Notas sobre la determinación de la altura del Teide hecha por Feuillée

Angel Montesdeoca

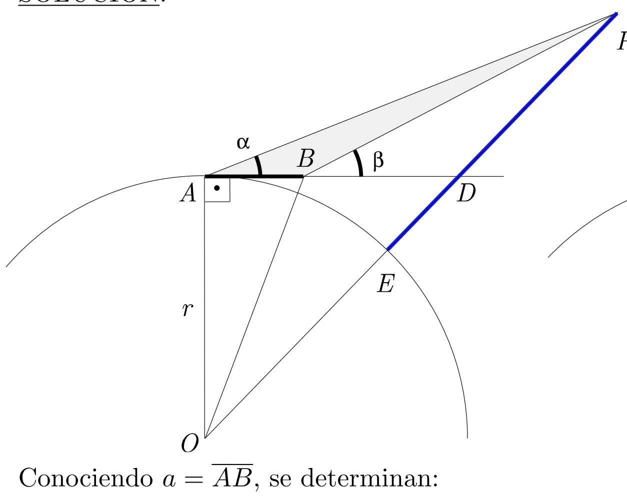
En estas notas se trata de comentar el razonamiento que Feuillée hace para determinar la altura del Teide[(1)], lo que se hará una vez que se planteen unos problemas geométricos, que son una alternativa al camino que él sigue, y de transcribir una traducción del manuscrito[(2)] en el que Feuillée hace el estudio.

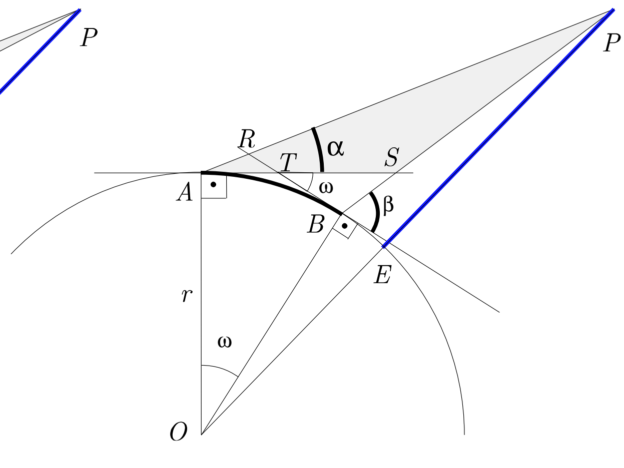
Problemas de distancias de un punto a una circunferencia

Empezamos estableciendo un resultado geométrico, que sólo utiliza los teoremas del seno y el coseno de la Geometría Elemental, relativo al cálculo de la distancia de un punto a una circunferencia que se plasma en los dos problemas siguientes:

> Dados un punto A en una circunferencia de radio r y con centro en O, B un punto en la tangente t a la circunferencia en A, P un punto exterior a la circunferencia, $\alpha = \widehat{BAP}$ el ángulo que forma AP con t y β el ángulo que forma BP con t. Determinar la distancia de P a la circunferencia.
>
> Dados dos puntos A y B sobre una circunferencia de radio r y con centro en O y un punto P exterior a la circunferencia. Se conocen los ángulos α y β que forman AP y BP con las tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente. Determinar la distancia del punto P a la circunferencia.

SOLUCIÓN:





Conociendo $a = \overline{AB}$, se determinan:

$$\overline{OB} = \sqrt{a^2 + r^2}, \qquad \cos \widehat{ABO} = \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}, \qquad \operatorname{sen} \widehat{ABO} = \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}, \qquad \overline{BP} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)},$$

(1) Ver el artículo de divulgación coordinado por Agustín Isidro de Lis:

(2) Realizada por Dulce Mª González Doreste

la última expresión surge de aplicar el teorema del seno al triángulo $\widehat{ABP}$.

Así, del triángulo $\widehat{OBP}$ se conocen los lados $\overline{OB}$ y $\overline{BP}$ y el ángulo comprendido, $\widehat{OBP} = \beta+\pi-\widehat{ABO}$, por lo que, aplicando el teorema del coseno, resulta

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BP}^2 - 2\,\overline{OB}\,\overline{BP}\cos\widehat{OBP}.$$

La distancia de P a la circunferencia es:

$$\boxed{\overline{PE} = \overline{OP} - r = -r + \sqrt{a^2 + r^2 + \frac{a^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)} + 2\frac{a\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}(a\cos\beta + r\operatorname{sen}\beta)}} \qquad (*)$$

El segundo problema se reduce al primero, determinando al distancia $\overline{AS}$ (siendo S la intersección de $\overline{BP}$ con la tangente a la circunferencia en A con BP) y el ángulo que forma BP con dicha tangente.

Conociendo el arco $\ell = \overparen{AB}$, denotando por T el punto de intersección de las tangentes en A y B, por R la intersección de AP con la tangente en B y por S el punto de intersección de BP con la tangente en A, se determinan la siguientes cantidades:

$$\omega = \widehat{AOB} = \frac{\ell}{r}, \qquad \overline{AT} = \overline{BT} = r\operatorname{tag}\frac{\omega}{2}, \qquad \widehat{ATR} = \omega, \qquad \boxed{\widehat{BST} = \beta - \omega}$$

$$\overline{TS} = \frac{r\operatorname{sen}(\pi-\beta)\operatorname{tag}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}(\beta-\omega)} = \frac{r\operatorname{sen}\beta\operatorname{tag}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}(\beta-\omega)}, \qquad \overline{AT} + \overline{TS} = \boxed{\overline{AS} = r\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{tag}(\beta-\omega)}\right)}$$

el valor de $\overline{TS}$ surge de aplicar el teorema del seno al triángulo $\widehat{BST}$.

Para obtener la distancia de P a la circunferencia, sólo basta con sustituir en la fórmula (*) anterior, las cantidades

$$a \longrightarrow \overline{AS} = r\operatorname{tag}\frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\omega)}\right) \qquad \text{y} \qquad \beta \longrightarrow \beta - \omega.$$

Caso particular[(1)]

Primer problema: (Datos utilizados por Feuillée para medir la altura del Teide)

$a = 210$ toesas[(2)] (1 toesa $\simeq$ 1.949 metros), $r = 3269297$ toesas (radio de la Tierra), $\alpha = 10°58'55''$, $\beta = 11°11'5''$.

```
d[a_,r_,u_,v_]:=Sqrt[a^2+r^2+(a^2*(Sin[u])^2)/((Sin[v-u])^2)+
                2(a*Sin[u])/(Sin[v-u])(a*Cos[v]+r*Sin[v])]-r

d[210,3269297,Pi((55/60+58)/60+10)/180,Pi((5/60+11)/60+11)/180]
```

$$\overline{PE} = 2212.101735655218 \text{ toesas} \times 1.949 = \boxed{4311.386282792021 \text{ metros}}$$

Segundo problema: $\ell = 210$ toesas, $r = 3269297$ toesas, $\alpha = 10°58'55''$, $v = \beta = 11°11'5''$.

$$\omega = \ell/r = 0.00006423399281252208 \text{ radianes} = 1.324921208195224 \text{ seg.}$$

(1) Para hacer los cálculos se utiliza Mathematica

(2) En 1799, un comité internacional de expertos reunidos al efecto en París, establecería el valor definitivo del metro en 443,296 líneas de la denominada toesa de la Academia, al asignar diez millones de metros al cuarto de meridiano terrestre, equivalentes a 5.130.740 toesas.

La toesa de la Academia, cuyo valor resultó aproximadamente igual a 1,949 m, era la unidad lineal vigente por aquel entonces en el país vecino y constituía la base de su sistema de medidas longitudinales, dividiéndose cada una en seis pies de Rey. A su vez, el pie se subdividía en doce pulgadas, la pulgada en doce líneas y cada línea en doce puntos.

(La implantación del sistema métrico decimal en España y su incidencia en la cartografía).

```
as[r_,v_,w_]:=r*Tan[w/2]*(1+Sin[v]/Sin[v-w])

AS = as[3269297,Pi((5/60+11)/60+11)/180,210/3269297]

d[AS,3269297,Pi((55/60+58)/60+10)/180,
                              Pi((5/60+11)/60+11)/180-210/3269297]
```

$$\overline{AS} = 210.0341216710593 \text{ toesas.}$$

$$\overline{PE} = 2252.990284401923 \text{ toesas} \times 1.949 = \boxed{4391.078064299348 \text{ metros}}$$

OBSERVACIONES:

• Utilizando la solución del primer problema para las medidas dadas por Feuillée para calcular al altura del Teide (3718 metros), se obtiene:

	$\overline{AB}$	α	β		
Medidas de Feuillée	210 toesas	10° 58' 55"	11° 11' 5"	2212 toesas	4311 metros
Variando los ángulos	210 toesas	10° 57' 57"	11° 12' 2.5"	1906 toesas	3718 metros

En la segunda fila se observa que si se admite una variación en los ángulos tomados por Feuillée, de aproximadamente un minuto abajo en la primera estación, que él toma para hacer medidas, y un minuto arriba en la segunda estación, se obtiene la altura que hoy se ha fijado para el Teide.

• Si la Tierra tiene forma elíptica de semiejes 6378136 metros y 6356752 metros, el radio en el paralelo 28° es

$$r = \sqrt{(6378136\cos 28^\circ)^2 + (6356752\,\text{sen}\,28^\circ)^2} = 6373429 \text{ metros} = 3270102 \text{ toesas},$$

que difiere del valor $r = 3269297$ toesas, tomado por Feuillée para hacer sus cálculos.

• Para distancias $\overline{AB}$ tan cortas, con respecto al radio de la Tierra, poco varían los resultados si las medidas se toman sobre la tangente o sobre la circunferencia, como se ve en la solución particular de los problemas planteados.

• La distancia $\overline{AD}$, siendo D el punto de intersección de la tangente a la circunferencia en A con la recta que une P con su centro O, la podemos calcular, aplicando el teorema del seno al triángulo $\widehat{OBP}$, para obtener primero información sobre el ángulo $\widehat{BPO}$. De este triángulo se conocen $\overline{OB}$, $\overline{OP}$ y el ángulo $\widehat{OBP}$, así

$$\frac{\text{sen}\,\widehat{OBP}}{\overline{OP}} = \frac{\text{sen}\,\widehat{BPO}}{\overline{OB}}, \qquad \text{sen}\,\widehat{BPO} = \frac{\overline{OB}\,\text{sen}\,\widehat{OBP}}{\overline{OP}}.$$

$\text{sen}\,\widehat{OBP} = \text{sen}(\beta + \pi - \overline{ABO}) = \text{sen}\,\beta\cos(\pi - \widehat{ABO}) + \cos\beta\,\text{sen}(\pi - \widehat{ABO}) = -\text{sen}\,\beta\cos\widehat{ABO} + \cos\beta\,\text{sen}\,\widehat{ABO}$.

Para determinar $\overline{BD}$, en el triángulo $\widehat{BDP}$, usamos

$$\frac{\text{sen}\,\widehat{BPO}}{\overline{BD}} = \frac{\text{sen}\,\widehat{BDP}}{\overline{BP}}, \qquad \overline{BD} = \frac{\overline{BP}\,\text{sen}\,\widehat{BPO}}{\text{sen}\,\widehat{BDP}}.$$

$$\text{sen}\,\widehat{BDP} = \text{sen}(\pi - (\beta + \widehat{BPO})) = \text{sen}(\beta + \widehat{BPO}) = \text{sen}\,\beta\cos\widehat{BPO} + \cos\beta\,\text{sen}\,\widehat{BPO} =$$
$$= \text{sen}\,\beta\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\widehat{BPO}} + \cos\beta\,\text{sen}\,\widehat{BPO}.$$

Con lo que ya se puede determinar $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$.

Para los valores particulares $a = 210$ toesas, $r = 3269297$ toesas (radio de la Tierra), $\alpha = 10°58'55''$, $\beta = 11°11'5''$, se tiene:

$$\overline{OB} = \sqrt{a^2 + r^2} = 3269297.0067, \qquad \overline{OP} = \overline{PE} + r = 2212.10173 + 3269297 = 3271509.10173,$$

$$\overline{BP} = \frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)} = 11303.59657, \ \cos\widehat{ABO} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = 0.000064 \ \text{sen}\,\widehat{ABO} = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} = 0.999999$$

$$\operatorname{sen}\widehat{BPO} = \frac{\overline{OB}\operatorname{sen}\widehat{OBP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}(\operatorname{sen}\widehat{ABO}\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\widehat{ABO})}{\overline{OP}} = 0.9803311322919046$$

$$\operatorname{sen}\widehat{BDP} = \operatorname{sen}\beta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\widehat{BPO}} + \cos\beta\operatorname{sen}\widehat{BPO} = 0.9999940358596614$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = a + \frac{\overline{BP}\operatorname{sen}\widehat{BPO}}{\operatorname{sen}\widehat{BDP}} = \boxed{11291.33372254758 \text{ toesas}}$$

Traducción del manuscrito de Feuillée

El texto que se expone a continuación, traducido del francés, corresponde a "*Viaje a las Islas Canarias o diario de las observaciones físicas matemáticas, botánicas e históricas*", realizadas por orden de su Majestad, por el **Padre Luis Feuillée**, religioso mínimo, matemático y botánico del Rey, 1745

31 de julio

A las dos de la tarde bajé hasta el borde del mar, a un pueblecito llamado La Paz. Deseaba encontrar alguna llanura desde donde pudiera divisar el Pico. Afortunadamente encontré un pequeño llano, casi al nivel del mar, tanto que en otro tiempo el mar llegaba hasta allí, según me contaron sus habitantes. Esta llanura se extendía desde el borde del mar hasta las faldas de las montañas que son inaccesibles a lo largo de todas las costas de esta isla y en todas las de Canarias.

Método del cual me serví para determinar la altura del Pico de Tenerife

El Pico de Tenerife había pasado hasta nuestros días por ser la montaña más alta (73)[(1)] del mundo, pero desde que nuestros navíos tomaron la ruta de las Indias Occidentales nos hemos desengañado de ese error. Lo que digo lo hago después de haberlo comprobado yo mismo. He visto las montañas de Santa Marta a más de sesenta leguas de distancia, mientras que la del Pico del Teide no he podido divisarla sino a cuarenta leguas y eso por la mañana con el sol de levante y cuando el tiempo está claro.

Siendo conocido el diámetro de la tierra, como se encontrará en la Historia de la Academia Real de las Ciencias de 1718, en la célebre obra sobre las dimensiones de la tierra que el sabio Monseñor Cassini de la misma academia nos ha proporcionado, se puede conocer también mediante cálculo la diferencia de altura entre la montaña de Santa Marta y el Pico de Tenerife.

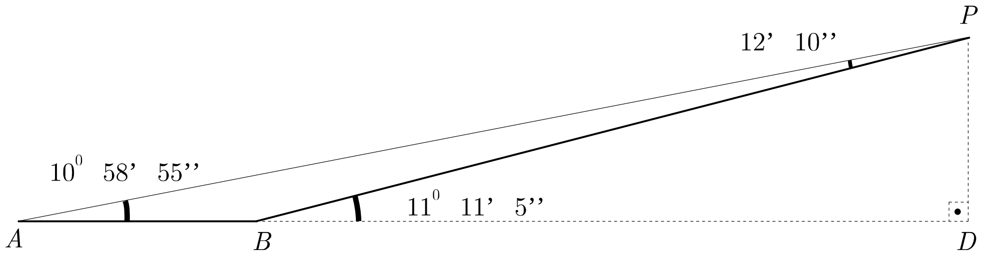
Después de haber encontrado en la llanura dos puntos de distancia que respondían a un mismo punto del Pico en línea recta, establecí sobre estos dos puntos mis dos estaciones. Medí con una cadena de diez toesas la distancia entre una y otra con la exactitud que exigen las operaciones geométricas. Cada diez toesas clavé sobre la línea que tomé como base unos piquetes para no desviarme de mi base ni por un lado ni por el otro. Mi primera estación estaba situada justo a la altura del mar, de tal manera que cuando tomaba la altura del extremo del Pico el agua bañaba mis pies. Mi segunda estación estaba muy cerca de la montaña a una distancia del borde del mar que yo había calculado de 210 toesas.

Primera estación

En esta primera estación el punto visual se elevaba sobre la superficie de la tierra tan sólo a la altura del cuarto de círculo, que averigüé de cuatro pies, dos pulgadas y seis líneas. Después de haber alineado, averigüé que el ángulo que daba la base con la línea de dirección a la cima del Pico formaba el ángulo PAB[(2)] de 10° 58' 55".

(1) Los números entre paréntisis indican la página de las fotocopias del manuscrito

(2) Se ha cambiado algunas letras asignadas a puntos, con el fin de que coincidan en los tres dibujos que aporta Feuillée y acordes con la notación usada en los problemas planteados al comienzo de estas notas.



Segunda estación

Una vez conocido el ángulo de la primera estación, (74) transporté mi cuarto de círculo a la segunda estación. Aquí volví a realizar la misma operación que acaba de hacer en la primera estación.

Encontré que el ángulo PBD era de	11° 11' 5"
La diferencia de los dos ángulos es	12' 10"

Cuando hube hallado estos dos ángulos, tracé sobre el papel una línea indefinida AD sobre la que medí doscientas diez toesas de A hacia D. Obtuve así AB, parte conocida de la línea AD. En el punto A tracé el ángulo PAB de 10° 58' 55" y en el punto B tracé el ángulo PBD de 11° 11' 5". Una vez hallados estos dos ángulos, tiré dos líneas desde los dos puntos A y B que se cortaron en el punto P y formaron el ángulo agudo APB.

Así, conocidos en el triángulo APB el ángulo PAB, el lado AB y el ángulo exterior PBD, será fácil obtener los otros dos ángulos y los otros dos lados por las analogías siguientes:

Análisis de los triángulos para la altura del Pico

ángulo obtuso B	168° 48' 55"
ángulo agudo A	10° 58' 55"
Así pues, ángulo en la cúspide P	12' 10"
Suma	180° 0' 0"

Igual a dos ángulos rectos

Analogía para el lado PB:

Como el seno del ángulo APB de 12' 10" está en el seno del ángulo PAB de 10° 58' 55", así el lado AB igual a 210 toesas está en el lado BP que se hallará de 11308T 4P.

10° 58' 55"	L 9.2798941
210	L 2.3222193
Suma	L11.6021134
12' 10"	L 7.5487001
11308T 4P	4.0534133

Analogía para el lado BD:

(75) Como el seno del ángulo BDP, que es recto, está en el seno del ángulo BPD de 78° 48'55", así el lado BP igual a 11308T 4P está en el lado BD que se hallará de 11903T 5P .

78° 48' 55"	L 9.9916720
11308L 4P	L 4.0534133
Suma	14.0450853
S.T.	10.0000000
11093(sic)T 5P	4.0450853

Analogía para el lado PD:

Como el seno del ángulo recto BDP está en el seno del ángulo PBD, de 11° 11' 5", así el lado PB de 11308T 4P está en el lado PD, que se hallará de 2193T 4P

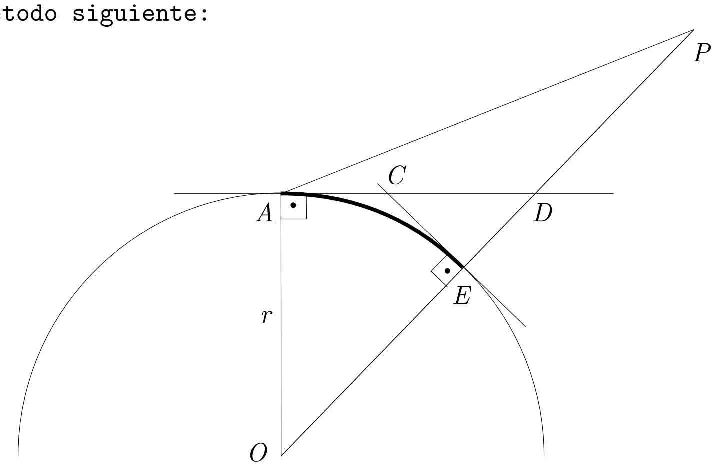
11° 11' 5"	L 9..2877407
11308T 4P	L 4.0534133
Suma	13.3411540
S.T.	10......
2193T 3P 6P	3.3411540

El lado AD será de 210T + 11093T 5P. Así pues la suma es de 11303T 5P

Método del cual nos servimos para hallar el nivel racional por debajo del aparente

Los instrumentos que llevamos al Pico para observar la bajura del horizonte del mar no fueron de utilidad: en lo alto de la primera montaña no podíamos ver todavía el Pie del Pico y perdimos el horizonte de vista. Las espesas nubes que se extendían sobre la superficie del mar nos lo ocultaron completamente. La superficie de las nubes que teníamos por debajo de nuestros pies nos parecía otro horizonte, pero un horizonte engañoso.

Como no pude observar la bajura por las razones que acabo de exponer, utilicé el método siguiente:



El punto D de la línea AD no termina directamente en el nacimiento de la altura del Pico, que está representado por el punto E, ya que la línea AD está tomada (76) sobre el nivel sensible que está marcado siempre por una línea recta, distinta del nivel racional que se toma sobre la superficie de la tierra.

He aquí las reglas de las que nos servimos para encontrar la línea ED que es la declinación del nivel racional por debajo del aparente. Aunque estas reglas no sean por entero geométricas porque hay que suponer la línea CD igual a CE, se aproximan bastante a causa de la escasa diferencia que estas líneas tienen entre ellas.

En la primera regla se ha dividido el cuadrado de la distancia AD por el diámetro de la tierra del que AO representa la mitad

Distancia AD	11303 T
Cuadrado de la distancia	127757809 T^2
Diámetro de la tierra	6538594 T
Cociente de la división	19 T 3524523

Demostración de la primera regla

Los triángulos AOD y CED son similares, tienen en común el ángulo ADO. Los ángulos DAO y DEC son rectos. Los ángulos DCE y AOC son también iguales. Así pues, AO:AD::CE:CD, de manera que doblando el primer y el segundo término de la analogía tenemos AO tomado dos veces igual al diámetro de la tierra en la misma proporción a AD que CE tomado dos veces en ED. Pero como hemos supuesto que CD y CE son iguales por su escasa diferencia y que AC y CE son iguales, resulta que se podrá sustituir a EC tomado dos veces sea (77) igual (por hipótesis) a AD. Siendo la distancia AD el segundo término de la analogía y convirtiéndose también en el tercero, se encuentra por la media proporcional entre el diámetro de la tierra que es AO tomado dos veces y ED, que es la baja del nivel verdadero por debajo del aparente. Por lo que dividiendo el cuadrado de la distancia por el diámetro de la tierra obtendremos lo que se pedía y lo que había que demostrar.

Corolario

Se deduce de la demostración y de la hipótesis de la primera regla que las bajas del nivel real por debajo del aparente son entre ellas como los cuadrados de las distancias.

Demostración

Las bajas del nivel se hallan en la demostración en razón doblada del diámetro de la tierra doblado en las distancias AD. Pero los cuadrados de las distancias son también en razón doblada de sus lados que hacen esta misma distancia, así pues (signo que no comprendo: ¿infinito tal vez?).

Ejemplo(1)

Conocido el diámetro de la tierra de 6538594 toesas se ha hallado por el cálculo que tiene la distancia supuesta de 900 T la elevación del nivel aparente por encima del verdadero nivel que es de 0T 0P 8P 11L

De 900 toesas

El cuadrado de la distancia supuesta tiene 810000T

El cuadrado de la distancia AD de 11303 T es de 127757809T

Por lo que se hará Como el cuadrado de la distancia

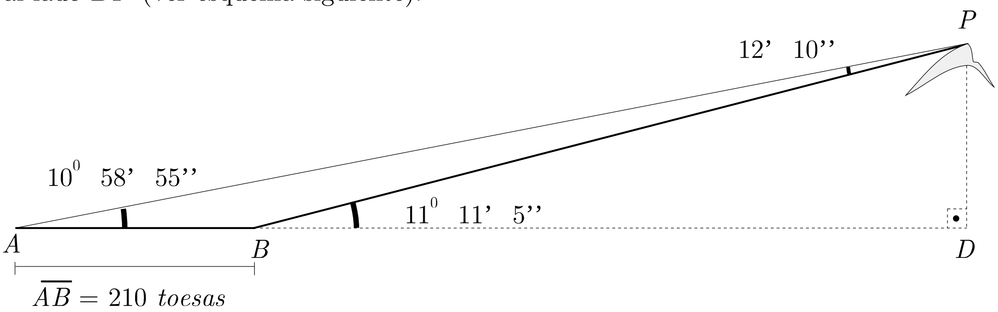
Suponiendo que es de 810000 está en su elevación por encima del verdadero nivel 0T 0P 8P 11L; así, el cuadrado de la distancia AD que es de 127754809 está en un cuarto término, lo que dará la elevación ED del nivel aparente por encima del verdadero, que se hallará de 19T 3P 2P (....) añadidos a la altura de 2193T 3P 6P del Pico sobre el nivel aparente tomados desde el punto A hasta el punto D. Lo que dará la altura perpendicular del Pico sobre el nivel del mar que es de **2213T 0P 8P**

(1) Se ha traducido con la mayor voluntad posible esta parte del manuscrito, con muchas tachaduras y con letra muy pequeña y confusa.

Análisis de los triángulos para la altura del Teide

Determinación del lado BP

El seno del ángulo $\widehat{APB} = 12'10''$ es al seno del ángulo $\widehat{PAB} = 10°58'55''$ como el lado $\overline{AB} = 210$ toesas es al lado $\overline{BP}$ (ver esquema siguiente).



O sea,

$$\frac{\operatorname{sen} 12'10''}{\operatorname{sen} 10°58'55''} = \frac{210}{\overline{BP}}.$$

$$\overline{BP} = \frac{\operatorname{sen} 10°58'55'' \times 210}{\operatorname{sen} 12'10''}, \qquad \log \overline{BP} = \log \operatorname{sen} 10°58'55" + \log 210 - \log \operatorname{sen} 12'10''.$$

$10°58'55''$	$\log \operatorname{sen} 10°58'55''$ $\rightarrow$	$\bar{1}.2798941748449261$
210	$\log 210$ $\rightarrow$	2.322219294733918
Suma	$\longrightarrow$	1.6021134695788441
$12'10''$	$\log \operatorname{sen} 12'10''$ $\rightarrow$	$\bar{3}.548896820316898$
11303.59657 ó $\overline{BP} = 11303T\ 3P\ 7P$	$\longleftarrow$	4.05321664926194613

Resultado al que también se llega por cálculo directo:

```
210*Sin[10.98194444444444Degree]/Sin[0.2027777777777777Degree]
```
= 11303.59657 toesas.

La diferencia del resultado entre el que da Feuillée, que es 11308 toesas y 4 pies, y el que resulta aquí, es debido a la falta de presición al dar el $\log \operatorname{sen} 12'10''$.

La diferencia entre las características de los logaritmos es debido a que se toma el 10 para los números entre $0.1 \le n < 1$, en vez de 0, para evitar las negativas.

NOTA: Para la determinación de los logaritmos hechos aquí se ha utilizado los medios que se diponen hoy. Si se hacen, utilizando unas tablas trigonométrica logarítmicas vulgares [(1)] con seis dígitos para la mantisa, de 10 en 10 segundos desde 0° hasta 3° y desde 87° hasta 90° y de 30 en 30 segundos en el resto del cuadrante, se obtienen los siguientes valores:

1) $\log \operatorname{sen} 10°58'55'' = \bar{1}.279894$

Como no está en la tabla el ángulo $10°58'55''$, se busca el logarítmo de los ángulo anterior y posterior:

$$\log \operatorname{sen} 10°58'30'' = \bar{1}.279623, \qquad \log \operatorname{sen} 10°59'' = \bar{1}.279948$$

El valor del logarítmo buscado, resulta de las siguientes operaciones:

(1) Eusebio Sánchez Ramos.- Tablas de logaritmos trigonométricas y de cálculos de intereses. Madrid, 1962. Vigésimo tercera edición

$$\bar{1}.279948 - \bar{1}.279623 = 325, \qquad 10°58'55'' - 10°58'30'' = 25'', \qquad \frac{325 \times 25}{30} \simeq 271,$$

luego

$$\log \operatorname{sen} 10°58'55'' = \bar{1}.279623 + 271 = \bar{1}.279894.$$

2) $\log \operatorname{sen} 12'10'' = \bar{3}.548897$, que sí está en la tabla.

Determinación del lado BD

El seno del ángulo $\widehat{BPD}$, que es recto,[1] es al seno del ángulo $\widehat{BPD} = 78°48'55''$, como el lado $\overline{BP} = 11303.59657762914$ toesas es al lado $\overline{BD}$.

O sea,

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{BDP}}{\operatorname{sen} \widehat{BPD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BD}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} 90°}{\operatorname{sen} 78°48'55''} = \frac{11303.59657762914}{\overline{BD}}.$$

$\overline{BD} =$ `Sin[Pi*((55/60+48)/60+78)/180]*11303.59657762914`

$$\overline{BD} = \frac{\operatorname{sen} 78°48'55'' \times 11303.59657}{\operatorname{sen} 90°} = 11088.90637971646 \text{ toesas}.$$

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ será de longitud igual a 210 T + 11088.90637971646 T = 11298.90637971646 T (11298 toesas 5 pies 5 pulgadas). Este medida es ligeramente superior a la que debería ser 11291 toesas 2 pies, pues PD no es perpendicular a AB.

Determinación del lado PD

Se puede determinar usando el teorema de Pitágoras:

$\overline{PD} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{11303.59657762914^2 - 11088.90637971644^2} = 2192.58999625399.$

O, siguiendo a Feuillée:

El seno del ángulo recto $\widehat{BDP}$ es al seno del ángulo $\widehat{PBD} = 11°11'5''$, como el lado $\overline{BP} = 11303T\,3.3P$ es al lado $\overline{PD}$.

O sea,

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{BDP}}{\operatorname{sen} \widehat{BPD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} 90°}{\operatorname{sen} 11°11'5''} = \frac{11303.59657762914}{\overline{PD}}.$$

$\overline{PD} =$ `Sin[Pi*((5/60+11)/60+11)/180]*11303.59657762914`

$$\overline{PD} = \frac{\operatorname{sen} 11°11'5'' \times 11303.59657762914}{\operatorname{sen} 90°} = 2192.589996253907 \text{ toesas}.$$

Cálculo del nivel racional por debajo del aparente

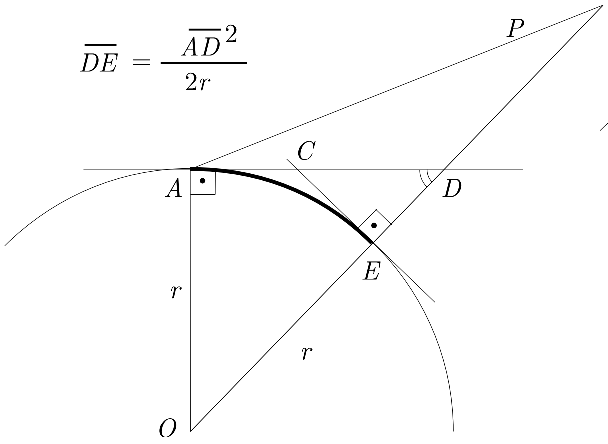
Una vez determinado $\overline{PD}$ —distancia del Pico al nivel aparente (o sensible)—, falta calcular $\overline{DE}$ —declinación del nivel racional (o real) por debajo del aparente.— Feuillée utiliza, para ello, la siguiente regla:

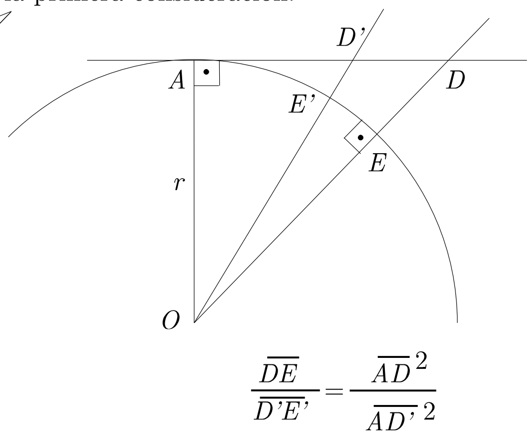
$$\boxed{\overline{DE} = \frac{\overline{AD}^2}{2r}}$$

[1] Feuillée está suponiendo que le ángulo $\widehat{PDB}$ es recto, pero no puede ocurrir que la recta que pasa por P y por el centro de la Tierra sea perpendicular a AB, tangente en A.

siendo r el radio de la Tierra y $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = 11298T\ 5P\ 5P$: distancia entre las dos estaciones, $\overline{AB} = 210$ toesas, más la distancia $\overline{BD} = 11088.90637$ toesas, de la segunda estación B a D, base del Teide sobre el nivel sensible.

Hay que hacer notar que si bien para los cálculos anteriores D es considerado como la proyección ortogonal del Pico, P, sobre el nivel sensible, relativo al punto A, a partir de ahora, Feuillée toma el punto D en la intersección de dicho nivel sensible con la recta que une P con el centro O de la Tierra, aunque considera el valor $\overline{AD} = 11298T\ 5P\ 5P$, según la primera consideración.





Para demostrar la fórmula, sea C el punto de intersección de las tangentes en A y E a la circunferencia máxima que pasa por A y E. Los triángulos rectángulos $\widehat{AOD}$ y $\widehat{ECD}$ son semejantes, pues tienen el ángulo D común, entonces

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}}, \qquad \text{de donde} \qquad \frac{2\overline{AO}}{\overline{AD}} = \frac{2\overline{EC}}{\overline{ED}}.$$

Como $\overline{AC} = \overline{EC}$ y si se supone, a causa de la escasa diferencia, que $\overline{EC} = \overline{CD}$, se tiene que

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AD}\ (\overline{AC} + \overline{CD})}{2\overline{AO}} = \frac{\overline{AD}^2}{2\overline{AO}}.$$

Se deduce de esta fórmula para calcular la diferencia entre el nivel racional y el aparente, el siguiete corolario:

Corolario.- Si D y D' son dos puntos sobre le nivel aparente, relativo a A, y E y E' son los correspondientes puntos al nivel del mar, se verifica:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AD'}^2},$$

Ejemplo:

Conocida la baja del nivel real por debajo del aparente de un punto D', Feuillée utiliza el corolario anterior, para calcular la del punto D, tal que $\overline{AD} = 11298.90637971646$ toesas, determinado anteriormente.

Partiendo de que para $\overline{AD'} = 900$ toesas, se conoce la baja del nivel real por debajo del aparente $\overline{D'E'} = 8$ pulgadas 11 líneas (0.1238425925925925 toesas), resulta:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{D'E'}\ \overline{AD}^2}{\overline{AD'}^2} = 19.51901225337635 \text{ toesas}.$$

Otra forma de hallar $\overline{DE}$, sin utilizar el corolario y el conocimineto previo de una baja particular, es tener en cuenta que en el triángulo rectángulo $\widehat{AOD}$, se verifica

$$(\overline{DE} + \overline{OE})^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2,$$

de donde, resulta

$$\overline{DE} = \sqrt{r^2 + \overline{AD}^2} - r = \sqrt{3269297^2 + 11298.906^2} - 3269297 = 19.52482377365231 \text{ toesas.}$$

En consecuencia, la altura del Teide, siguiendo el razonamiento de Feuillée y considerando mayor presición en la utilización de las tablas de logaritmos, es

$$\overline{PD} + \overline{DE} = 2192.589996253907 + 19.51901225337635 = 2212.109008507283 \text{ toesas}$$

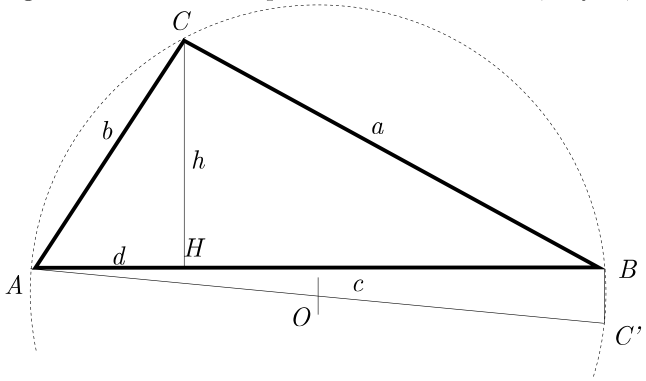
$$\boxed{2212 \text{ toesas } 8 \text{ pulgadas} = 4311.4 \text{ metros}}$$

Teoremas del seno y coseno

Teorema del coseno

El cuadrado de lado de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido.

Consideremos un triángulo $\widehat{ABC}$ de lados opuestos a los vértices A, B y C, a, b y c, respectivamente.



Si proyectamos ortogonalmente el lado AC sobre el lado AB, obtendremos el segmento punto $\overline{AH}$, y si $h = \overline{CH}$, se tiene

$$d = b\cos(\pi - \widehat{A}) = -\cos\widehat{A}, \qquad h = b\,\mathrm{sen}(\pi - \widehat{A}) = b\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}, \qquad (c+d)^2 + h^2 = a^2.$$

Sustituyendo, d y h, en la última realción, se obtiene:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$$

Teorema del seno

En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Sea el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura, inscrito en una circunferencia de centro O.

El diámetro trazado por A, corta a la circunferencia en C'. El ángulo $\widehat{ABC'}$ es recto en B, ya que se trata de un ángulo inscrito que abarca un arco de amplitud 180°. En él se cumplirá:

$$c = d\,\mathrm{sen}\,\widehat{C'},$$

donde d es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{C'}$ son iguales por ser ángulos inscritos con la misma amplitud: el arco $\overset{\frown}{AB}$. Por tanto

$$c = d\,\mathrm{sen}\,\widehat{C}.$$

El mismo razonamiento para los otros lados y ángulos del triángulo inscrito nos llevaría a las siguientes conclusiones:

$$b = d\,\mathrm{sen}\,\widehat{B}, \qquad a = d\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}.$$

De las tres relaciones obtenidas, resulta:

$$\boxed{\frac{a}{\mathrm{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\widehat{C}}}$$

Contenido