Construir un triángulo ABC conociendo la diferencia de los lados adyacentes al vértice A y los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita relativa al vértice A.

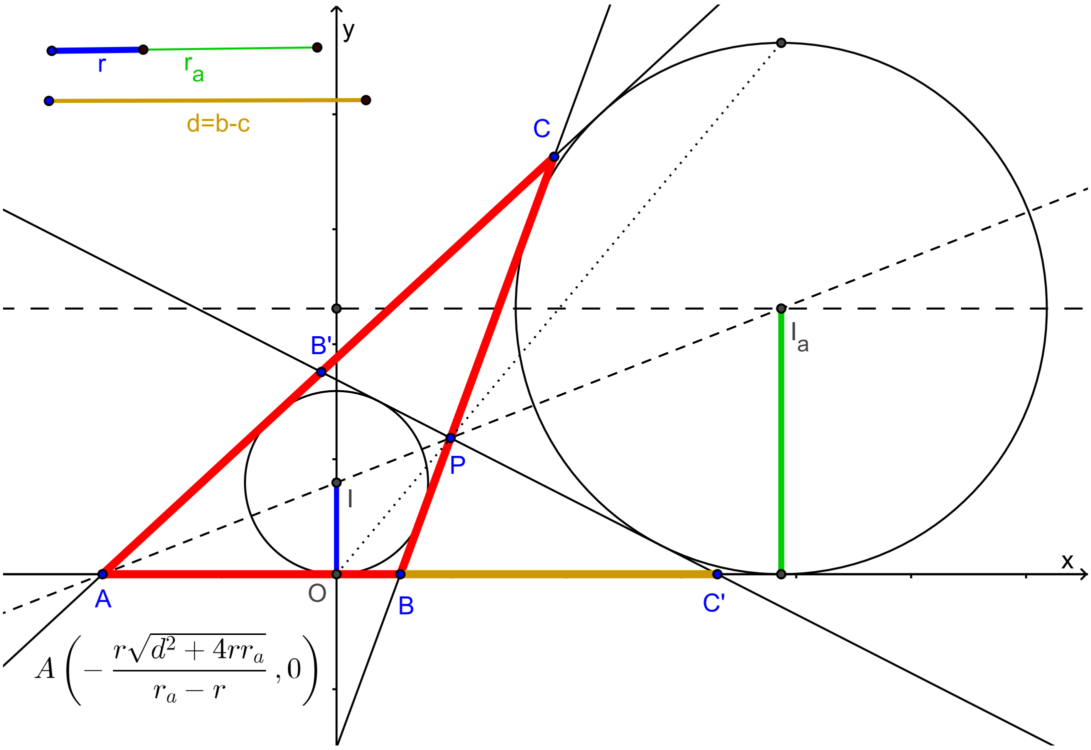
SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **808**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Construir un triángulo conociendo r, b-c, rA (radio de la circunferencia exinscrita relativa el vértice A.)

Santamaría, J. (2017)

Abordamos el problema usando coordenadas cartesianas con el fin de encontrar las coordenadas del vértice A del triángulo a construir, las cuales serán cantidades constructibles con recta y compás.



Hoja dinámica GeoGebra

Consideremos la circunferencia $I(r)$ de radio r, dado, con centro en el punto $I(0,r)$ y tangente al eje de abscisas en el origen O de coordenadas. Tomemos el vértices $A(t,0)$; los otros vértices B y C, del triángulo a construir, deben estar sobre las tangentes a $I(r)$ desde A (una de ellas es el eje de abscisas).

El centro I_a de la circunferencia exinscrita $I_a(r_a)$ es la intersección de la bisectriz AI con la recta paralela al eje de abscisas a una distancia r_a, dada.

Los pares de tangentes exteriores e interiores a las dos circunferencias $I(r)$ y $I_a(r_a)$ se intersecan en los centros de homotecia exterior A e interior P tal que $I_aP : PI = r_a : r$. Por lo que se tiene que

$$P\left(\frac{t(r-r_a)}{r+r_a}, \frac{2rr_a}{r+r_a}\right).$$

Las dos tangentes exteriores con cada una de las tangentes interiores determinan sendos triángulos ABC y $AB'C'$ (simétricos respecto a AI).

La ecuación conjunta de las tangentes a la circunferencia $I(r)$, $x^2+y^2-2ry=0$, desde P viene por:

$$4r^3r_ax^2+(r^2(r+r_a)^2-(r-r_a)^2t^2)y^2-2r(r-r_a)^2txy-4r^2(r-r_a)r_atx-2r(2r^3r_a+(2r-r_a)r_at^2+r^2(2r_a^2-t^2))y+4r^4r_a^2=0$$

Los puntos de intersección de estas tangentes con el eje OX tienen abscisas:

$$\frac{t(r-r_a)\pm\sqrt{t^2(r-r_a)^2-4r^3r_a}}{2r}$$

La diferencia de estas abscisas es $|b-c|$, que ha de ser igual a la cantidad d dada. Por los que

$$t = -\frac{r\sqrt{d^2+4rr_a}}{r_a - r}.$$

Esta cantidad es constructible con regla y compás.

CONSTRUCCIÓN

• Trazamos una circunferencia de radio r (dado) con centro en un punto I.
• Trazamos la tangente en un punto O de esta circunferencia.
• Elegimos uno de los puntos (que designamos por A) en los que esta tangente corta a la circunferencia de centro O y radio $\frac{r\sqrt{d^2+4rr_a}}{r_a-r}$, siendo $d = b - c$ una cantidad dada.
• En la semirrecta OI tomamos el punto de intersección con la circunferencia $O(r_a)$, de centro en O y radio r_a (dado), y por este punto trazamos la paralela a la tangente en O.
• Esta paralela corta a la recta AI en el punto I_a; por lo que ya podemos trazar la circunferencia $I_a(r_a)$.
• Construimos el punto P que divide al segmento II_a en la razón r_a/r.
• Finalmente, las tangentes desde P a $I(r)$ determinan con las tangentes desde A dos triángulos congruentes, que dan la solución al problema planteado.

Una construcción más sencilla:

Se utiliza que el segmento de tangente interior a las circunferencias inscrita y exinscrita del ángulo A que mide $b-c$.

Sobre una recta, que ha de contener a los vértices B y C del triángulo a construir, se sitúa el segmento de longitud $b-c$, dada, en ambos extremos se dibujan las circunferencias inscrita y exinscrita tangentes al segmento y en semiplanos distintos. El centro de homotecia exterior de las dos circunferencias es el vértice A. La tangente desde este vértice A, a una de las circunferencias son los lados del vértice A.