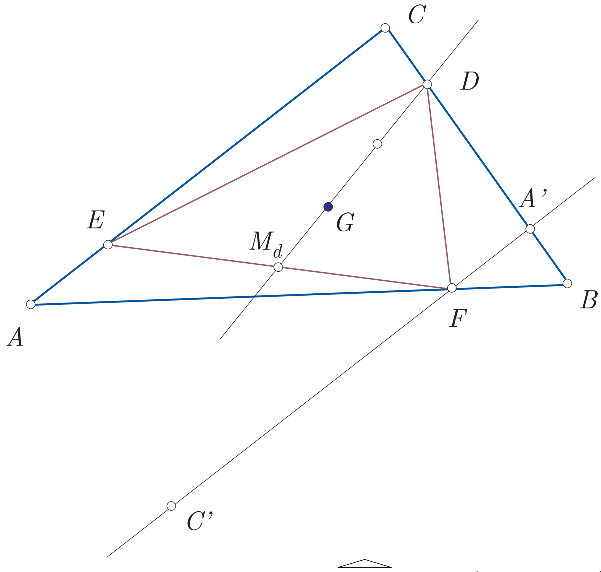
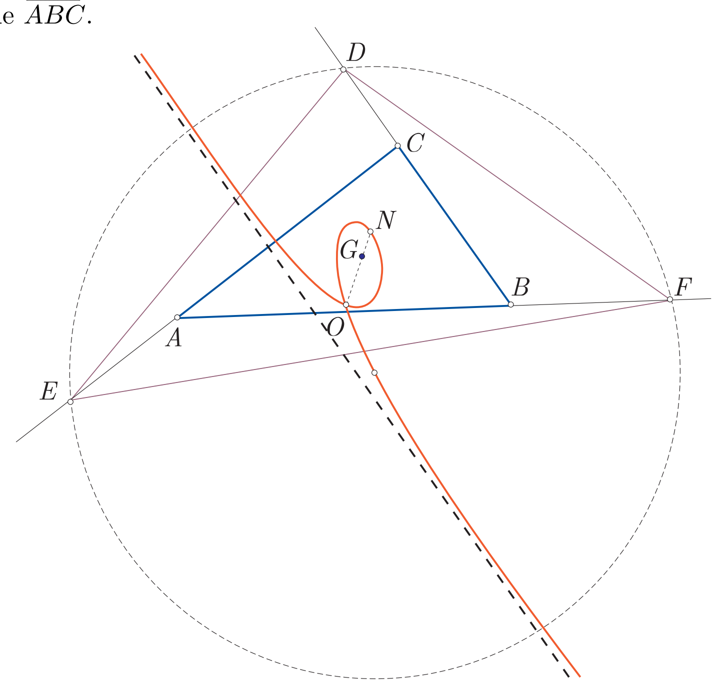
Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, el circuncentro de un triángulo $\widehat{DEF}$ variable inscrito en $\widehat{ABC}$ y con el mismos baricéntro que $\widehat{ABC}$, recorre una cúbica de punto doble en el circuncentro de $\widehat{ABC}$ y cuya dirección de su asíntota es la del punto Biham (X_{1499} en ETC). Si en vez de tomar los circuncentros, tomamos los simedianos, el punto del infinito de la correspondiente cúbica es el X_{523} (conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert).

SOLUCIÓN:



Usaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$. Si $D(0:t:1-t)$ es un punto sobre BC (que va a ser uno de los vértices del triángulo inscrito) el pie de su mediana por D es el punto $M_d(1:1-t:t)$. Por este punto ha de pasar el lado EF; por lo que si tomamos un punto variable E' sobre AC (candidato a ser vértice el triángulo inscrito a construir), el tercer vértice varía sobre la recta simétrica de AC respecto a M_d. Esta recta queda determinada por los simétricos de A y C respecto M_d, que son, respectivamente, $A'(0:1-t:t)$ y $C'(1:1-t:t-1)$. El vértice F es la intersección de la recta determinada por estos últimos puntos con el lado AB, es decir, $F(t:1-t:0)$. Finalmente, el vértice E es el simétrico de F respecto a M_d, esto es, $E(1-t:0:t)$.

Como las coordenadas [(1)] de los vértices de $\widehat{DEF}$ son absolutas (la suma de las componentes de cada una es uno), el baricentro de este triángulo se determinan sumándolas, componente a componente; lo que nos da $(1:1:1)$, que coincide con el baricentro de $\widehat{ABC}$.



[(1)] Las coordenadas $D(0:t:1-t), F(t:1-t:0), E(1-t:0:t)$ obtenidas, nos permiten afirmar (Wilhelm Fuhrmann, 1833-1904) que la razón en que D, E y F dividen a los segmentos BC, CA y AB es la misma, e igual a $(1-t)/t$.

El circuncentro de $\widehat{DEF}$ es:

$$O_t\Big((t-1)t\left((2t-1)S_B^2-S_CS_B+S_C^2(1-2t)\right)+S_A\left(S_C\left(t^3+2t^2-3t+1\right)-S_B\left(t^3-5t^2+4t-1\right)\right):$$

$$-t\left(2t^2-3t+1\right)S_A^2+\left(S_B\left(t^3+2t^2-3t+1\right)-S_C(t-1)t\right)S_A+S_C\left(S_Ct\left(2t^2-3t+1\right)-S_B\left(t^3-5t^2+4t-1\right)\right):$$

$$t\left(2t^2-3t+1\right)S_A^2+\left(-S_B(t-1)t-S_C\left(t^3-5t^2+4t-1\right)\right)S_A+S_B\left(S_Bt\left(-2t^2+3t-1\right)+S_C\left(t^3+2t^2-3t+1\right)\right)\Big).$$

Dividiendo pot t^3 y tomando límite, cuando $t\to\infty$, se obtiene el punto de Biham (X_{1499} de la Enciclopedia de Kimberling):

$$\left((c^2-b^3)(S_A-2a^2):(a^2-c^2)(S_B-2b^2):(b^2-a^2)(S_C-2c^2)\right).$$

La cúbica lugar del circuncentro de los triángulos $\widehat{DEF}$ tiene el punto doble en el circuncentro, X_3, de $\widehat{ABC}$, pues corresponde a los casos en que D coincide con B ó C. También contiene al circuncentro del triángulo medial, es decir, al centro de la circunferencia de los nueve puntos, X_5 (complemento de X_3). La tangente en X_5 a la cúbica es paralela a la asíntota, siendo la ecuación de ésta:

$$\left(7a^4+b^4+17b^2c^2+c^4-13a^2(b^2+c^2)\right)x+\left(7b^4+c^4+17c^2a^2+a^4-13b^2(c^2+a^2)\right)y+$$

$$+\left(7c^4+a^4+17a^2b^2+b^4-13c^2(a^2+b^2)\right)z=0.$$

Si en vez del circuncentro O_t, tomamos un punto de la recta de Euler del triángulo $\widehat{DEF}$, que divida al segmento GO_t en la razón k:

$$\Big(4S^2(1-3t+3t^2)-3k(a^2(a^2-b^2-c^2)-(4a^4-6a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2-c^4)t+(4a^4-11a^2b^2+b^4+4a^2c^2+b^2c^2-2c^4)t^2+$$
$$(b^2-c^2)(5a^2-b^2-c^2)t^3):$$
$$4S^2(1-3t+3t^2)-3k(-(b^2(a^2-b^2+c^2))+(a^4+a^2b^2-4b^4-a^2c^2+6b^2c^2)t-(2a^4-4a^2b^2-4b^4-a^2c^2+11b^2c^2-c^4)t^2+$$
$$(a^2-c^2)(a^2-5b^2+c^2)t^3):$$
$$4S^2(1-3t+3t^2)+3k(c^2(a^2+b^2-c^2)+(a^2b^2-b^4-6a^2c^2-b^2c^2+4c^4)t-(a^4+a^2b^2-2b^4-11a^2c^2+4b^2c^2+4c^4)t^2+$$
$$(a^2-b^2)(a^2+b^2-5c^2)t^3)\Big).$$

Punto que si $t\to\infty$, tiende al punto X_{1499}, para cualquier valor de k.

El simediano de $\widehat{DEF}$ es:

$$\Big(-S_A(t-1)t+S_B\left(-3t^3+8t^2-5t+1\right)+S_C\left(3t^3-t^2-2t+1\right):$$

$$-S_B(t-1)t+S_C\left(-3t^3+8t^2-5t+1\right)+S_A\left(3t^3-t^2-2t+1\right):$$

$$-S_C(t-1)t+S_A\left(-3t^3+8t^2-5t+1\right)+S_B\left(3t^3-t^2-2t+1\right)\Big).$$

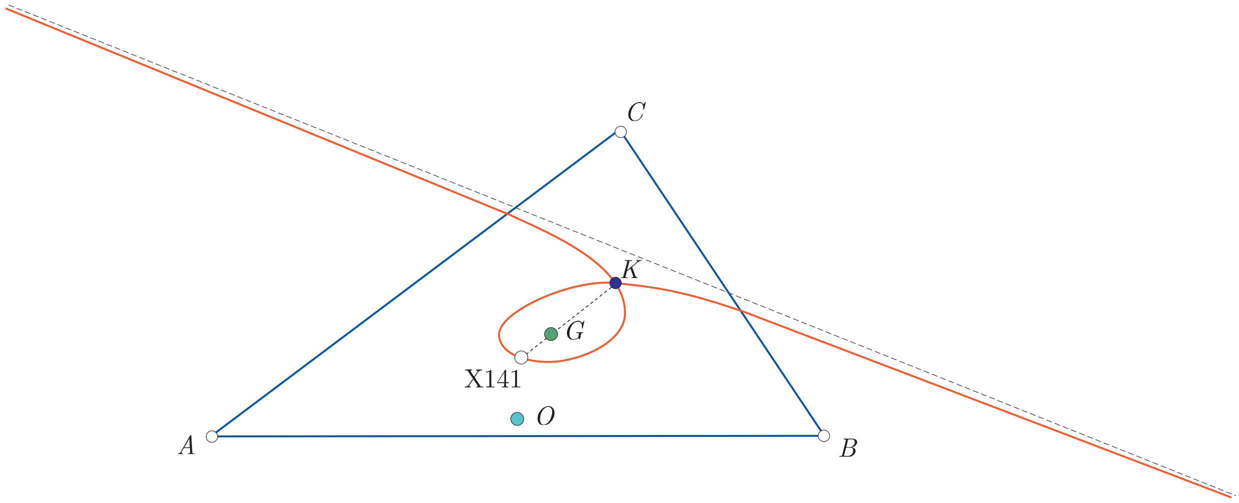
Punto que tiende, cuando $t\to\infty$, al centro X_{523}:

$$\left(b^2-c^2:c^2-a^2:a^2-b^2\right).$$

La asíntota a la cúbica es, en este caso:

$$(a^4-4a^2b^2+4b^4-4a^2c^2-b^2c^2+4c^4)x+(4a^4-4a^2b^2+b^4-a^2c^2-4b^2c^2+4c^4)y+(4a^4-a^2b^2+4b^4-4a^2c^2-4b^2c^2+c^4)z=0.$$

La cúbica contiene al complemento de simediano: el punto X_{141}.



NOTAS ADICIONALES:

Sean las circunferencias circunscritas a los triángulos $\widehat{AEF}$, $\widehat{BFD}$ y $\widehat{CDE}$ de ecuaciones respectivas:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(c^2ty + b^2(1-t)z) = 0,$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(c^2(1-t)x + a^2tz) = 0,$$

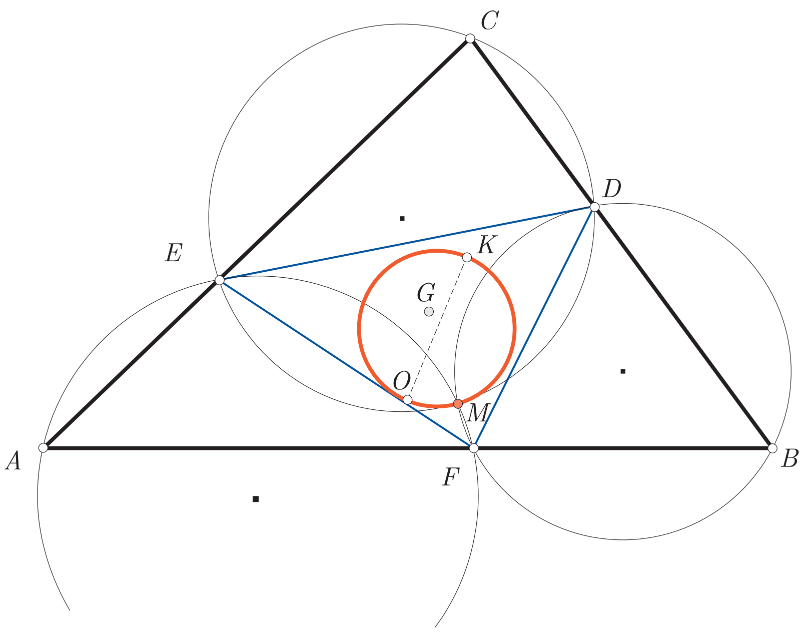
$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(b^2tx + a^2(1-t)y) = 0.$$

Las cuales concurren en el punto:

$$M\left(a^2(b^2(t-1)^2 + t(a^2(t-1) + c^2t)) : b^2(c^2(t-1)^2 + t(b^2(t-1) + a^2t)) : c^2(a^2(t-1)^2 + t(c^2(t-1) + b^2t)\right).$$

Eliminando t, se obtiene la circunferencia de Brocard [(2)]:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^4yz - b^4xz - c^4xy = 0.$$



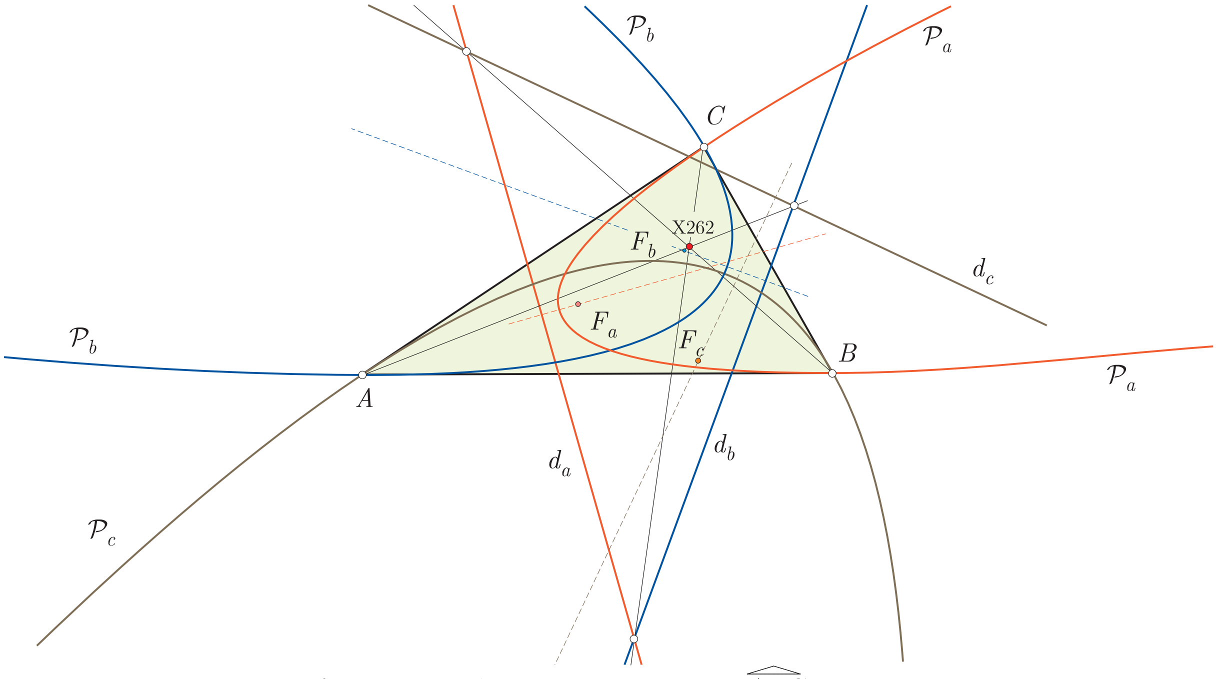
Los lados de los triángulos variables $\widehat{DEF}$, envuelven tres parábolas de ecuaciones:

$$\mathcal{P}_a:\ x^2 = 4yz, \qquad \mathcal{P}_b:\ y^2 - 4zx = 0, \qquad \mathcal{P}_c:\ z^2 - 4xy = 0,$$

(2) Nikolaos Dergiades. Hyacinthos, http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/18998

con directrices respectivas:

$$d_b : \; 2c^2x + (-a^2+b^2-c^2)y + 2a^2z = 0, \qquad d_c : \; 2b^2x + 2a^2y + (-a^2-b^2+c^2)z = 0.$$



Las tres directrices d_a, d_b y d_c forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto (X_{262} en ETC) conjugado isogonal del punto medio segmento de extremos en el circuncentro y simediano (diámetro de Brocard):

$$\left(\frac{1}{a^4 - a^2(b^2+c^2) - 2b^2c^2} : \frac{1}{b^4 - b^2(c^2+a^2) - 2c^2a^2} : \frac{1}{c^4 - c^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2} \right).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2436.pdf