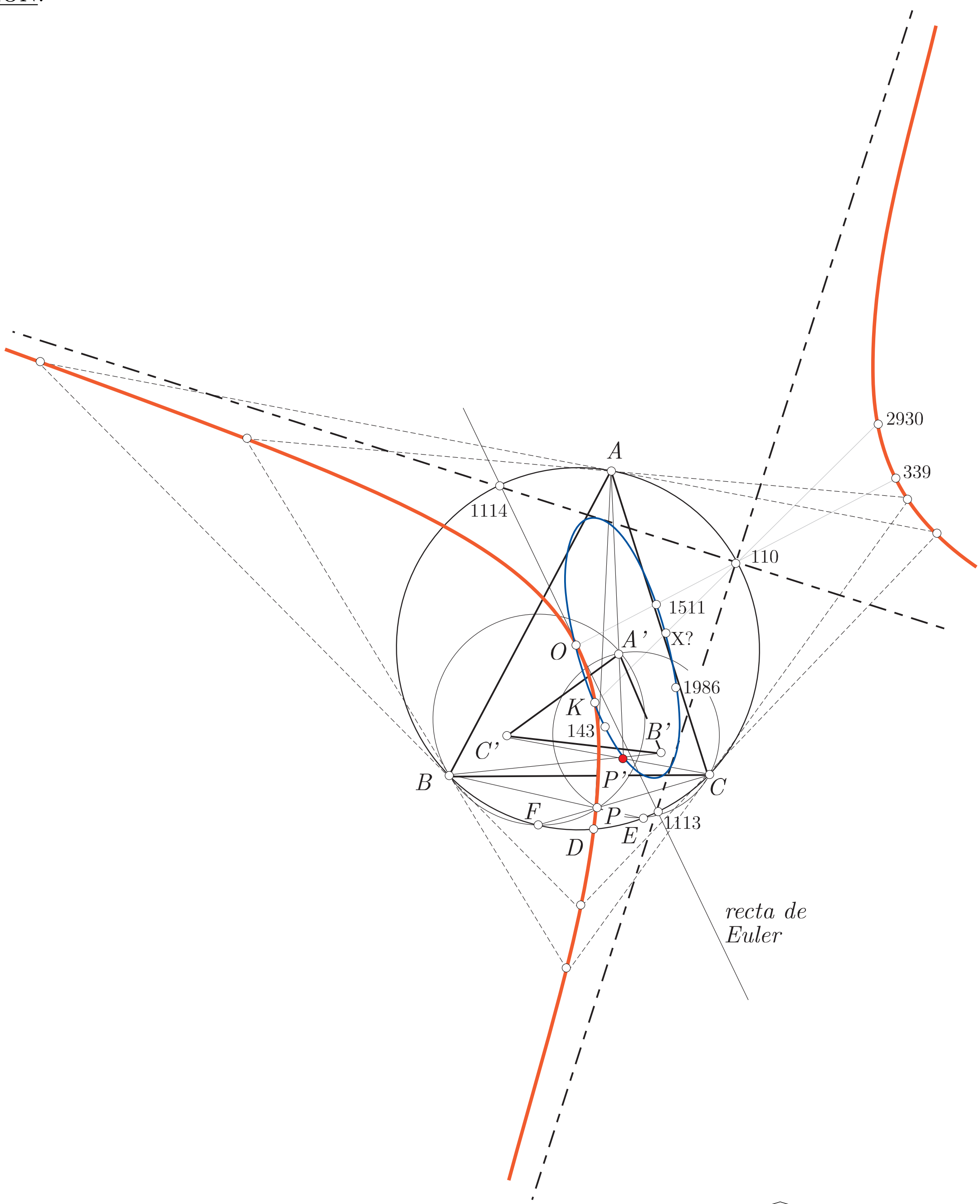
Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto y $\widehat{DEF}$ el triangulo circunceviano de P; las circunferencias circunscritas a los triángulos $\widehat{BPF}$ y $\widehat{CPE}$ se cortan en un punto A' (distinto de P). Similarmente se difinen B' y C'. Si P describe la hiperbola de Stammler (hipérbola de Feuerbach del triángulo tangencial) los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos y el centro de perspectividad recorre la cónica biceviana de los conjugados isogonales de los centros de las hipérbolas de Kiepert y Jerabek.

SOLUCIÓN:



Dado un punto $P(u:v:w)$, en coordenadas baricéntricas respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, los vértices de su triángulo circunceviano (en los otros puntos en los que las rectas AP, BP y CP vuelven a cortar a la circunferencia circunscrita) tienen de coordenadas:

$$D\left(-a^2vw : v(c^2v+b^2w) : w(c^2v+b^2w)\right),$$

$$E\left(u(c^2u+a^2w) : -b^2uw : w(c^2u+a^2w)\right),$$

$$F\left(u(b^2u+a^2v) : v(b^2u+a^2v) : -c^2uv\right).$$

La circunferencia circunscrita a $\widehat{BFP}$ es:

$$\Gamma_{ab}:\ c^2xy+b^2xz+a^2yz-\frac{1}{u+v+w}(x+y+z)\left(c^2vx+(b^2u+a^2v)z\right)=0.$$

La circunferencia circunscrita a $\widehat{CEP}$ es:

$$\Gamma_{ac}:\ c^2xy+b^2xz+a^2yz-\frac{1}{u+v+w}(x+y+z)\left(b^2wx+(c^2u+a^2w)y\right)=0.$$

Estas dos circunferencias se vuelven a cortan en:

$$A'\left(2S_A(b^2u+a^2v)(c^2u+a^2w):b^2(b^2u+a^2v)(c^2(u+v)+(a^2-b^2)w):c^2(c^2u+a^2w)((a^2-c^2)v+b^2(u+w))\right).$$

Similarmente, se obtiene que:

$$B'\left(a^2(a^2v+b^2u)((b^2-a^2)w+c^2(v+u)):2S_B(c^2v+b^2w)(a^2v+b^2u):c^2(c^2v+b^2w)(a^2(v+w)+(b^2-c^2)u)\right),$$

$$C'\left(a^2(a^2w+c^2u)(b^2(w+u)+(c^2-a^2)v):b^2(b^2w+c^2v)((c^2-b^2)u+a^2(w+v)):2S_C(a^2w+c^2u)(b^2w+c^2v)\right).$$

Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes si P está en las simedianas o en la recta del infinito o en la cónica:

$$\boxed{\frac{b^2-c^2}{a^2}x^2+\frac{c^2-a^2}{b^2}y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=0.}$$

Que contiene a los vértices $(-a^2:b^2:c^2), (a^2:-b^2:c^2)$ y $(a^2:b^2:-c^2)$ del triángulo tangencial, pasa por su incentro y ortocentro (circuncentro y X_{155} de $\widehat{ABC}$, respectivamente). Por tanto, se trata de la hipérbola equilátera de Feuerbach del triángulo tangencial, conocida como hipérbola de Stammler(1).

Como esta hipérbola pasa por los centros de las circunferencias exinscritas, vértices del triángulo excentral: $(-a:b:c)$, $(a:-b:c)$, $(a:b:-c)$, y por su incentro y ortocentro (X_{164} e incentro de $\widehat{ABC}$, respectivamente), se trata de la hipérbola equilátera de Feuerbach del triángulo excentral.

Cuando $P(u:v:w)$ está en la hipérbola de Stammler, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos y el centro de perspectividad es:

$$\left(\frac{a^2(c^2(u+v)+(b^2-a^2)w)(b^2(u+w)+(a^2-c^2)v)}{c^2v+b^2w}:\cdots:\cdots\right),$$

que está en la cónica:

$$\underset{\substack{abc\\xyz}}{\mathfrak{S}}\ b^2c^2\left(b^2c^2(b^2-c^2)^4(b^2+c^2-a^2)x^2-2a^6(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2yz\right)=0.$$

Esta cónica(2), que pasa por los pies de las cevianas de los puntos X_{249} y X_{250} (conjugados isogonales de los centros de las hipérbolas de Kiepert y Jerabek, respectivamente), tiene en común con la hipérbola de Stammler el circuncentro y simediano, además de tener como tangentes a las asíntotas de ésta. Contiene además, entre otros, a los siguientes centros del triángulo: X_{24}, X_{60}, X_{143} (centro de la circunferencia de Euler del triángulo órtico), X_{1511} (punto medio de X_3 y X_{110}), $X_{1986}, \ldots$. Su perspector es el punto:

$$\left(\frac{a^2}{(b^2-c^2)^2(2a^2S_A+b^2c^2)}:\frac{b^2}{(c^2-a^2)^2(2b^2S_B+c^2a^2)}:\frac{c^2}{(a^2-b^2)^2(2c^2S_C+a^2b^2)}\right),$$

que puede ser visto como el producto baricéntrico del conjugado isogonal (X_{249}) del centro de la hipérbola de Kiepert (X_{115}) por el conjugado isotómico del X_{1078}.

Las tangentes a la cónica en el circuncentro y en el simediano se cortan en el producto baricéntrico del simediano y el X_{1078}:

$$\left(a^2(2a^2S_A+b^2c^2):b^2(2b^2S_B+c^2a^2):c^2(2c^2S_C+a^2b^2)\right).$$

La recta que une al simediano con el centro, X_{110}, de la hipérbola de Stammler, vuelve a corta a esta cónica en el producto baricéntrico de los tres centros del triángulo X_6, X_{524}, X_{316}:

$$\left(a^2(2a^2-b^2-c^2)(a^4-b^4+b^2c^2-c^4):\cdots:\cdots\right).$$

Los circuncentros de $\widehat{A'B'C'}$, cuando P varía en la hipérbola de Stammler, están en la hipérbola homotética a ésta, mediante la homotecia de centro en el circuncentro y razón $1/2$.

Si P es el simediano, el simediano de $\widehat{A'B'C'}$ es el punto X_{574}:

$$\left(a^2(a^2-2b^2-2c^2):b^2(-2a^2+b^2-2c^2):c^2(-2a^2-2b^2+c^2)\right).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2477.pdf

(1) La hiperbola de Stammler, que es el lugar de los puntos tales que el triángulo formado por los pies de las perpendiculares a las mediatrices es perspectivo con $\widehat{ABC}$, tiene su centro en X_{110} (foco de la parábola de Kiepert), sus asíntotas pasan por los puntos de intersección de la recta de Euler con la circunferencia circunscrita, la tangente en el circuncentro es la recta de Euler (Paul Yiu.- A Tour of Triangle Geometry. §4.2.4. The Stammler hyperbola).

(2) La cónica biceviana de los conjugados isogonales de los centros de las hipérbolas de Kiepert y Jerabek es el lugar geométrico de los centros de perspectividad de $\widehat{ABC}$ y los triángulos cuyos vértices son los inversos, respecto a la circunferencia circunscrita, de los pies de las cevianas de un punto que recorre la recta de Euler (ver, A. P. Hatzipolakis and P. Yiu.- Reflections in triangle geometry. Forum Geometricorum **9**(2009) 301–348. Proposition 17.b).