Plano tangente, 1FF., ángulos, longitudes, áreas

Angel Montesdeoca

Lunes 12 de Mayo del 2008

1 Se considera la superficie $xyz - 1 = 0$. Hallar:

(a) Plano tangente en el punto $(1, 1, 1)$

(b) Planos tangentes que contengan a la recta $y = z,\ x + 2y - 3 = 0$.

(c) Planos tangentes paralelos al plano $x + y + z = 4$.

2 Demostrar que los planos tangentes a la superficie dada por $z = xf(y/x)$, f función diferenciable, pasan por el origen.

3 Hallar el plano paralelo al plano $x + y + z = 0$ y tangente a la superficie $x = u^2 + v^2, y = u^3, z = v^3$.

4 Hallar el plano tangente a la superficie $x\, f(x, y, z) + y\, g(x, y, z) = 0$, en los puntos del eje OZ.

5 Demostrar que los planos tangentes a la superficie $z = x + f(y - z)$ son paralelos a una misma recta.

6 Supongamos que una superficie admite una parametrización de la forma

$$\vec{\mathbf{x}}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + \vec{\beta}(v)$$

con $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ curvas regulares. Demostrar que los planos tangentes a lo largo de las líneas coordenadas son todos paralelos a una recta.

7 Probar que es constante la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos intersecados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}.$$

8 Probar que el lugar geométrico de las proyecciones del centro del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ sobre sus planos tangentes es

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

9 Establecer que el lugar geométrico de los puntos de contacto de los planos tangentes por el punto $(a, 0, 0)$ a la superficie $x = u + v, \quad y = uv, \quad z = u^2 + 4v^2$, son parábolas.

10 Demostrar que cuando un punto P se mueve a lo largo de una generatriz de un helicoide recto, la normal unitaria gira alrededor de la generatriz, de manera que la cotangente del ángulo que forma con el eje es proporcional a la distancia al eje.

11 Sobre la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ se considera una curva $\mathcal{C}$ cuya proyección sobre el plano XOY es $r = e^\theta$. Hallar la intersección del plano XOY con la recta normal a la curva $\mathcal{C}$ contenida en el plano tangente a la superficie en el punto correspondiente, según se vaya moviendo éste.

12 Componentes en coordenadas curvilíneas locales del vector tangente al meridiano y paralelo en el punto de coordenadas (θ_0, ϕ_0) de la esfera:

$$x = a\cos\theta\cos\phi,\ y = a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = a\ \mathrm{sen}\,\theta.$$

13 Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie son concurrentes, entonces la superficie es una esfera o parte de ella.

14 Hallar la primera forma fundamental del plano en coordenadas cartesianas respecto de una base ortonormal. Calcular los g^{ij}. Lo mismo si las coordenadas del plano son las polares.

15 Hallar la primera forma fundamental y los g^{ij} de las superficies:

(a) Esfera: $x = a\,\cos\theta\,\cos\phi$, $y = a\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi$, $z = a\,\operatorname{sen}\theta$.

(b) Superficie de revolución: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\operatorname{sen} v$, $z = h(u)$.

(c) Catenoide: $x = a\,\cosh(u/a)\cos v$, $y = a\,\cosh(u/a)\operatorname{sen} v$, $z = u$.

(d) Pseudoesfera: $x = a\operatorname{sen} u\cos v$, $y = a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$, $z = a(\cos u + \ln\operatorname{tag}(u/a))$.

(e) Helicoide: $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = av$.

(f) Desarrollable tangente de arista de retroceso $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, ($s$ parámetro natural): $\vec{\mathbf{x}}(s,v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{t}(s)$.

(g) Toro: $x = (b + a\cos u)\cos v$, $y = (b + a\cos u)\operatorname{sen} v$, $z = a\operatorname{sen} u$.

(h) Elipsoide: $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos u\operatorname{sen} v$, $z = c\,\operatorname{sen} u$.

(i) Paraboloide hiperbólico: $x = a(u+v)$, $y = b(u-v)$, $z = uv$.

(j) $x = ue^{av}\cos v$, $y = ue^{av}\operatorname{sen} v$, $z = f(u)e^{av}$.

16 Obtener la primera forma fundamental del plano cuando las líneas coordenadas son las familias de circunferencias de centro el eje de las "x" y las circunferencias de centro en el eje de las "y"y que pasan por el origen.

17 En el plano cartersiano, se considera la recta $r \equiv y = 1$ y las curvas $\mathcal{C}_v$ definidas por los puntos Q tales que para todo P en r, Q es el punto sobre la recta OP (O origen de coordenadas) tal que $\overline{OQ} = \overline{OP} + v$, $v \in I\!R$. (↻)

Si u es el ángulo que forma la recta OP con el eje OX, a todo punto del plano, salvo los de la recta $y = 0$, le podemos asignar las coordenadas $(u,v) \in]0,\pi[\times]-\infty,\infty[$. Encontrar la primera forma fundamental del plano respecto a estas coordenadas.

¿En qué puntos del plano las curvas paramétricas relativas a las coordenadas (u,v), son ortogonales?

Utilizando la expresión que permite calcular la longitud de un arco de una curva sobre una superficie en función de los coeficientes de la primera forma fundamental, obtener la longitud del arco de la curva paramétrica $v = 0$, comprendida entre los puntos correspondientes a $u_1 = \pi/4$ y $u_2 = 3\pi/4$.

18 Estudiar si las líneas coordenadas de las superficies siguientes son trayectorias ortogonales: plano en cartesianas, plano en polares, esfera en coordenadas esféricas.

19 Demostrar que sobre una superficie de 1ª forma fundamental: $I = du^2 + G(u,v)dv^2$ son trayectorias ortogonales las dos familias uniparamétricas de curvas definidas por las ecuaciones diferenciales

$$du + \sqrt{G(u,v)}\,dv = 0 \ \text{ y } \ du - \sqrt{G(u,v)}\,dv = 0.$$

20 Hallar la función f para que las líneas coordenadas de la superficie siguiente sean ortogonales:

$$x = ue^{av}\cos v, \quad y = ue^{av}\operatorname{sen} v, \quad z = f(u)e^{av}.$$

21 Hallar la condición que deben verificar las curvas $\phi(u^1,u^2) = cte.$, $\psi(u^1,u^2) = cte.$, sobre la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$, para que sean ortogonales.

22 Dada una familia uniparamétrica de curvas sobre una superficie, se llama trayectoria isogonal de esta familia a una curva que interseca a todas las de la familia con un ángulo constante $\theta \neq 0$. Si $\theta = \pi/2$, la curva se llama trayectoria ortogonal. Calcular las trayectorias isogonales de la familia de rectas del cilindro circular $x = a\cos u^1$, $y = a\operatorname{sen} u^1$, $z = u^2$.

23 Hallar las trayectorias isogonales (Ejercicio 22) de los meridianos de una esfera (loxodromas).

24 Demostrar que las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $M\,du^1 + N\,du^2 = 0$ están dadas por : $(g_{11}N - g_{12}M)du^1 + (g_{12}N - g_{22}M)du^2 = 0$. Utilizar esta fórmula para obtener las trayectorias ortogonales de las curvas $r = \lambda\cos\theta$ en el plano, para todos los valores de λ.

25 Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que las curvas

$$A(du^1)^2 + 2B du^1 du^2 + C(du^2)^2 = 0 \qquad (A, B, C \ \text{ funciones de } \ u^1,\ u^2)$$

formen una red ortogonal es que $g_{11}C - 2g_{12}B + g_{22}A = 0$.

26 Hallar las trayectorias ortogonales a las secciones planas $z = cte.$ del paraboloide $x^2 - y^2 = z$.

27 Hallar la familia de curvas ortogonales a las curvas $u \cos v = cte.$ sobre el helicoide recto.

28 Tomando líneas coordenadas ortogonales, demostrar que la ecuación diferencial de las curvas que son bisectrices de los ángulos que forman dichas líneas coordenadas es:

$$g_{11}(du^1)^2 - g_{22}(du^2)^2 = 0.$$

29 Hallar la longitud de la curva

$$u = e^{\frac{\cot \beta}{\sqrt{2}}\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi, \ \beta = cte.$$

contenida en el cono $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,\theta) = (u\cos\theta, \ u \operatorname{sen}\theta, \ u)$. Demostrar que dicha curva corta a las generatrices del cono bajo un ángulo constante.

30 Hallar la intersección del helicoide $x = u \cos v, \ y = u \operatorname{sen} v, \ z = v$ con la recta $x = 1, \ y = 0$, y el ángulo de esta recta y la superficie en los puntos de intersección. (El ángulo entre curva y superficie se define como el ángulo entre la tangente a la curva y el plano tangente a la superficie).

31 Intersección del helicoide $x = u\cos v, \ y = u \operatorname{sen} v, \ z = v$ con la hélice $x = \cos t, \ y = \operatorname{sen} t, \ z = -t$. Hallar el ángulo entre la hélice y el helicoide en los puntos de intersección.

32 Demostrar que el ángulo θ entre la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ y la curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ en un punto común que corresponde a los valores $t_0, \ u_0^1, \ u_0^2$ de los parámetros viene dado por

$$\cos\theta = \frac{[\vec{\mathbf{x}}_1 \ \vec{\mathbf{x}}_2 \ \vec{\alpha}\,']}{\|\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2\| \ \|\vec{\alpha}\,'\|}.$$

33 Sea $x = f(t), \quad z = g(t) \quad (a < t < b)$, una curva regular $\mathcal{C}$ de clase C^n en el plano XOZ, con $f(t) > 0$. Hallar una representación paramétrica de la superficie obtenida al girar $\mathcal{C}$ alrededor de eje OZ. Demostrar que las líneas coordenadas son trayectorias ortogonales.

34 Sea la hélice $x = \cos t, \ y = \operatorname{sen} t, \ z = t$, y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar los puntos de intersección y el ángulo que forma la hélice y la esfera en esos puntos.

35 Demostrar que el ángulo θ entre la curva $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y la superficie $F(x, y, z) = 0$ en un punto común viene dado por:

$$\cos\theta = \frac{F_x x' + F_y y' + F_z z'}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

36 En la superficie de primera forma fundamental $I \equiv v^2 du^2 - 2uv\, du\, dv + 2u^2 dv^2$, encontrar la ecuación diferencial que da las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $v^3/u^2 = cte.$ Obtener la primera forma fundamental de la superficie cuando se toman como líneas coordenadas estas dos familias de curvas.

37 Dar una representación paramétrica del cono $x^2 + y^2 - 2xz = 0$, en la que una de las líneas coordenadas sean las secciones $\mathcal{C}_v$ del cono por planos perpendiculares al eje OZ y otras sean las generatrices del cono. Calcular la primera forma fundamental relativa a dicha representación paramétrica.

Encontrar las curvas sobre el cono que cortan ortogonalmente a las curvas $\mathcal{C}_v$, anteriores. Obtener, finalmente, la 1ª forma fundamental relativa a la representación paramétrica para la cual las líneas coordenadas sean las curvas $\mathcal{C}_v$ y sus trayectorias ortogonales.

38 Considérese la hélice circular dada por $\alpha(v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, bv)$. Por cada punto de la hélice, trácese una recta paralela al plano xy que corta al eje z. La superficie generada por estas rectas se denomina helicoide.

a) Establecer que $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, bv)$ es una parametrización del helicoide.
b) Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental para esta parametrización.
c) Calcular el perímetro del triángulo curvilíneo limitado por las curvas:

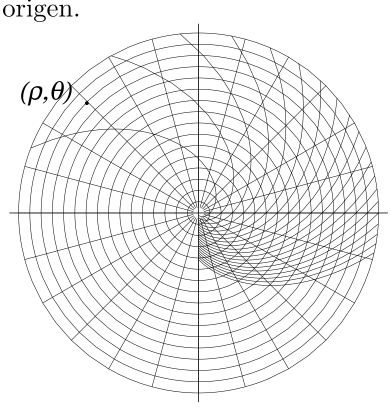
$$u = \frac{bv^2}{2}, \qquad u = -\frac{bv^2}{2}, \qquad v = 1.$$

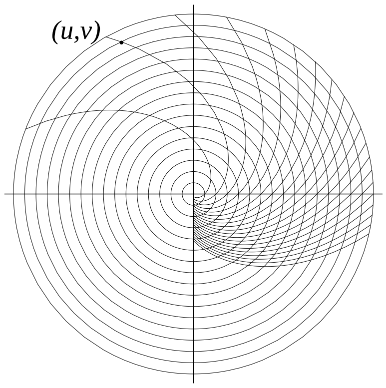
39 Demostrar que la ecuación diferencial de las curvas sobre una superficie paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$ cuyas tangentes son las bisectrices de las tangentes a las curvas coordenadas, viene dada por

$$(g_{11}\sqrt{g_{22}} - g_{12}\sqrt{g_{11}})du + (g_{12}\sqrt{g_{22}} - g_{22}\sqrt{g_{11}})dv = 0,$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la 1ª forma fundamental.

40 Consideremos en el plano las coordenadas polares (es decir, las curvas coordenadas son, por una parte, las semirrectas que parten del origen y, por otra, las circunferencias de centro el origen). Encontrar las curvas en el plano cuyas tangentes en cada punto P, forman ángulos iguales con las curvas coordenadas polares que se cortan en P. Dar una parametrización del plano tomando como curvas paramétricas estas últimas y las circunferencia centradas en el origen.





41 Consideremos en el plano las coordenadas polares (es decir, las curvas coordenadas son, por una parte, las semirrectas que parten del origen y, por otra, las circunferencias de centro el origen). Encontrar las curvas en el plano cuyas tangentes en cada punto P, forman ángulos iguales con las curvas coordenadas polares que se cortan en P. Dar una parametrización del plano tomando como curvas paramétricas estas últimas y las circunferencia centradas en el origen.