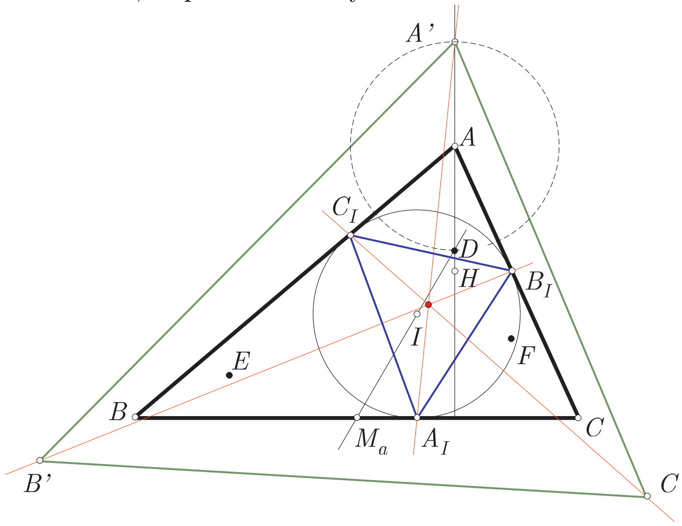
Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, D el punto de intersección de la altura por A con la recta IM_a, que pasa por el incentro I y el punto medio M_a del lado BC. Similarmente, $E = BH \cap IM_b$ y $F = CH \cap IM_c$ (H el ortocentro).

Sean A' el simétrico de E respecto a A, B' el simétrico de E respecto a B y C' el simétrico de F respecto de C. Entonces, el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ y el triángulo de contacto interior (sus vértices son los puntos de contacto con los lados de $\widehat{ABC}$ de la su circunferencia inscrita) son perspectivos. El centro de perspectividad es el punto de coordenadas baricéntricas:

$$\left(\frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a} : \frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a} : \frac{(b+c)(2a+b+c)}{(b+c-a)}\right).$$

SOLUCIÓN:
Utilizamos coordenadas baricéntricas, respecto a $\widehat{ABC}$ y las notaciones habituales en la geometría del triángulo.



El punto $D(-a(S_B - S_C) : (b-c)S_C : (b-c)S_B)$ es la intersección de las rectas

$$AH \equiv\ S_B y - S_C z = 0, \quad IM_a \equiv\ (b-c)x - ay + az = 0.$$

El simétrico de D respecto a A es:

$$A'\left(a(S_B - S_C) - 2(b-c)a^2 : (b-c)S_C : (b-c)S_B\right).$$

Por permutación cíclica en las coordenadas de A' obtenemos que:

$$B'\left(b(S_C - S_A) - 2(c-a)b^2 : (c-a)S_A : (c-a)S_C\right), \quad C'\left(c(S_A - S_B) - 2(a-b)c^2 : (a-b)S_B : (a-B)S_A\right).$$

Los vértices del triángulo de contacto interior $\widehat{A_IB_IC_I}$ son:

$$A_I\left(0 : \frac{1}{c+a-b} : \frac{1}{a+b-c}\right), \quad B_I\left(\frac{1}{b+c-a} : 0 : \frac{1}{a+b-c}\right), \quad C_I\left(\frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : 0\right).$$

Las rectas $A'A_I, B'B_I$ y $C'C_I$ se cortan en:

$$\left(\frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a} : \frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a} : \frac{(b+c)(2a+b+c)}{b+c-a}\right).$$

NOTAS ADICIONALES:

• Se tienen las siguiente longitudes de los segmentos (ver mensaje 20088 en Hyacinthos (de Luís Lopes) y relacionados):

$$AD = BE = CF = r. \qquad (r \text{ radio de la circunferencia inscrita})$$

• Caso de las circunferencia exinscritas:

El punto $D'(a(S_B - S_C) : (b-c)S_C : (b-c)S : B)$ es la intersección de las rectas

$$AH \equiv\ S_B y - S_C z = 0, \quad I_a M_a \equiv\ (b-c)x + ay - az = 0.$$

El simétrico de D' respecto a A es:

$$A''\left(a(S_B - S_C) + 2(b-c)a^2 : (c-b)S_C : (c-b)S_B\right).$$

Por permutación cíclica en las coordenadas de A'' obtenemos que:

$$B''\left(b(S_C - S_A) + 2(c-a)b^2 : (a-c)S_A : (a-c)S_C\right), \quad C''\left(c(S_A - S_B) + 2(a-b)cb^2 : (b-a)S_B : (b-a)S_A\right).$$

Los vértices del triángulo de contacto exterior $\widehat{A_{I_a}B_{I_b}C_{I_c}}$ son:

$$A_{I_a}\,(0 : c+a-b : a+b-c)\,, \quad B_{I_b}\,(b+c-a : 0 : a+b-c)\,, \quad C_{I_c}\,(b+c-a : c+a-b : 0)\,.$$

Las rectas $A''A_{I_a}, B''B_{I_b}$ y $C''C_{I_c}$ se cortan en el X_{1145} (Tercer punto de Ehrmann) de ETC:

$$\left((2a-b-c)((b+c)(a^2-(b-c)^2) - 2abc) : \ldots : \ldots\right).$$