Describir el transporte paralelo de un vector tangente a un meridiano a lo largo de un paralelo en la esfera.

SOLUCIÓN:
En la esfera unidad de centro en el origen de coordenadas, se considera la parametrización

$$\vec{\mathbf{x}}(\phi,\theta) = (\cos\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

Se trata de describir el transporte paralelo, a lo largo del paralelo $\theta = a$, del vector tangente al meridiano $\vec{v}$ en $(0, a)$ y de componentes $(1, 0)$, respecto a este sistema de coordenadas.
Los coeficientes de la 1ª forma fundamental (métrica sobre la esfera) son:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \vec{\mathbf{x}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{x}}_\phi = (-\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0)\cdot(-\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0) = \cos^2\theta,\\
g_{12} &= \vec{\mathbf{x}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{x}}_\theta = (-\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0)\cdot(-\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = 0,\\
g_{22} &= \vec{\mathbf{x}}_\theta \cdot \vec{\mathbf{x}}_\theta = (-\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\cdot(-\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = 1.
\end{aligned}$$

Y los símbolos de Christoffel: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{2} g^{kh}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h}\right) \qquad u^1 = \phi, u^2 = \theta$

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\operatorname{tag}\theta, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0$$

El paralelo $\theta = a$, $\alpha(\phi) = (\cos\phi\cos a, \operatorname{sen}\phi\cos a, \operatorname{sen} a)$, tiene por vector tangente $\alpha'(\phi) = (-\operatorname{sen}\phi\cos a, \cos\phi\cos a, 0)$, o sea, sus componentes son $(\frac{d\alpha^1}{d\phi}, \frac{d\alpha^2}{d\phi}) = (1, 0)$, respecto al la parametrización de la esfera considerada.

A) Las ecuaciones diferenciales que determinan el campo de vectores paralelo, de componentes (Y^1, Y^2) a lo largo de $\theta = a$, con las condiciones iniciales $Y^1(0) = 0, Y^2(0) = 1$, son

$$\frac{dY^k}{d\phi} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k Y^i \frac{d\alpha^j}{d\phi} = 0 \qquad (k = 1, 2) \qquad Y^1(0) = 0, Y^2(0) = 1.$$

O sea

$$\frac{dY^1}{d\phi} - \operatorname{tag} a\, Y^2 = 0, \qquad \frac{dY^2}{d\phi} + \operatorname{sen} a\cos a\, Y^1 = 0, \qquad Y^1(0) = 0, Y^2(0) = 1.$$

Este sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes tiene fácil resolución, sin más que considerar su matriz de coeficientes, hallar los valores propios y calcular su matriz de Jordán. La solución es:

$$Y^1(\phi) = \frac{\operatorname{sen}((\operatorname{sen} a)\phi)}{\cos a}, \qquad Y^2(\phi) = \cos((\operatorname{sen} a)\phi).$$

Si, como caso particular, queremos transporta el vector $\vec{v}$ a lo largo del paralelo $\theta = \pi/4$, después de una vuelta completa, resulta:

$$Y(2\pi) = (\frac{\operatorname{sen}((\operatorname{sen}\pi/4)2\pi)}{\cos\pi/4}, \cos((\operatorname{sen}\pi/4)2\pi) = (\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\pi, \cos\sqrt{2}\pi) = (-1.36316, -0.266255).$$

B) Si recurrimos a un método numérico para obtener soluciones del sistema anterior, por ejemplo con el comando `NDSolve` de Mathematica, el siguiente programa da las componentes del campo desplazado paralelamente

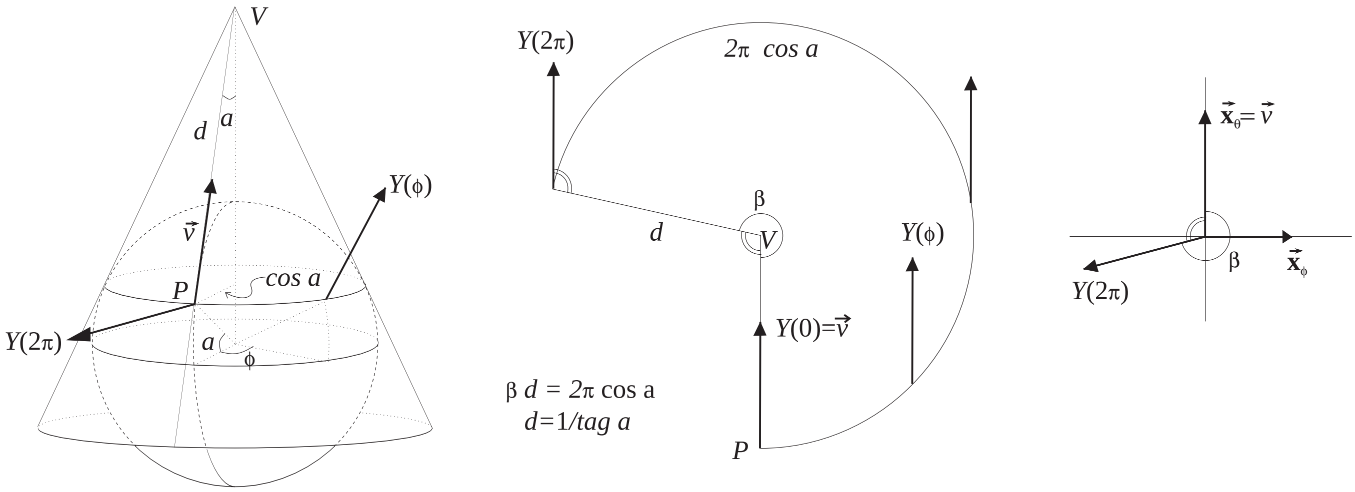
```
a=N[Pi/4]
c=N[2Pi]
sol[a_,c_]:=NDSolve[{x'[t]==Tan[a]y[t],
                y'[t]==-(1/2)Sin[2a]x[t],
                         x[0]==0,y[0]==1},{x,y},{t,0,c}]
{{H,F}}=Evaluate[{x[c],y[c]}/. sol[a,c]]
```

C) Para resolver este problema de una manera geométrica, hemos de tener presente los dos hechos siguientes:
1) La derivada covariante es la misma a lo largo de una curva intersección de dos superficies, en cuyos puntos los planos tangentes coinciden y

2) La derivada covariante se conserva por isometrías.

Así, en vez de considerar el desplazamiento paralelo a lo largo de un paralelo de la esfera lo hacemos sobre el cono circunscrito a la esfera a lo largo de dicha curva, y luego estudiamos el desplazamiento en la superficie que resulta de desarrollar dicho cono en el plano. Terminando deshaciendo los cambios, para volver a la esfera.

El resultado aparece descrito en el siguiente dibujo:



En el caso particular de considerar el paralelo $\theta = a = \pi/4$, el vector resultante después de dar una vuelta completa $Y_{2\pi} = A\vec{\mathbf{x}}_\phi + B\vec{\mathbf{x}}_\theta$, coincide con el obtenido por los dos métodos anteriores (en el diagrama anterior se observa que $\beta = 2\pi \operatorname{sen} a = \sqrt{2}\pi$):

$$\cos \widehat{Y_{2\pi}\vec{\mathbf{x}}_\phi} = \frac{Y_{2\pi}\cdot\vec{\mathbf{x}}_\phi}{\|Y_{2\pi}\|\|\vec{\mathbf{x}}_\phi\|} = \frac{Ag_{11}}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{A\cos^2 a}{\cos a} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad A = \sqrt{2}\cos\widehat{Y_{2\pi}\vec{\mathbf{x}}_\phi} = \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\pi - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\pi,$$

$$\cos \widehat{Y_{2\pi}\vec{\mathbf{x}}_\theta} = \frac{Y_{2\pi}\cdot\vec{\mathbf{x}}_\theta}{\|Y_{2\pi}\|\|\vec{\mathbf{x}}_\theta\|} = B \qquad \Longrightarrow \qquad B = \cos\widehat{Y_{2\pi}\vec{\mathbf{x}}_\theta} = \cos(2\pi - \sqrt{2}\pi) = \cos\sqrt{2}\pi.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtp2161.pdf