En un triángulo ABC cuyas medianas BM y CN son perpendiculares, cada uno de sus tres lados son también el lado de un cuadrado exterior al triángulo. Estos cuadrados están coloreados respectivamente, de azul, rosa y amarillo, dependiendo de si su base es BC, CA o AB. ¿Cuántos cuadrados azules se necesitan para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos?

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **815**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Érase una vez un triángulo ABC cuyas medianas BM y CN eran perpendiculares. Cada uno de sus tres lados era también el lado de un cuadrado exterior al triángulo. Estos cuadrados estaban coloreados respectivamente, de azul, rosa y amarillo, dependiendo de si su base era BC, CA o AB. ¿Cuántos cuadrados azules se necesitarán para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos?

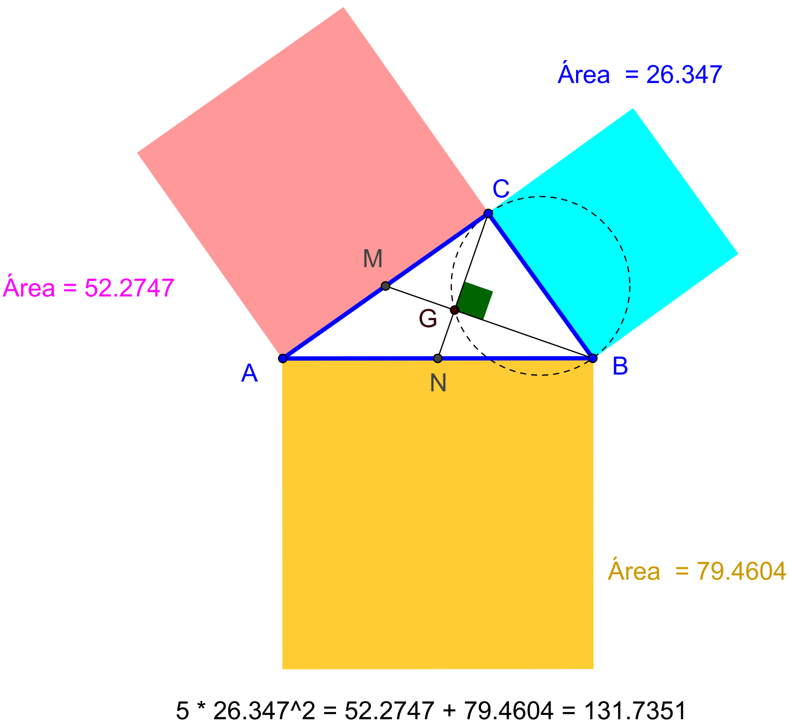
14.- Medianas multicolores

Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría (pag. 100)

Si las medianas BM y CN son perpendiculares, el baricentro de ABC ha de estar en la circunferencia de diámetro BC. La ecuación baricéntrica de esta circunferencia es:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + 1/2(a^2 - b^2 - c^2)x(x + y + z) = 0.$$

Las coordenadas del baricentro $G(1{:}1{:}1)$ satisfacen a esta ecuación si y solo si $5a^2 = b^2 + c^2$. Luego, se necesitan 5 cuadrados azules para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos.

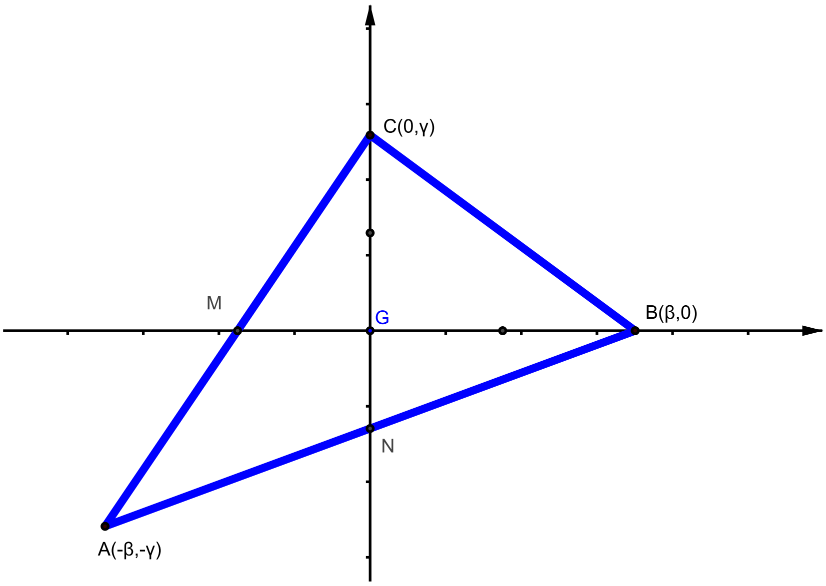


Usando coordenadas cartesianas

Tomamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangular, con origen en el baricentro G, $B(\beta, 0)$ y $C(0, \gamma)$. Entonces $M(-\beta/2, 0)$ y $N(0, -\gamma/2)$, con lo que el vértice $A(-\beta, -\gamma)$.

Se tiene que $\overline{BC}^2 = \beta^2 + \gamma^2, \overline{AB}^2 = 4\beta^2 + \gamma^2, \overline{AC}^2 = \beta^2 + 4\gamma^2$.

Luego, se necesitan 5 cuadrados azules para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos.


C(0,γ)
M
G
B(β,0)
N
A(-β,-γ)