Sea Γ la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$; por el vértice A se traza una recta que corta al lado BC en M. Consideremos las circunferencias Γ_1 y Γ_2 con centros en Ω_1 y Ω_2 y radios ρ_1 y ρ_2 que son tangentes internamente cada una de ellas a Γ, al lado BC y a recta AM. Si 2θ el ángulo $\widehat{AMC}$ y r e I son el radio y centro de la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$, probar que:

(1) La recta que une a Ω_1 y Ω_2 contiene también a I.

(2) El punto I divide al segmento en $\Omega_1\Omega_2$ en la razón $\text{tag}^2\,\theta : 1$.

(3) $r = \rho_1 \cos^2\theta + \rho_2 \,\text{sen}^2\,\theta$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **600a**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Por el vértice A de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado BC en M. Sea 2θ el ángulo AMC; O e I los centros de la circunferencia circunscrita (O)y de la inscrita (I) de ABC. Las circunferencias (ω_1) y (ω_2) con centros en ω_1 y ω_2 y radios $\rho_1\,\rho_2$ son tangentes cada una de ellas a (O), y la primera es tangente también a los dos lados del ángulo AMC, mientras que la segunda es tangente a los dos lados del ángulo AMB. Probar que : (1) La recta que une a ω_1 y ω_2 contiene también a I. (2) El punto I divide al segmento en $\omega_1\omega_2$ en la razón tan$^2\theta : 1$ y $r = \rho_1\cos^2\theta + \rho_2\,\text{sen}^2\,\theta$.*
>
> *Thébault, V. (1938): The American Mathematical Monthly. Vol 45. N. 7 pag 482-483.*

—— - ——

Para construir las circunferencias tangentes a la circunferencia circunscrita del triángulo $\widehat{ABC}$, a la recta BC y a una recta que pasa por A, podemos utilizar tres parábolas, asociadas al triángulo, que vamos a describir a continuación.

Consideremos la parábola $\mathcal{P}_a$ de foco el vértice A y directriz el lado opuesto BC[(1)].
Denotemos por $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_-$ las parábolas de foco el circuncentro O, con eje la mediatriz de BC y que pasan por los vértices B y C.

Los centros de las circunferencias que queremos construir, si la recta por el vértice A pasa por un punto M de la recta BC, están en[(2)]:

Los puntos donde las tangentes desde M a la parábola $\mathcal{P}_a$ cortan a las parábolas $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_-$.

Al ser tangentes estas circunferencias a la recta BC se pueden construir.

Para tratar de comprobar las fórmulas del enunciado, utilizando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$, debemos obtener las ecuaciones de las parábolas descritas, mediante haces de cónicas.

La parábola $\mathcal{P}_a$ es una del haz de parábolas con tangente en el vértice, de cada una de ellas, la recta $x-y-z=0$, paralela a BC por el punto medio de la altura desde A y con eje esta altura[(3)]:

$$(-S_By + S_Cz)^2 + \lambda(x-y-z)(x+y+z) = 0.$$

El foco de cada una de estas parábolas es:

$$\left(a^2(S^2-\lambda) : S_C(S^2+\lambda) : S_B(S^2+\lambda)\right).$$

Este punto coincide con el vértice $A(1:0:0)$ para el valor de $\lambda = -S^2$ y la ecuación de la parábola es:

$$\mathcal{P}_a :\; -S^2x^2 + a^2(c^2y^2 + 2S_Ayz + b^2z^2) = 0.$$

---

(1) P. Yiu.- Introduction to the Geometry of the Triangle. §12.3 Parabolas with vertices of a triangle as foci and sides as directrices. Exercises: 1. Find the equation of the a-parabola (of focus A and of directrix BC):

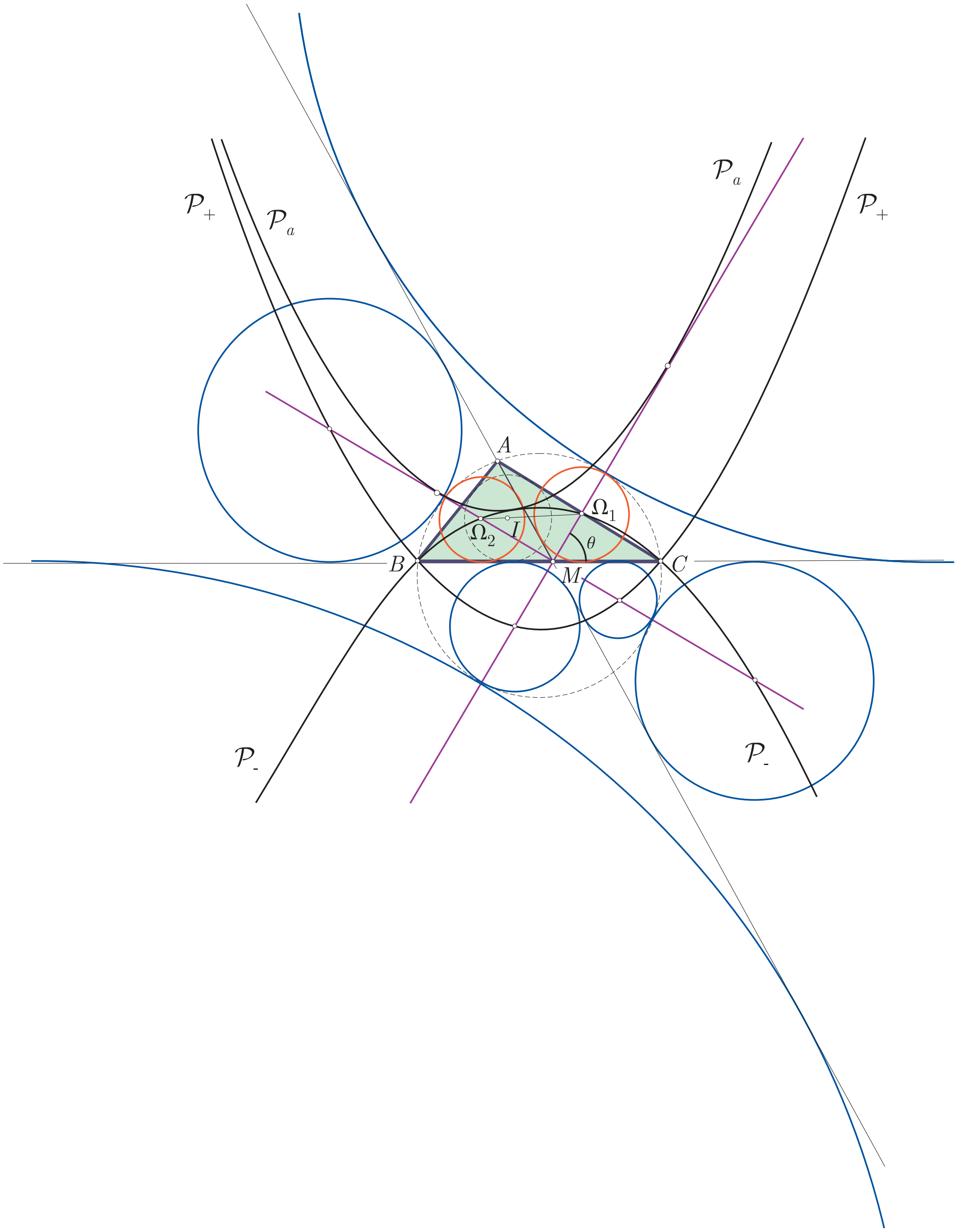
$$-S^2x^2 + a^2(c^2y^2 + 2S_Ayz + b^2z^2) = 0.$$

(2) Información sobre este resultado ha sido solicita en el Foro de Hyacinthos:
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/19849

(3) Adoptamos, como es habitual en la geometría del triángulo, notaciones como: $s = (a+b+c)/2$, $S = 2\Delta$ (doble del área de $\widehat{ABC}$) $S_A = (b^2+c^2-a^2)/2$, ...

Para obtener las ecuaciones de las parábolas $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_-$, utilizamos que ellas forman parte del haz de cónicas al que pertenecen dos cónicas degeneradas; una, el producto de la recta BC y la recta del infinito, y, la otra, el producto de las rectas perpendiculares a BC en B y C:

$$(S_C x + a^2 y)(S_B x + a^2 z) + \lambda x(x + y + z) = 0.$$



El foco de cada una de estas parábolas es:

$$\left(a^2(-a^4S^2 + \lambda^2) : a^4S^2S_C + 2a^2S^2\lambda - S_C\lambda^2 : a^4S^2S_B + 2a^2S^2\lambda - S_B\lambda^2\right).$$

Este punto coincide con el circuncentro $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ para los valores de λ:

$$\lambda_+ = 2a^2s(s-a), \qquad \lambda_- = -2a^2(s-b)(s-c).$$

Las correspondientes parábolas, con su concavidad hacia el semiplano que contiene a A, respecto a BC, y hacia el opuesto, respectivamente, son[4]:

$$\mathcal{P}_+ :\ (a^4-(b+c)^2(2a^2-(b-c)^2))x^2-4a^4yz-4a^2b(b+c)zx-4a^2c(b+c)xy=0,$$
$$\mathcal{P}_- :\ (a^4-(b-c)^2(2a^2-(b+c)^2))x^2-4a^4yz-4a^2b(b-c)zx+4a^2c(b-c)xy=0.$$

Con el fin de determinar los centros y radios de las circunferencias que nos ocupan, no procederemos hallando las tangentes desde un punto M sobre BC a la parábola $\mathcal{P}_a$ y, luego, sus intersecciones con la parábola $\mathcal{P}_-$, sino que tomamos un punto genérico Ω_1 de la parábola $\mathcal{P}_-$, que puede ser el de intersección de la recta paralela a su eje, por el punto $T_1(0:1-t:t)$, que tiene por ecuación:

$$(S_B-a^2t)x-a^2ty+a^2(1-t)z=0.$$

Por lo que las coordenadas de Ω_1, intersección de esta recta con la parábola $\mathcal{P}_-$, son:

$$\Omega_1\Big(a^2(1-t)t:(1-t)(bc-S_A-S_Ct):(c(b-c)+S_Bt)t\Big).$$

El punto en el que la recta $I\Omega_1$ vuelve a cortar a la parábola $\mathcal{P}_-$ en Ω_2:

$$\Big(2a^2(c-st)(s-b-st):(b-s+st)(aS_A-bS_B+cS_C-abc+2s(S_B+a(b-c))t):2(c-st)(ac(s-b)-s(S_C-a(b-c))t)\Big).$$

Las proyecciones de los puntos Ω_1 y Ω_2 sobre el lado BC (puntos de tangencia con las circunferencias Γ_1 y Γ_2) son:

$$T_1(0:1-t:t),\qquad T_2\left(0:(s-c)(b-s+st):(s-b)(-c+st)\right).$$

La circunferencia de centro Ω_1 tangente a BC y a la circunferencia circunscrita es:

$$\boxed{\Gamma_1 :\ a^2yz+b^2zx+c^2xy-(x+y+z)\left(\left(c^2-2c(b+c)t+(b+c)^2t^2\right)x+a^2t^2y+a^2(t-1)^2z\right)=0} \tag{1}$$

La tangente a esta circunferencia desde A, que corta al segmento BC es:

$$(c-st)ty+(1-t)(b-s+st)z=0.$$

Y el punto M[5] de corte con BC es, para $0\le t\le\frac{s-b}{s}$ ó $\frac{c}{s}\le t\le 1$ (para que la segunda y tercera componentes de sus coordenadas sean simultáneamente positivas o negativas):

$$M\big(0:(1-t)(b-s+st):(-c+st)t\big).$$

Para $t=(s-b)/s$, M coincide con C; y para $t=c/s$, con B. Para $(s-b)/s<t<c/s$, las tangentes desde A a la circunferencia Γ_1 cortan a la recta BC fuera del segmento BC.

Cuando M coincide con B la circunferencia Γ_1 que se obtiene es el "mixtilinear incircle"[6] relativo al vértice B; es decir, la circunferencia tangente a los lados BA y BC e internamente a la circunferencia circunscrita.

La razón en la que el incentro I divide al segmento $\Omega_1\Omega_2$ (o su proyección sobre BC, al segmento T_1T_2) es:

$$\frac{s(b-s+at)^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

---

[4] Para construir estas parábolas podemos utilizar que sus directrices son las rectas paralelas a BC y cuya distancia a ésta es igual al radio de la circunferencia circunscrita, o bien, que las tangentes en B y C se cortan en los puntos de la circunferencia circunscrita que están en las bisectrices interior o exterior en A.

[5] La recta AM pasa por el centro interior de homotecia de las circunferencias $\Gamma_!$ y Γ_2.

[6] L. Bankoff has coined the term "mixtilinear incircles" of a triangle for the three circles each tangent to two sides and to the circumcircle internally.

L. Bankoff.- Mixtilinear Adventure. *Crux Math.* 9(1983) 2–7.

Paul Yiu.- Mixtilinear Incircles. *American Mathematical Monthly*, 106 (1999) N. 10, 952–955.

Philip Todd.- Mixtilinear incircles and excircles. *The Journal of Symbolic Geometry*, 1(2006), 20–23.

KhoaLu Nguyen and JuanCarlos Salazar.- On mixtilinear incircles and excircles. *Forum Geometricorum*, 6(2006),1–16.

Alexander Bogomolny.- Radius and construction of a mixtilinear circle.
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/MixtilinearConstruction.shtml#Yiu1.

Vamos a ver que este valor coincide con $\tan^2\theta$, siendo $2\theta = \widehat{AMC}$; en efecto:

Por la fórmula del coseno, se tiene que $b^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{AM}^2\overline{MC}^2 \cos 2\theta$. Siendo

$$\overline{AM} = \frac{c(s-b) - 2s(s-b)t + ast^2}{b-s+at}, \qquad \overline{MC} = \frac{a(1-t)(s-b+st)}{b-s+at},$$

se obtiene:

$$\cos 2\theta = \frac{S_B(s-b) - 2ast(s-b) + a^2st^2}{ac(s-b) - 2ast(s-b) + a^2st^2}.$$

$$\cos^2\theta = \frac{(s-a)(s-c)(s-b)}{a(c(s-b) - (S_B+ac)t + ast^2)}, \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{s(b-s+at)^2}{a(c(s-b) - (S_B+ac)t + ast^2)}.$$

Los radios de las circunferencias Γ_1 y Γ_2, $\rho_1 = \overline{T_1\Omega_1}$ y $\rho_2 = \overline{T_2\Omega_2}$, son:

$$\rho_1 = \frac{ast(1-t)}{(s-b)(s-c)}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)(s-b)}{s}},$$

$$\rho_2 = \frac{a(-c+st)(b-s+st)}{s(b-s+at)^2}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)(s-b)}{s}}.$$

Para establecer la fórmula $r = \rho_1\cos^2\theta + \rho_2\operatorname{sen}^2\theta$, sólo deber tener en cuenta que y $sr^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$.

Una situación particular es cuando M coincide con el punto de contacto $(0 : s-b : s-c)$ de la circunferencia A-exinscrita con BC, que corresponde al punto $T_1(0 : 1-t : t)$ para

$$t = \frac{as + \sqrt{as(a(s-a) + (b-c)^2)}}{2as}.$$

En este caso $r = \rho_1 = \rho_2$.

NOTAS que surgen de los objetos geométricos descritos en este trabajo.

• <u>Ángulo $\widehat{AMC}$</u>

Una tangente a la parábola $\mathcal{P}_a$ desde un punto M es la bisectriz del ángulo formada por la directriz, BC, y la recta que une M con su foco, A. En consecuencia, $\theta = \widehat{\Omega_1 MC} = \widehat{AMC}/2$.

• <u>"Mixtilinear incircles and excircles"</u>

Cuando $M = B$, $t = c/s$ y la ecuación de "B-mixtilinear incircles" es, sustituyendo en (1):

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - \frac{1}{(a+b+c)^2}(x+y+z)(c^2(b+c-a)^2x + 4a^2c^2y + a^2(a+b-c)^2z) = 0.$$

Por permutación cíclica en esta ecuación, se obtiene la de "C-mixtilinear incircles", que resulta de poner en (1), $t = (s-b)/s$:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - \frac{1}{(a+b+c)^2}(x+y+z)(b^2(b+c-a)^2x + a^2(c+a-b)^2y + 4b^2a^2z) = 0.$$

La ecuación de "A-mixtilinear incircles" es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - \frac{1}{(a+b+c)^2}(x+y+z)(4c^2b^2x + c^2(c+a-b)^2y + b^2(a+b-c)^2z) = 0.$$

El centro de esta última circunferencia es el punto:

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{aS_A-bS_B-cS_C}{2bc}:b:c\right).$$

Y su radio es:

$$\rho=\frac{2bc}{a+b+c}\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(a+b+c)}}$$

Como $\cos^2(A/2)=((b+c-a)(a+b+c))/(4bc)$ se tiene la fórmula dada por L. Bankoff[7]:

$$r=\rho\cos^2\frac{A}{2}.$$

Si el punto $T_1(0:1-t:t)$ lo tomamos fuera del segmento BC (es decir, $(s-c)/(s-a)<t<0$ ó $1<t<s/(s-a)$), la recta por él y perpendicular a BC corta a la parábola $\mathcal{P}_-$ en el punto Ω_{1a} (con la misma expresión que Ω_1):

$$\Omega_{1a}\Big(a^2(1-t)t:(1-t)(bc-S_A-S_Ct):(c(b-c)+S_Bt)t\Big).$$

Entonces, si I_a es el centro de la circunferencia A-exinscrita, el punto de la parábola $\mathcal{P}_-$ que está en la recta $\Omega_{1a}I_a$ es Ω_{2a}:

$$\Omega_{2a}\Big(2a^2(s-c+(s-a)t)(c-(s-a)t):$$
$$(s-c+(s-a)t)(-a^2(s-b)-b^2(s-a)-abc+c^2s-2(s-a)(S_B-a(b-c))t):$$
$$2(-c+(s-a)t)(a(s-c)c-(s-a)(S_C+a(b-c))t)\Big).$$

Los puntos Ω_{1a} y Ω_{2a} son los centros de las circunferencias Γ_{1a} y Γ_{2a}, en el semiplano que no contiene a A, tangentes a Γ exteriormente, a AM y a BC, están alineados con el centro I_a de la circunferencia A-exinscrita. Si Ω_{1a} es el centro sobre $M\Omega_1$ y Ω_{2a} es el centro sobre $M\Omega_2$, la razón en la que I_a divide al segmento $\Omega_{1a}\Omega_{2a}$ es la misma que $\Omega_1I:I\Omega_2$. Los radios de ambas circunferencias coinciden con r_a (radio de la circunferencia A-exinscrita) si M es el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Se tiene la relación:

$$r_a=\rho_{1a}\cos^2\theta+\rho_{2a}\operatorname{sen}^2\theta.$$

Cuando $t=(s-c)/(s-a)$, M coincide con C y Γ_{1a} es el "C-mixtilinear excircle", cuya ecuación es, sustituyendo en (1):

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{(b+c-a)^2}(x+y+z)\left(b^2(a+b+c)^2x+a^2(a+b-c)^2y+4a^2b^2z\right)=0.$$

• <u>Las otras cuatro circunferencias</u>

En las cuatro circunferencias restantes con centros sobre la parábola $\mathcal{P}_+$ (tangentes a la circunferencia circunscrita y las rectas BC y AM), la recta que pasa por los centros de las dos situadas en el mismo semiplano que A, respecto a BC y la recta que une los centros de las otras dos, se cortan sobre la recta perpendicular a BC por el pie de la bisectriz exterior en A[8].

En el caso particular en que M sea $(0:b:c)$ (pie de la bisectriz interior en A), tales rectas se cortan en $(0:b:-c)$ BC (pie de la bisectriz exterior en A).

Enunciado de otra forma:

Sean las dos circunferencias tangentes al lado BC, a la bisectriz en A y a la circunferencia circunscrita, en el arco BC que no contiene a A. La recta que une sus centros corta a BC en el pie de la bisectriz exterior en el vértice A[9].

Los centros de estas circunferencias son:

$$\left(a^2bc:-b(bc(b+c)+2(s-a)\sqrt{bcs(s-a)}):-c(bc(b+c)+2s\sqrt{bcs(s-a)})\right),$$

$$\left(a^2bc:-b(bc(b+c)+2s\sqrt{bcs(s-a)}):-c(bc(b+c)+2(s-a)\sqrt{bcs(s-a)})\right).$$

Y sus ecuaciones son, respectivamente:

---

[7] L. Bankoff.- Mixtilinear Adventure. *Crux Math.* 9(1983) 2–7.

[8] Las perpendiculares a cada lado de $\widehat{ABC}$, en el correspondiente pie de la bisectriz exterior en el vértice opuesto, forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en X_{104} (punto de intersección, distinto de A, B y C, de la circunferencia circunscrita con la hipérbola de Feuerbach).

[9] La recta que une los centros de estas circunferencias y la que pasa por sus puntos de contacto con la circunferencia circunscrita, se cortan en el centro de homotecia exterior de ambas circunferencias.

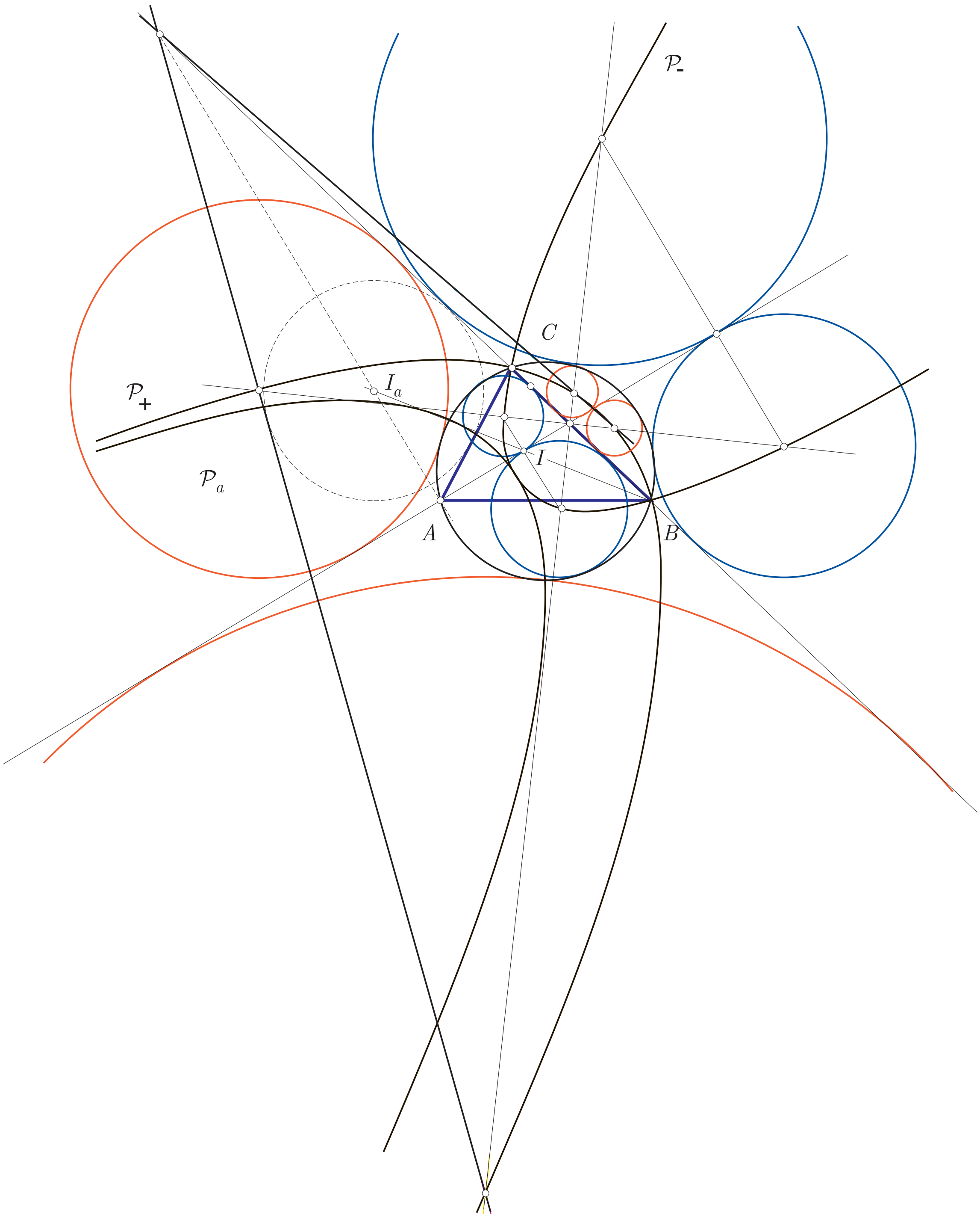
Paul Yiu.- Mixtilinear Incircles. *American Mathematical Monthly*, 106 (1999) N. 10, 952–955. Lemma 3.

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy+\frac{2(x+y+z)}{(2a(b-c)(b+c)^2-a^2(b^2-6bc+c^2)-(b+c)^2(b^2+6bc+c^2)-16((b+c)s-ab)\sqrt{bcs(s-a)})}\Big($$

$$bc(b+c)^2\left(S_A+3bc+4\sqrt{bcs(s-a)}\right)x+2a^2cs\left(b(s-a)+cs+2\sqrt{bcs(s-a)}\right)y+2a^2b(s-a)\left(b(s-a)+cs+2\sqrt{bcs(s-a)}\right)z\Big)=0,$$

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy-\frac{2(x+y+z)}{2a(b-c)(b+c)^2+a^2(b^2-6bc+c^2)+(b+c)^2(b^2+6bc+c^2)+16((s-a)c+bs)\sqrt{bcs(s-a)}}\Big($$

$$bc(b+c)^2(SA+3bc+4\sqrt{bcs(s-a)})x+2a^2(s-a)c((s-a)c+bs+2\sqrt{bcs(s-a)})y+2a^2bs((s-a)c+bs+2\sqrt{bcs(s-a)})z\Big)=0.$$

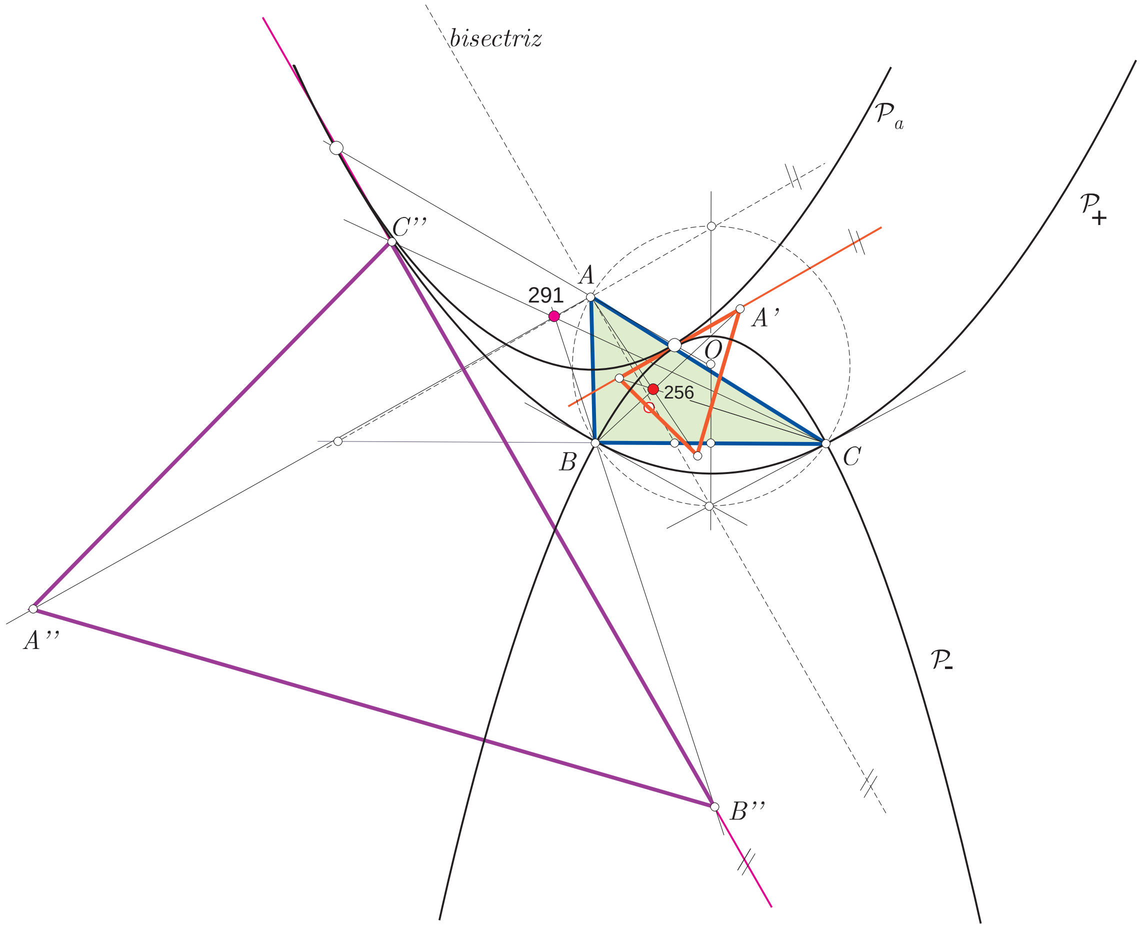


- <u>Puntos de Sharygin</u>

Las parábolas $\mathcal{P}_-$ y $\mathcal{P}_a$ son tangentes en un punto, $(a^2bc : b^2S_B : c^2S_c)$, común de la recta AO y la tangente en él es la mediatriz de la bisectriz en A, $-bcx+c^2y+b^2z=0$. Así, si se procede cíclicamente sobre los vértices del triángulo

$\widehat{ABC}$, obteniéndose las correspondientes parábolas, las tres tangentes comunes determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en X_{256} (primer punto de Sharygin[10]):

$$\left(\frac{a}{a^2+bc} : \frac{b}{b^2+ca} : \frac{c}{c^2+ab}\right).$$



Así mismo, las parábolas $\mathcal{P}_+$ y $\mathcal{P}_a$ son tangentes en un punto, $(-a^2bc : b^2S_B : c^2S_c)$, común de la recta AO y la tangente en él es la mediatriz de la bisectriz externa en A, $bcx+c^2y+b^2z=0$. Las tres tangentes comunes, procediendo cíclicamente, determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en X_{291} (segundo punto de Sharygin):

$$\left(\frac{a}{a^2-bc} : \frac{b}{b^2-ca} : \frac{c}{c^2-ab}\right).$$

- <u>Una propiedad de la parábola $\mathcal{P}_a$</u>

Las bisectrices BI y CI son tangentes a la la parábola $\mathcal{P}_a$ y la recta que une sus puntos de tangencia (polar de I), pasa por el pie de la bisectriz exterior en A y tiene de ecuación:

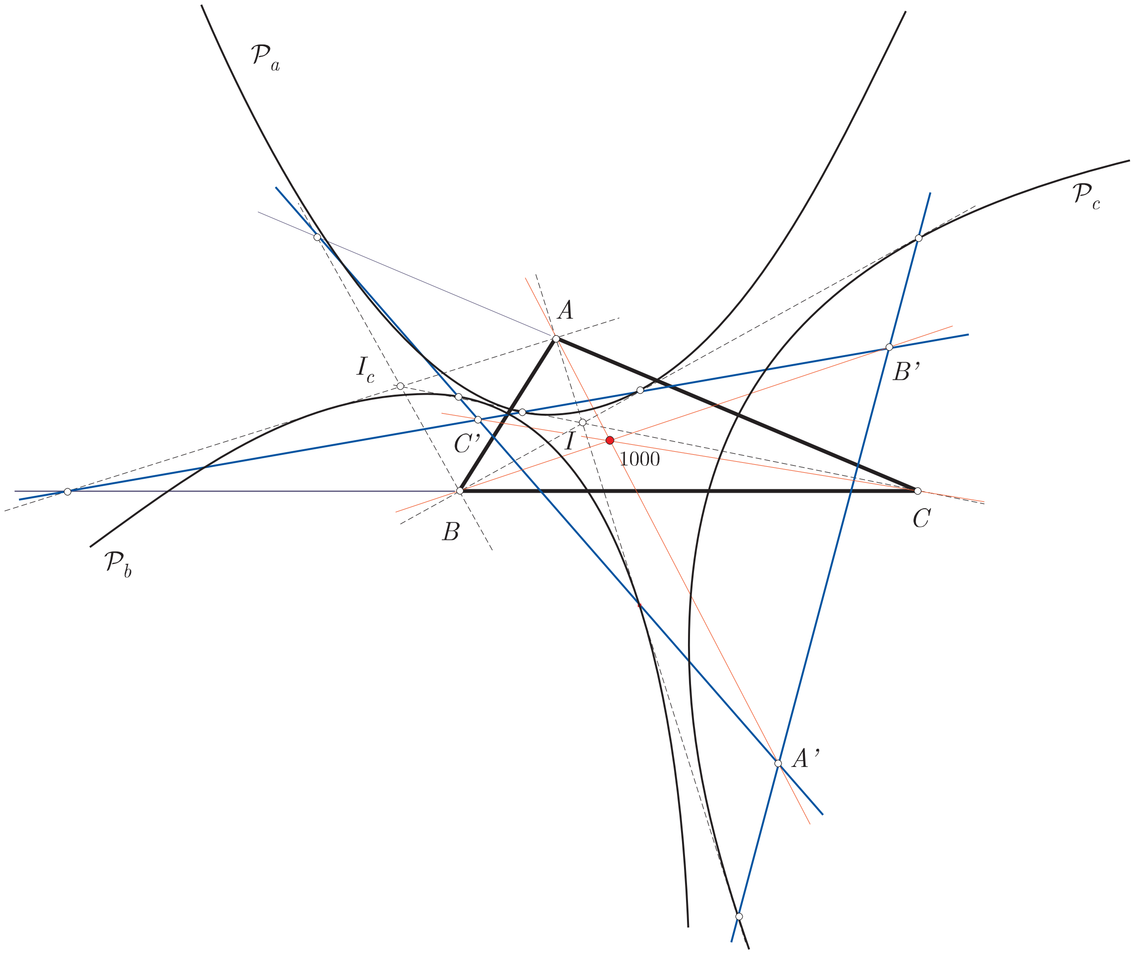
$$-2(s-c)(s-b)x+acy+abz=0.$$

Si procedemos cíclicamente, tomamos las parábolas de focos en B y C y directrices CA y AB, respectivamente, y consideramos las polares de I respecto a cada una de ellas, las tres polares consideradas forman un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto X_{1000} de ETC:

$$\left(\frac{1}{S_A-2bc} : \frac{1}{S_B-2ca} : \frac{1}{S_C-2ab}\right).$$

---

[10] Los puntos de Sharygin están descrito en (que transcribimos al final de esta exposición):
Darij Grinberg.- Sharygin Points Report, Hyacinthos #6293 (1/8/03) y #6315 (1/10/03)
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6293




```
              **************************
              * SHARYGIN POINTS REPORT *
              **************************
```

http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6293

Prof. Clark Kimberling has asked me to record the theory of the Sharygin points for referring to it in ETC. Here is it; for a more complete (but very tedious) treatise of the first three Sharygin points with full proofs and a few remarks on the next two, I refer to my note [4]

"On the principal Sharygin points of a triangle",

which is avaliable at the Files Directory of Hyacinthos as SHARYGIN.ZIP (as Zipped PS file).

The notations in this message are adjusted to those I used in [2] and [4]. Although the first five Sharygin points will also get the notions P, P', Q, T, T', generally the n-th Sharygin point will be denoted by Sn.

CONTENTS

§4. The excentral triangle; Sharygin points S4, S5

§5. Centers of similitude; Jean-Pierre Ehrmann's Sharygin points S6, S7

§6. The intouch triangle and S8

§7. The orthologic Sharygin point S9

§8. Desmic perspectors S10, S11, S12, S13, S14, S15

§9. Sharygin point list §10. Historical remarks

§1. INTRODUCTION

We will treat two remarkable triangles: the triangle bounded by the perpendicular bisectors of the internal angle bisectors of a triangle ABC, and the triangle bounded by the perpendicular bisectors of the external angle bisectors of triangle ABC. These two triangles and the triangle ABC are three perspective triangles, having a common perspectrix: the Lemoine axis of ABC. The mutual perspectors of the three triangles will be called the first, second and third Sharygin points of ABC (after a problem of Igor Sharygin - see §10). These points will turn out to be X(256), X(291) and a new point in Kimberling's list. Other concurrences will lead us to 12 other Sharygin points - which have different significance and properties.

I express my thanks to Jean-Pierre Ehrmann for some properties of the Sharygin points S3, S5, S6 and S7.

§2. TWO TRIANGLES

Let ABC be a triangle. The internal angle bisectors from A, B, C meet BC, CA, AB at A', B', C'. The external angle bisectors from A, B, C meet BC, CA, AB at A", B", C". Let X, X', Y, Y', Z, Z' be the midpoints and x, x', y, y', z, z' the perpendicular bisectors of the segments AA', AA", BB', BB", CC', CC" respectively.

Now define the points

D = y /\ z, E = z /\ x and F = x /\ y; D' = y' /\ z',
E' = z' /\ x' and F' = x' /\ y',

where the sign /\ means "intersection".

The triangles DEF and D'E'F' are the triangles enclosed by the perpendicular bisectors of the internal and external angle bisectors of ABC, respectively.

A little digression: We have some collinear triples of points:

(A', B', C"), (A', B", C'), (A", B', C'), (A", B", C"),

(X, Y,Z'),(X, Y', Z), (X', Y, Z) and (X', Y', Z') - proved in [4].

It is not hard to see ([4]) that x and x' pass through the midpoint of A'A", y and y' through the midpoint of B'B", and z and z' through the midpoint of C'C". But these midpoints lie on the Lemoine axis of triangle ABC.

We note down the homogeneous trilinears of D and D':

```
   /  -(aa - bc)            1          1   \
D ( ----------------- : ------- : -------  )
   \ (bb + ca)(cc + ab)  bb + ca   cc + ab /
```

and

```
    /     aa - bc            1          1    \
D' ( ----------------- : ------- : -------  )
    \(bb - ca)(cc - ab)   bb - ca   cc - ab /
```

proven in [4].

§3. THE FIRST THREE SHARYGIN POINTS S1, S2, S3

The triangles ABC, DEF and D'E'F' are mutually perspective, having
a common perspectrix - this is the Lemoine axis of triangle ABC.
Now consider their mutual perspectors:

The perspector of ABC and DEF is the 1ST SHARYGIN POINT of ABC,
denoted by P or S1, having homogenous trilinears

```
   /   1         1         1   \
P ( ------- : ------- : ------- ) = Kimberling's X(256).
   \aa + bc   bb + ca   cc + ab/
```

("aa" is an email shorthand for "a^2")

The perspector of ABC and D'E'F' is the 2ND SHARYGIN POINT of ABC,
denoted by P' or S2, having homogeneous trilinears

```
   / 1           1           1 \
P'( ------- : ------- : ------- ) = Kimberling's X(291).
   \aa - bc   bb - ca   cc - ab/
```

The perspector of DEF and D'E'F' is the 3RD SHARYGIN POINT of ABC,
denoted by Q or S3, having homogeneous trilinears

```
    / (aa - bc)(b^3 + c^3 - a^3 - abc)                        \
 Q (-------------------------------- : ... by cyclic permutation )
    \                 a                                       /
```

This point is not yet in Kimberling's ETC list.

The three Sharygin points P, P', Q are collinear; I propose to
call the line PP'Q the SHARYGIN LINE of triangle ABC.

§4. THE EXCENTRAL TRIANGLE; SHARYGIN POINTS S4, S5

The excentral triangle OaObOc of ABC is homothetic to triangle DEF
(see [4]). The homothetic center (and perspector) of these two
triangles is the 4TH SHARYGIN POINT of ABC, denoted by T or S4,
with homogeneous trilinears

T (-aa+bb+cc+ab+bc+ca : -bb+cc+aa+ab+bc+ca : -cc+aa+bb+ab+bc+ca)
= Kimberling's X(846).

The excentral triangle OaObOc is also perspective to triangle

D'E'F' (but not homothetic). The perspector T' is the 5TH SHARYGIN POINT. It is not (yet) in Kimberling's ETC. The trilinears of T' are

T' (a^4+(b+c)a^3-(2bb+3bc+2cc)aa+(b+c)(bb+cc)a-(b-c)^2(bb+bc+cc) : ... by cyclic permutation)

§5. CENTERS OF SIMILTUDE; JEAN-PIERRE EHRMANN'S SHARYGIN POINTS S6, S7

We conclude with some related Sharygin points not contained in [4].

Jean-Pierre Ehrmann noted that the sidelines of triangle D'E'F' are parallel to the internal bisectors of triangle ABC, and therefore orthogonal to the sides of the excentral triangle OaObOc. Hence, triangles D'E'F' and OaObOc are directly similar. Their center of similtude will be called the 6TH SHARYGIN POINT and has trilinears

(bb+cc-aa+a(b+c)-3bc : ... by cyclic permutation) = Kimberling's X(1054).

The center of similtude of the triangles DEF and D'E'F' (which are directly similar, too) is the 7TH SHARYGIN POINT with trilinears

(a(b^4+c^4-a^4+(b+c)a^3-(b^3+c^3)a-bbcc) : ... by cyclic permutation) = a point not in ETC.

These trilinears for S6 und S7 were found by Jean-Pierre Ehrmann, who also gave the following corollaries: The points S3 = Q and S7 are the common points of the circumcircles of the triangles DEF and D'E'F'; the points S5 = T' and S6 are the common points of the circumcircles of the triangles D'E'F' and OaObOc.

PROOF: This follows from the fact that (I cite Jean-Pierre)

"when two triangles are perspective and directly similar (but not homothetic), the perspector and the center of similitude are the common points of their circumcircles."

§6. THE INTOUCH TRIANGLE AND S8

Another interesting point is the homothetic center of the triangle DEF and the intouch triangle of ABC. I call it the 8TH SHARYGIN POINT of triangle ABC. It is not (yet) in ETC.

NOTES: 1. The intouch triangle is the triangle whose vertices are the points of tangency of the incircle with the sides of triangle ABC. It is also called the Gergonne triangle of ABC. 2. The triangle D'E'F' is not perspective to the intouch triangle of ABC.

§7. THE ORTHOLOGIC SHARYGIN POINT S9

Another nice point, which is not yet in ETC, is the 9TH SHARYGIN POINT, which I also call the ORTHOLOGIC SHARYGIN POINT. It is the intersection of the perpendiculars from D to BC, from E to CA, and from F to AB.

PROOF: The perpendiculars from D to BC, from E to CA, and from F to AB concur, since the perpendiculars from A to EF, from B to FD, and from C to DE concur (orthologic triangles!).

I have not managed to compute the trilinears of S8 and S9.

§8. DESMIC PERSPECTORS S10, S11, S12, S13, S14, S15

We conclude the study with some artificial concurrences; in fact, the following concurrences follow from the desmic theory:

If P1P2P3 and Q1Q2Q3 are two arbitrary perspective triangles, and

R1 = P2Q3 /\ P3Q2; R2 = P3Q1 /\ P1Q3; R3 = P1Q2 /\ P2Q1,

then the triangle R1R2R3 is called the DESMIC MATE of triangles P1P2P3 and Q1Q2Q3. Note that the "desmic mate" is a symmetric relation: The triangle R1R2R3 is automatically the desmic mate of triangles Q1Q2Q3 and P1P2P3. Now after the desmic theory, which goes back to Floor van Lamoen, the triangles P1P2P3 and R1R2R3 are perspective, and the triangles Q1Q2Q3 and R1R2R3 are perspective.

Applied to any two of the three mutually perspective triangles ABC, DEF and D'E'F', we get the following new perspectors:

S10 perspector of ABC and the desmic mate of the triangles ABC and DEF; S11 perspector of DEF and the desmic mate of the triangles ABC and DEF; S12 perspector of ABC and the desmic mate of the triangles ABC and D'E'F'; S13 perspector of D'E'F' and the desmic mate of the triangles ABC and D'E'F'; S14 perspector of DEF and the desmic mate of the triangles DEF and D'E'F'; S15 perspector of D'E'F' and the desmic mate of the triangles DEF and D'E'F'.

I call these points the 10th till 15th Sharygin points of ABC.

The difficulty of the trilinear coordinates varies from point to point, but the first four are quite simple:

S10 ((aa + bc)(aa - bc) : (bb + ca)(bb - ca) : (cc + ab)(cc - ab))

S11 ((bb + ca)(cc + ab) - (aa + bc)(aa - bc) : (cc + ab)(aa + bc) - (bb + ca)(bb - ca) : (aa + bc)(bb + ca) - (cc + ab)(cc - ab))

S12 ((aa - bc)^2 : (bb - ca)^2 : (cc - ab)^2)

S13 ((bb - ca)(cc - ab)+(aa - bc)^2 : (cc - ab)(aa-bc)+(bb-ca)^2 : (aa -bc)(bb - ca) + (cc - ab)^2)

As far as my (hastily made) macro was correct, none of the points S10- S15 is in Kimberling's ETC.

§9. SHARYGIN POINT LIST

We sum up the Sharygin points in a little list:

S1 perspector of ABC and DEF = Kimberling's X(256) S2 perspector of ABC and D'E'F' = Kimberling's X(291) S3 perspector of DEF and D'E'F' S4 perspector of DEF and OaObOc (and homothetic center) = Kimberling's X(846) S5 perspector of D'E'F' and OaObOc S6 center of similtude of D'E'F' and OaObOc = Kimberling's X(1054) S7 center of similtude of D'E'F' and DEF S8 perspector of DEF and intouch(=Gergonne) triangle of ABC S9 concurrence point of the perpendiculars from D to BC, etc. S10 perspector of ABC and the desmic mate of the triangles ABC and DEF; S11 perspector of DEF and the desmic mate of the triangles ABC and DEF; S12 perspector of ABC and the desmic mate of the triangles ABC and D'E'F'; S13 perspector of D'E'F' and the desmic mate of the triangles ABC and D'E'F'; S14 perspector of DEF and the desmic mate of the triangles DEF and D'E'F'; S15 perspector of D'E'F' and the desmic mate of the triangles DEF and D'E'F'.

It would be nice if somebody finds the trilinears of S8, S9, S14 or S15.

§10. HISTORICAL REMARKS

Now I will briefly explain the reasons of my naming "Sharygin points".

In the article "Teoremy Chevy i Menelaja" by Igor Sharygin (who actually is a member of Hyacinthos!) in the 11/1976 issue of the Russian mathematics journal "Kvant" - these issues are avaliable at

http://kvant.mccme.ru/

-, I read the following problem:

To prove that the perpendicular bisectors of the angle bisectors of a triangle intersect the corresponding sides on the triangle in three collinear points.

This problem is (by Desargues' Theorem) equivalent to the fact that the triangle enclosed by the perpendicular bisectors of the angle bisectors is perspective to ABC. This was the origin of my theory of the Sharygin points described here.

REFERENCES

[1] Darij Grinberg, "On Kimberling's X(256) and X(291) triangle centers" in geometry-college,
http://mathforum.org/epigone/geometry-college/peeringglur

[2] Darij Grinberg, "On Kimberling's X(256) and X(291) triangle centers ("Sharygin points") (Sequel)" and "On Kimberling's X(256) and X(291) triangle centers ("Sharygin points") (Corrections)" in geometry-college,
http://mathforum.org/epigone/geometry-college/peeringglur

[3] Jean-Pierre Ehrmann, personal correspondence.

[4] Darij Grinberg, "On the principal Sharygin points of a triangle", SHARYGIN.ZIP in the Files directory of Hyacinthos.

Darij Grinberg

http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6315

Re: Sharygin Points Report (S8 followup)

In my Sharygin Points Report, message #6293, I wrote

```
>> §6. THE INTOUCH TRIANGLE AND S8
>>
>> Another interesting point is the homothetic center of the
>> triangle DEF and the intouch triangle of ABC. I call it the
>> 8TH SHARYGIN POINT of triangle ABC. It is not (yet) in ETC.
>>
>> NOTES: 1. The intouch triangle is the triangle whose vertices
>> are the points of tangency of the incircle with the sides of
>> triangle ABC. It is also called the Gergonne triangle of ABC.

>> It would be nice if somebody finds the trilinears of S8, S9,
>> S14 or S15.
```

The trilinears of S8 turned out to be remarkably simple:

```
 / b + c             c + a             a + b         \
(  ----- (aa - bc) : ----- (bb - ca) : ----- (cc - ab) ).
 \ s - a             s - b             s - c         /
```

Darij Grinberg

$+ =0.$