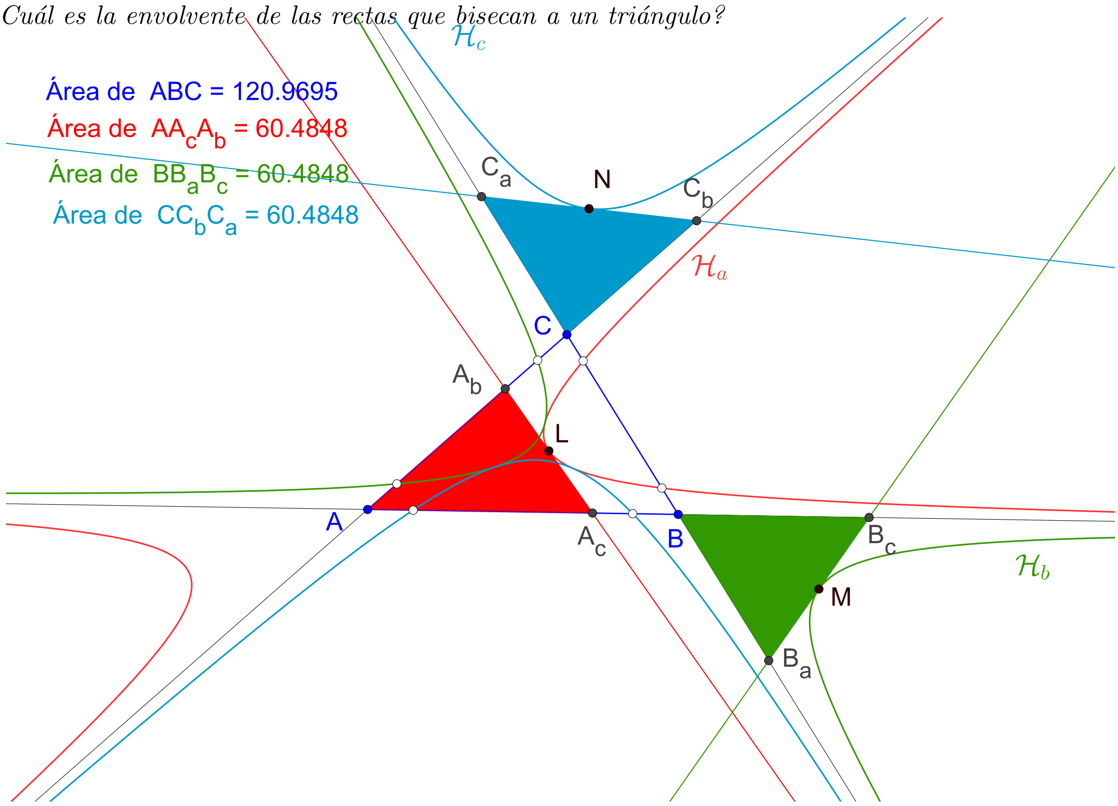
¿Cuál es la envolvente de las rectas que bisecan a un triángulo?

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **766**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña, con el siguiente enunciado:

¿Cuál es la envolvente de las rectas que bisecan a un triángulo?



Hoja dinámica GeoGebra

En coordenadas baricéntricas respecto al triángulo ABC, tomamos dos puntos $A_b(t : 0 : 1-t)$ y $A_c(s : 1-s : 0)$ sobre las rectas AC y AB, respectivamente.

El área del triángulo AA_cA_b es $(1-s-t+st)$ÁreaABC, por lo que el área de BCA_bA_c es $(s+t-st)$ÁreaABC. Estas cantidades son iguales si

$$s = \frac{2t-1}{2(t-1)}.$$

Para el que las coordenadas de A_c serán (1 - 2 t : 1 : 0). La ecuación de la recta A_bA_c es:

$$(t-1)x + (1-3t+2t^2)y + tz = 0.$$

La envolvente de estas rectas es la hipérbola $\mathcal{H}_a : x^2+y^2+z^2+2xy+2xz-6yz = 0$, de asíntotas los lados AB y AC y que pasa por el punto D que divide a la mediana AM_a en la razón $AD : DM_a = 1+\sqrt{2}$.

Similarmente, se obtienen las hipérbolas $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$.

Concluimos:

Las rectas tangentes a las hipérbolas $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, cuyos segmentos determinados por sus asíntotas estén el interior del triángulo ABC, lo bisecan.