Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, Γ_a la circunferencia que pasa por B y C y es tangente internamente a la circunferencia inscrita y similarmente, las circunferencias Γ_b y Γ_c. Designamos por P_a el punto de contacto de Γ_a y la circunferencia inscrita; similaramente, sean P_b y P_c. Sea Q_a el punto de concurrencia de las tangentes a la circunferencia inscrita en P_b y P_c; y similarmente, Q_b y Q_c. Finalmente, sea T_a el punto de intersección de las rectas BP_c y CP_b; similarmente se definen T_b y T_c.

Entonces, los cuatro triángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{P_aP_bP_c}$, $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ y $\widehat{T_aT_bT_c}$ son perspectivos dos a dos.

SOLUCIÓN:

Los ejes radicales de cada circunferencia de cuerda BC y la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$ son concurrentes en la recta BC. El punto de concurrencia lo podemos determinar intersecando BC con el eje radical de las circunferencia inscrita y circunscrita:

$$\left(a^2-2a(b+c)+(b+c)^2)\right)x+\left(b^2-2b(c+a)+(c+a)^2)\right)y+\left(c^2-2c(a+b)+(a+b)^2)\right)z=0,$$

resultando el punto:

$$R_a\left(0:-(a+b-c)^2:(a-b+c)^2\right).$$

Las tangentes desde R_a a la circunferencia inscrita son $x=0$ y

$$t_a:\ (a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c+2abc-b^2c-ac^2-bc^2+c^3)x+(2a^3-4a^2b+2ab^2+4a^2c-4abc+2ac^2)y+$$
$$(2a^3+4a^2b+2ab^2-4a^2c-4abc+2ac^2)z=0.$$

Las ecuaciones de las tangentes en P_b y P_c se obtienen por permutación cíclica en la ecuación de t_a, y el punto de intersección de ellas es:

$$Q_a\left((a^2-(b-c)^2)^2:-2b(a+b-c)(-a+b+c)^2:-2c(a-b+c)(-a+b+c)^2\right).$$

Las coordenadas de los puntos P_b, P_c, Q_b y Q_c se obtienen permutando cíclicamente, dos veces, las de P_a, Q_a y T_a.

El punto de tangencia de t_a y la circunferencia inscrita es:

$$P_a\left(-4a^2(a^2-(b-c)^2):(a-b-c)(a+b-c)^3:(a-b-c)(a-b+c)^3\right).$$

Las recta BP_c y CP_b,

$$BP_c:\ 4(a-b-c)c^2x+(a+b-c)(a-b+c)^2z=0,\qquad CP_b:\ 4b^2(-a+b+c)x-(a+b-c)^2(a-b+c)y=0,$$

se cortan en el punto:

$$T_a\left((a^2-(b-c)^2)^2:-4b^2(a^2-2ab+b^2-c^2):-4c^2(a^2-b^2-2ac+c^2)\right).$$

El centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{P_aP_bP_c}$ es el centro X_{479} [(1)] de ETC:

$$\left(\frac{1}{(b+c-a)^3}:\frac{1}{(c+a-b)^3}:\frac{1}{(a+b-c)^3}\right).$$

El centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ es el centro X_{57} de ETC:

$$\left(\frac{a}{b+c-a}:\frac{b}{c+a-b}:\frac{c}{a+b-c}\right).$$

El centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{T_aT_bT_c}$ es el centro X_{55} de ETC:

$$\left(a^2(b+c-a):b^2(c+a-b):c^2(a+b-c)\right).$$

El centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{P_aP_bP_c}$ y $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ es el centro X_{3598} de ETC (Primer punto de Liu[(2)]):

$$\left(\frac{3a^2+(b-c)^2}{b+c-a}:\frac{3b^2+(c-a)^2}{c+a-b}:\frac{3c^2+(a-b)^2}{a+b-c}\right).$$

(1) Clark Kimberling and Peter Yff, Problem 10678, American Mathematical Monthly 105 (1998) 666.

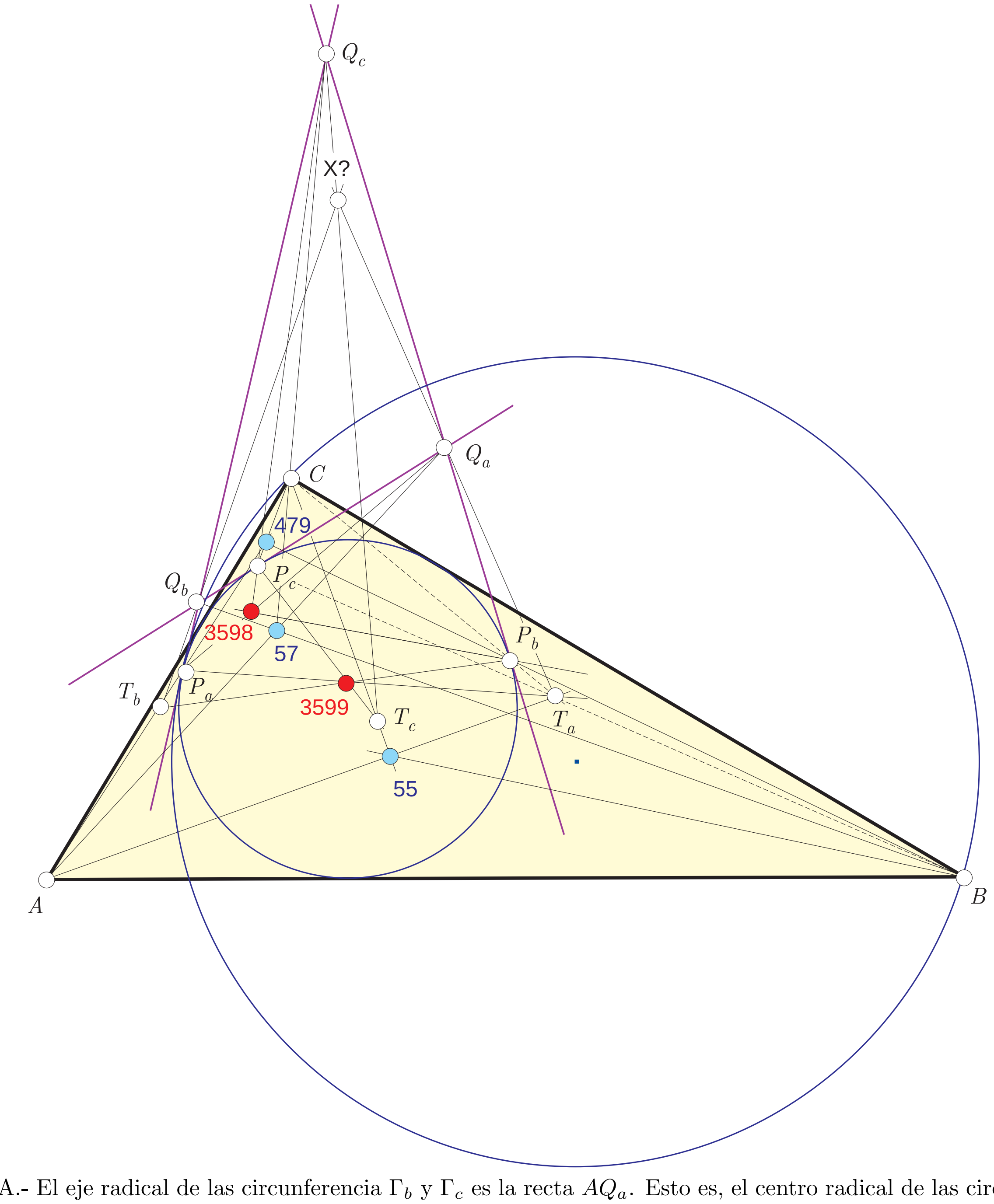
(2) This point and X(3599) were discovered by Kang-Ying Liu of St. Andrew's Priory School, Honolulu, Hawaii, during 2010.

El centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{P_aP_bP_c}$ y $\widehat{T_aT_bT_c}$ es el centro X_{3599} de ETC (Segundo punto de Liu):

$$\left(\frac{5a^4-8a^3(b+c)+2a^2(b^2+6bc+c^2)+(b-c)^4}{b+c-a}:\cdots:\cdots\right).$$

El centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ y $\widehat{T_aT_bT_c}$ es el centro:

$$\left(\frac{a(a^4-4a^3(b+c)+2a^2(3b^2-2bc+3c^2)-4a(b-c)^2(b+c)+(b-c)^2(b^2+6bc+c^2))}{(b+c-a)^2}:\cdots:\cdots\right).$$



NOTA.- El eje radical de las circunferencia Γ_b y Γ_c es la recta AQ_a. Esto es, el centro radical de las circunferecias Γ_a, Γ_b y Γ_c es el punto X_{57}.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2486.pdf