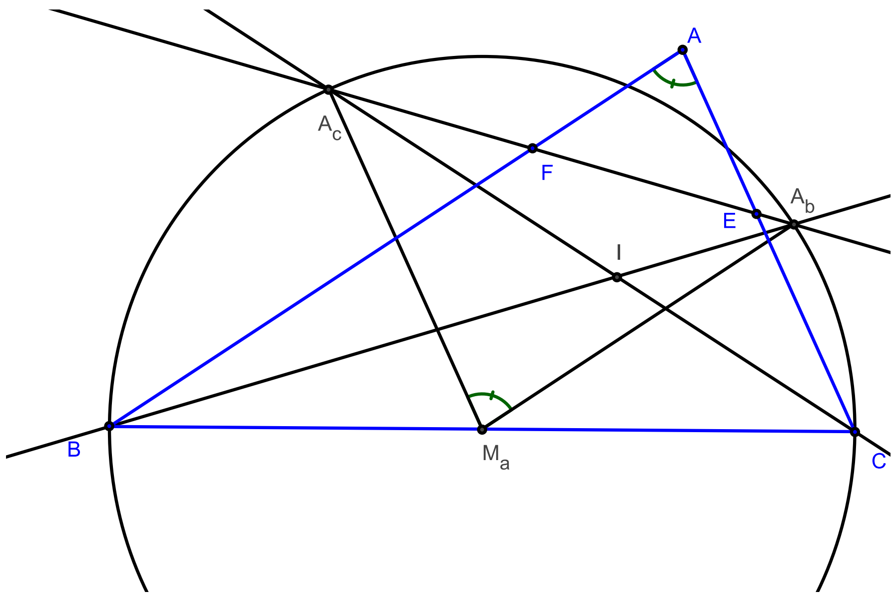
Sea ABC un triángulo, la circunferencia inscrita es tangente a los lados AB y AC en los puntos E y F, respectivamente. La recta EF corta a las bisectrices interiores en los vértices B y C en A_b y A_c, respectivamente.

Los puntos A_b y A_c están sobre la circunferencia de diámetro BC y la medida del arco A_bA_c es igual a la medida del ángulo en el vértice A.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{852}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB.
La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N, respectivamente.
La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y. Pruebe que la medida del arco XY es igual a la medida del ángulo APB



Hoja dinámica GeoGebra

En coordenadas baricéntricas, respecto a ABC, $E(-a-b+c:0:a-b-c)$ y $F(-a+b-c:a-b-c:0)$. Las bisectrices en B y C cortan a la recta EF en $A_b(a:-a+c:c)$ y $A_c(a:-a+c:c)$, respectivamente.

Los puntos A_b y A_c están sobre la la circunferencia de diámetro BC, de ecuación:

$$c^2xy+b^2xz+a^2yz+\frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)x(x+y+z)=0.$$

Si $M_a(0,1,1)$ es el punto medio de BC, la recta M_aA_b, $x-y+z=0$, y la recta del infinito, $x+y+z=0$, se intersecan en $(1,0,-1)$; que coincide con el punto del infinito de la recta AB. Así, ambas son paralelas.

Análogamente, las rectas M_aA_c, AC son paralelas.

En consecuencia, la medida del arco A_bA_c es igual a la medida del ángulo en el vértice A.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2557.pdf