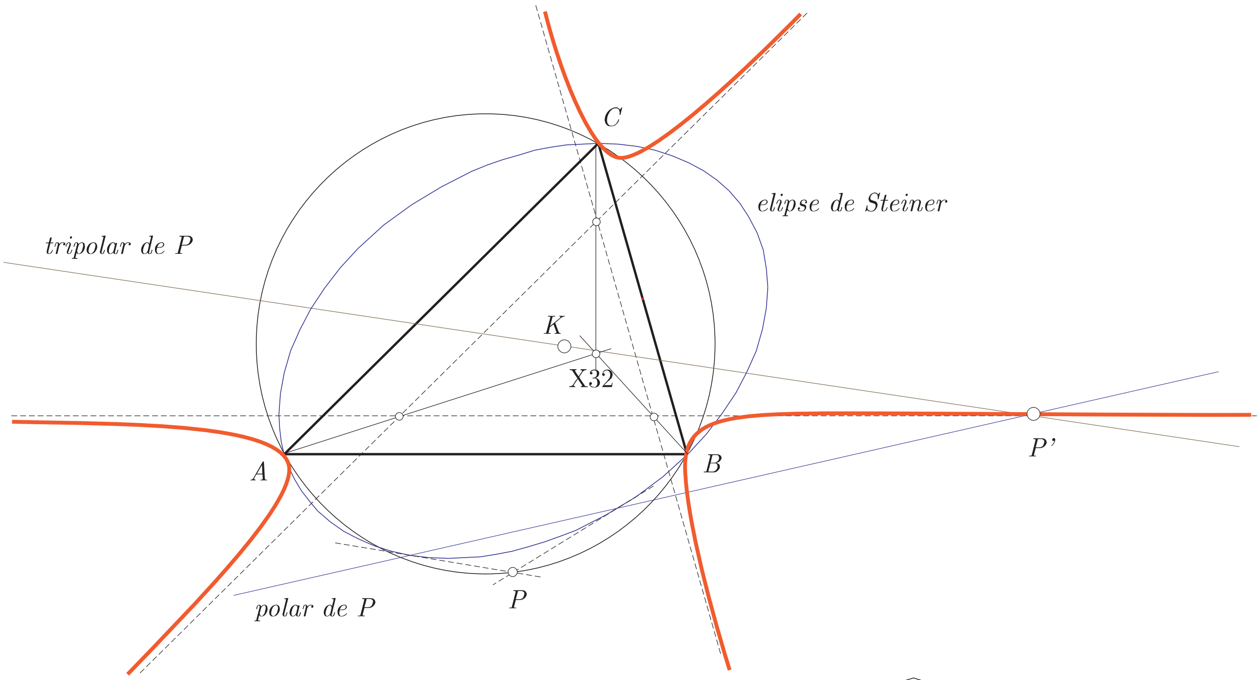
Si un punto P varía en la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, su polar trilineal y la polar respecto a la elipse circunscrita de Steiner, se cortan en los puntos de una cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$, con su punto doble en el simediano.

SOLUCIÓN:



Si $P(a^2/t : b^2/(1-t) : -c^2)$ es un punto sobre la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, la tripolar y su polar, respecto a la elipse circunscrita de Steiner $yz + zx + xy = 0$, son respectivamente:

$$\frac{tx}{a^2} + \frac{(1-t)x}{b^2} - \frac{z}{a^2} = 0, \qquad \left(-c^2 + \frac{b^2}{1-t}\right)x + \left(\frac{a^2 - c^2 t}{t}\right)y + \left(\frac{b^2}{1-t} + \frac{a^2}{t}\right)z = 0.$$

Su punto de intersección es:

$$P'\left(a^4(b^2 - c^2(t-1))(t-1) : b^4 t(a^2 + c^2 t) : -c^4 t(t-1)(a^2(t-1) + b^2 t)\right).$$

Al variar t el punto P' describe la cúbica:

$$x(c^4 y + b^4 z) + y(a^4 x + c^4 z) + z(b^4 x + a^4 y) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)xyz = 0.$$

Esta cúbica tiene un punto doble en el simediano (por lo que es unicursal), y sus asíntotas (paralelas a los lados de $\widehat{ABC}$) son:

$$(b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))x - a^4(y+z) = 0,$$
$$(c^4 + a^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))y - b^4(z+x) = 0,$$
$$(a^2 + b^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))z - c^4(x+y) = 0.$$

Se trata de una isocúbica unicurcal, de polo (a^4, b^4, c^4), raíz el baricentro y parámetro $k = -2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$, denotada por **cK**(#X6,X2)=**nK**(X32,X2,X6) en el catálogo de Bernard Gibert.

Las asíntotas se cortan dos a dos en puntos que forman un triángulo homotético con $\widehat{ABC}$, con centro de homotecia el polo de la isocúbica, X_{32} en la Enciclopedia de Kimberling, y razón

$$\frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Puntos particulares particulares en cúbicas:

• Si $P = X_{100}$ es el cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la cónica circunscrita de perspector el incentro, entonces la tangente en P a tal cónica y la tripolar de P se cortan en el punto X_{1023}:

$$\left(\frac{a(2a-b-c)}{b-c} : \frac{b(2b-c-a)}{c-a} : \frac{c(2c-a-b)}{a-b}\right).$$

• Si $P = X_{99}$ es el cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la elipse de Steiner, entonces la tangente en P a la elipse y la tripolar de P se cortan en el punto:

$$\left(\frac{b^2+c^2-2a^2}{b^2-c^2} : \frac{c^2+a^2-2b^2}{c^2-a^2} : \frac{a^2+b^2-2c^2}{a^2-b^2}\right).$$

• Si $P = X_{110}$ es el cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la cónica circunscrita de MacBeath, entonces la tangente en P a dicha cónica y la tripolar de P se cortan en el punto X_{2420}:

$$\left(\frac{a^2(2a^4-a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{b^2-c^2} : \frac{b^2(2b^4-b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2}{c^2-a^2} : \frac{c^2(2c^4-c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2}{a^2-b^2}\right).$$

• Si $P = X_{1304}$ es el cuarto punto de intersección de la circunferencia circunscrita y la cónica circunscrita de perspector el X_{112}, entonces la tangente en P a tal cónica y la tripolar de P se cortan en el punto X_{74}:

$$\left(\frac{a^2}{a^2S_A-2S_BS_C} : \frac{b^2}{b^2S_B-2S_CS_A} : \frac{c^2}{c^2S_C-2S_AS_B}\right).$$

GENERALIZACIÓN:

Si tomamos una cónica circunscrita de perspector $Q(p:q:r)$, se obtiene la isocúbica unicursal **cK**(#X6,Q):

$$px(c^4y+b^4z)+qy(a^4x+c^4z)+rz(b^4x+a^4y)-2(b^2c^2p+c^2a^2q+a^2b^2r)xyz=0.$$

Más en general, si tomamos dos cónicas circunscritas de perpsectores P y Q, la tripolar de un punto U sobre la cónica circunscrita de perspector P, pasa por P, e interseca a la polar de U, respecto a la cónica circunscrita de perspector Q, en U', sobre la cúbica unicursal de punto singular P y raíz Q, **cK**(#P,Q)=**nK**(Pˆ2,Q,P).

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2427.pdf