Ejercicios GEOMETRIA III, 2005-2006

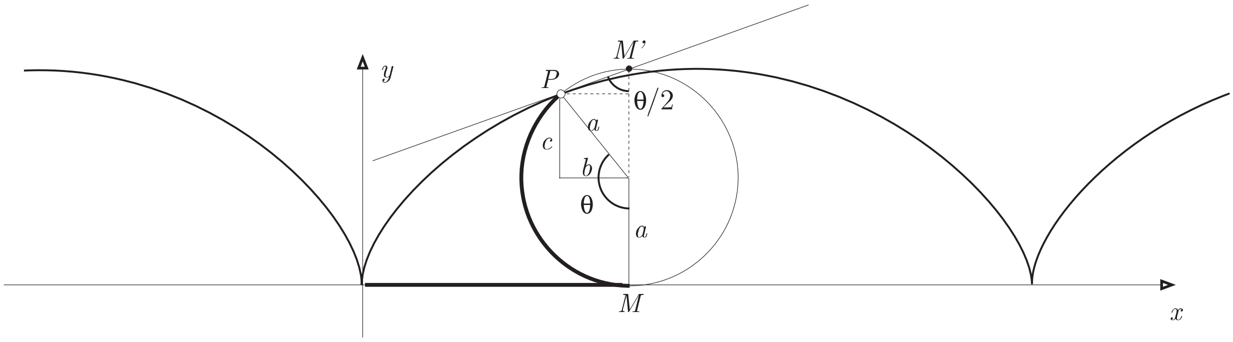
Angel Montesdeoca

Jueves 27 de Agosto del 2009

1 Una cicloide es una curva plana, trayectoria de un punto fijo en una circunferencia, que rueda, sin deslizarse, sobre una recta. Establecer que una representación paramétrica de la cicloide es $\vec{\alpha}(\theta) = (a(\theta - \operatorname{sen}\theta), a(1 - \cos\theta))$.

Parametrizarla con el parámetro arco y determinar sus puntos singulares.

Probar que la recta tangente a la cicloide por un punto P regular viene determinada por los puntos P y M', siendo M' el punto diametralmente opuesto al punto M de contacto de la circunferencia con la recta donde rueda).



/ Figura Cabri DOS/ Applet CabriJava

2 Sea la representación paramétrica de la hélice circular $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ $0 < t < \pi$. Encontrar un cambio de parámetro que nos de, a partir de ésta, la representación:

$$\vec{\beta}(u) = \left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2au}{1+u^2}, 2b \text{ arctag } u\right) \qquad 0 < u < \infty$$

Establecer que estas dos representaciones son equivalentes.

3 Obtener la ecuación de una curva situada en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y tal que sus tangentes formen un ángulo constante con el eje del cilindro.

4 Dar dos representaciones paramétricas para la curva intersección del cilindro $x^2 - y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$ en la que no intervengan radicales.

Idem para la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el mismo plano.

5 Encontrar la longitud de la curva, entre los puntos $(a, 0, 0)$ y (x, y, z), dada por la intersección de las dos superficies

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad x = a\cosh(z/a).$$

6 Hallar la longitud de arco de la curva: $x = 2a(1 + \cos t)$, $y = 2a(1 + \operatorname{sen} t)$, $z = a\sqrt{5}t$, comprendido entre los puntos correspondientes a $t = 0$ y $t = 2\pi$.

7 Sea una curva plana dada en coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$. Hallar la longitud de arco de esta curva.

8 Encontrar la longitud de arco de una cicloide (ver Ejercicio 1), para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Encontrar la longitud entre los puntos correspondientes a los valores 0 y θ del parámetro. Usando este último resultado dar la representación natural de la cicloide, y probar que los puntos donde la cicloide corta al eje OX son puntos singulares.

9 Introducir la longitud de arco como parámetro en la curva $\vec{\alpha}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, $-\infty < t < \infty$.

10 Probar que la curva $\vec{\alpha}(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, 0)$ es regular y hallar la ecuación de la tangente en $t = \pi/3$.

11 a) Decir cuáles de las curvas siguientes son regulares:

$$i)\ \vec{\alpha}(t) = (\cos t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t) \quad ii)\ \vec{\beta}(t) = (2 \operatorname{sen} 2t, 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{tag} t, 0) \quad iii)\ \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \cos 2t, \operatorname{sen} t)$$

b) Hallar la tangente a cada una de ellas en $t = \pi/4$. / Figura Cabri DOS/ Applet CabriJava

12 Sea la hélice circular $\mathcal{C} : \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, bt)$ y consideremos su proyección $\mathcal{C}^*$ sobre el plano OXY mediante un haz de rectas paralelas que forman un ángulo θ con el eje OZ.

a) Hallar la ecuación de la proyección $\mathcal{C}^*$.

b) ¿Para qué valores de θ la proyección tendrá puntos singulares?

Nota: Dada la simetría de la hélice podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que el haz de rectas es paralelo al plano OYZ.

/ Figura Cabri DOS/ Applet CabriJava

13 Probar que si todas las rectas tangentes a una curva son paralelas entonces la curva es una recta.

14 Probar que si la normal principal a una curva tiene dirección constante, la curva es una recta.

15 Consideremos la espiral logarítmica $\vec{\alpha}(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, 0)$. Probar que el ángulo entre $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\alpha}\,'(t)$ es constante.

16 Sea $\vec{\alpha}(t)$ una curva regular. Supongamos que exista $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\alpha}(t) - \vec{a}$ es ortogonal a $\vec{\alpha}'(t), \forall t$. Probar que dicha curva está contenida en una esfera.

17 Ecuación de la cónica en el plano XY de mayor contacto, en $(0,0,0)$, con la cúbica $x = t,\ y = t^3,\ z = 0$.

18 ¿Qué condición se debe cumplir para que el plano osculador tenga un contacto de orden 3 con una curva en un punto?

19 Dada la parábola $y = x^2$, se pide: Hallar el punto P en el que la tangente forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje de las "x".

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasando por P y con centro en la recta $4x - 4y + 7 = 0$, tenga el mayor contacto posible con la parabóla en el punto P. Determinar dicho orden de contacto.

20 Hallar el orden de contacto, en el punto $(0,0,0)$, entre las curvas

$$\mathcal{C}_1 : \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t - 1, \quad z = \operatorname{sen} 2t. \qquad \mathcal{C}_2 : \quad x + y + z = 0; \quad x^2 - y^2 + z^2 = 0.$$

21 Demostrar que si en todo punto de una curva el orden de contacto de la curva con la tangente es 2, la curva es una recta.

22 Probar que la condición necesaria y suficiente para que en el punto (x_0, y_0) de la curva plana $y = f(x)$, la tangente tenga un contacto de orden n con la curva es que

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0.$$

Además, que según n sea par o impar la tangente atraviesa la curva en el punto o no.

23 Establecer que las curvas $y - 2 = 4(x-3)^4$ e $y - 2 = (x-3)^6$ tienen en el punto $(3, 2)$ un contacto de orden tres.

24 Sea la curva de ecuaciones $y = 2(1 - \cos x)$, $z = 3(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)$. Determinar el plano osculador, la esfera osculatriz y la circunferencia osculatriz en el punto $x = 0$, así como el orden de contacto de ellos con la curva.

25 Sea la curva definida por las ecuaciones: $y = 2(1 - \cos x)$, $z = 3(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)$. Determinar el plano osculador y la circunferencia osculatriz en $x = 0$.

26 Calcular la circunferencia osculatriz de la elipse $(x^2/16) + (y^2/25) = 1$ en el punto $(0, 5)$, y hallar el orden de contacto de dichas curvas.

27 Determinar el orden de contacto de la curva $x = at$, $y = bt^2$, $z = t^3$, con la tangente, con el plano osculador y con la circunferencia osculatriz en el origen.

28 Se considera la curva definida paramétricamente por las ecuaciones: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^4$. Determinar el plano osculador y la circunferencia osculatriz en $(0, 0, 0)$.

29 Dar una condición necesaria y suficiente, en términos de la curvatura y de la torsión, para que una curva y su circunferencia osculatriz tengan un contacto de orden tres en un punto.

30 Consideremos, en el plano, la circunferencia Γ con centro en $(0, 2)$ y que pasa por el origen de coordenadas. Una recta variable que pasa por el origen corta a la circunferencia Γ además en otro punto L y a la recta paralela al eje OX, que pasa por $(0, 4)$, en M. Sea $\mathcal{C}$ la curva cuyos puntos P tienen la misma abscisa (coordenada "x") que M y la misma ordenada (coordenada "y") que L.

Encontrar una parametrización de la curva $\mathcal{C}$, conocida como la "Cúbica de Agnesi". (Ver también)

Ulilizar la parametrización $\vec{\beta}(t) = (2 \operatorname{sen} 2t, 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{tag} t)$ de la circunferencia Γ, (Ver también) para obtener la siguiente parametrización de la curva $\mathcal{C}$:

$$\vec{\alpha}(t) = (4 \operatorname{cotg} t, 4 \operatorname{sen}^2 t).$$

Comprobar que la circunferencia osculatriz de $\mathcal{C}$ en $(0, 4)$ es la circunferencia Γ. Determinar el orden de contacto entre ambas curvas.

31 Hallar el orden de contacto de la curva $x = t, y = t^3, z = t^2$, con el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

32 Demostrar que la curva de representación paramétrica:

$$x = \cos t + \sqrt{3}(-1 + \operatorname{sen} t), y = \cos t - \sqrt{3}(-1 + \operatorname{sen} t), z = 2(-1 + \cos t)$$

es una circunferencia. Encontrar su centro, su radio y la ecuación del plano que la contiene.

33 Hallar el orden de contacto en el punto $(1, 1, 0)$ entre las curvas

$$\mathcal{C}_1 : \ x = \cos t + \operatorname{sen} t, \ y = \cos t - \operatorname{sen} t, \ z = t^3; \qquad \mathcal{C}_2 : \ xy + z - 1 = 0, \quad (x + y)^3 + z^2 - 8 = 0.$$

34 Sea una curva de representación paramétrica $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$, si $\vec{\alpha}\,'(t)$ y $\vec{\alpha}''(t)$ son linealmente dependientes, entonces la curva es una recta.

35 Demostrar que una curva es una recta si todas sus tangentes pasan por un punto fijo.

36 Hallar la función f más general posible para que sea plana la curva $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, f(t))$.

37 Demostrar que si todos los planos osculadores de una curva pasan por un punto fijo, la curva está en un plano.

38 Demostrar que la curvatura de una curva regular en un punto P es la curvatura en P de la curva plana que resulta de proyectar aquella sobre su plano osculador en el punto P.

39 Demostrar que si dos curvas tienen las mismas rectas binormales en puntos correspondientes, las curvas son planas.

40 Una curva con curvatura no nula es plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.

41 Averiguar si la curva $x = 3t^3 + 2t,\ y = 2t^4 + t^3 + 2,\ z = t^4 - t^3 - t + 3$ es plana. Si lo es, determinar el plano que la contiene.

42 Demostrar que la siguiente curva $x = t^2 - 1,\ y = t^2 + 2t + 3,\ z = t + 1$ es plana y encontrar la ecuación del plano que la contiene.

43 Dada la curva $x = 3at, \quad y = 3bt^2, \quad z = ct^3,$ determinar la ecuación de la curva intersección de las tangentes a la curva dada con su plano osculador en el punto correspondiente a $t = 1$.

44 Sea $\mathcal{C}$ una curva plana. Tomando un sistema de referencia $\{P; \vec{t}, \vec{n}\}$, con origen en un punto P de la curva y con vectores básicos, el tangente unitario y la normal unitaria en P. Demostrar que el radio de curvatura viene dado por

$$R = \lim_{s\to 0} \frac{\xi^2}{2\eta},$$

donde s es el parámetro arco y (ξ, η) son las coordenadas de puntos próximos a P en la referencia dada.

Y así mismo, el radio de curvatura de una curva tangente en $O(0,0)$ al eje OX está dado por

$$R = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2y}.$$

Aplicar esto, cuando $P(0,0)$, a las curvas $y = ax^2$ e $y = 1 - \cos x$.

45 Comprobar que si $x = x(t),\ y = y(t)$, son las coordenadas cartesianas de una curva plana, la expresión del radio de curvatura es $R = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$.

Y en coordenadas polares, $\rho = \rho(\theta)$: $R = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

46 Sea $\mathcal{C}$ una curva plana y $\mathcal{C}^*$ una trayectoria ortogonal a las normales a $\mathcal{C}$. Demostrar que los segmentos de las normales entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ tienen todos la misma longitud.

47 La curvatura en un punto de una curva plana de la familia definida por las ecuaciones

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad z = 0,$$

está dada por la fórmula:

$$\kappa = \frac{MN(M_y + N_x) - N^2 M_x - M^2 N_y}{(M^2+N^2)^{3/2}}.$$

48 Demostrar que si la curvatura de un arco de curva plana $\mathcal{C}$ es monótona, entonces la longitud de arco correspondiente de la curva $\mathcal{C}^*$, lugar de sus centros de curvatura, es igual a la diferencia entre los radios de curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en los puntos extremos del arco considerado.

49 Decir si la curva $x = 1+t, \quad y = t^2+1, \quad z = 1+2t-t^2,$ es plana (está contenida en un plano) y, en caso afirmativo, encontrar el plano que la contiene.

50 Si las tangentes a una curva cortan a una misma recta, entonces la curva es plana.

51 Sea $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ una curva plana con vector tangente unitario, se designa por $\theta = \theta(s)$ el ángulo que la tangente forma con el eje de las "x". Demostrar que la curvatura viene dada por $\kappa(s) = \theta'(s)$.

52 Demostrar que para cualquier punto de una parábola, el radio de curvatura es el doble de la distancia, medida sobre la perpendicular a la curva desde ese punto a la directriz.

53 Probar que la curva $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = 2 - \cos t$ es plana y determinar el plano que la contiene.

54 Sea $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ una curva paramétrica y $\vec{a}$ un vector fijo. Supongamos que el vector tangente $\vec{\alpha}'(t)$ es ortogonal a $\vec{a}$, para todo $t \in I$ y que $\vec{\alpha}(0)$ es también ortogonal a $\vec{a}$. Probar que $\vec{\alpha}$ es una curva plana situada en un plano perpendicular a $\vec{a}$.

55 Sea $\mathcal{C}$ la curva en el espacio con ecuación paramétrica

$$x = 1+t^2, \quad y = 1+t, \quad z = 2t.$$

a) Mostrar que $\mathcal{C}$ es plana.

b) Encontrar una ecuación del cono con diretriz $\mathcal{C}$ y vértice en en el origen de coordenadas.

56 Sea $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ una curva regular con curvatura no nula. Supongamos que el normal nornal unitario $\vec{n}$ es proporcional al vector posición; esto es, $\vec{n}(s) = c(s)\vec{\alpha}(s)$, para todo s, donde c es una función diferenciable. Determinar tal curva.

57 Sea $\vec{\alpha}(s)$ un curva de clase C^2 en $I\!R^3$, parametrizada con parámetro arco. Supóngase que para alguna funcion $f(s)$, se tiene que $\ddot{\vec{\alpha}}(s) = f(s)\vec{\alpha}(s)$. Demostrar que se trata de una curva plana (una recta, una circunferencia de radio $1/\sqrt{-f(s)}$, o parte de ellas).

58 Probar que la tangente a una curva en un punto y la tangente en el correspondiente punto de los centros de curvatura de la curva tienen direcciones perpendiculares.

59 Dada una curva $\mathcal{C}$ se toma sobre cada tangente un segmento de longitud constante, cuyo extremo determina una curva $\mathcal{C}^*$. Demostrar que el plano normal a esta curva pasa por el correspondiente centro de curvatura de la primera.

60 Demostrar que la normal principal a una curva alabeada ($\tau \neq 0$) es la normal principal al lugar de los centros de curvatura en los puntos donde el radio de curvatura es máximo o mínimo.

61 El lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva de curvatura constante es otra curva de curvatura constante e igual a la de la primera. Cada una de estas curvas es el lugar de los centros de curvatura de la otra. Los planos osculadores de las dos curvas en puntos correspondientes son perpendiculares el uno al otro.

62 Demostrar que la curva que tiene la propiedad de que todas sus normales principales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

63 Hallar la ecuación del plano osculador en un punto general de la curva dada por $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$, y demostrar que los planos osculadores en tres puntos de la curva se intersecan en un punto que está en el plano determinado por estos tres puntos.

64 Consideremos la curva intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = b^2$. Determinar la tangente, el plano normal y el plano osculador en un punto genérico de la curva.

65 Demostrar que las fórmulas de Frenet pueden escribirse de la forma

$$\dot{\vec{t}} = \vec{v} \times \vec{t}, \qquad \dot{\vec{n}} = \vec{v} \times \vec{n}, \qquad \dot{\vec{b}} = \vec{v} \times \vec{b}.$$

Donde las derivadas son respecto al parámetro natural. Al vector $\vec{v}$ se le denomina vector de Darboux y es $\vec{v} = \tau\vec{t} + \kappa\vec{b}$.

66 Encontrar el plano normal a la curva $x^2 - y^2 + xyz^2 = 11,\ x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 30$ en el punto $(3, 2, 1)$.

67 Demostrar que si θ y ϕ son los ángulos que la tangente y la binormal a una curva forman con una recta fija en el espacio, entonces $\tau \operatorname{sen} \theta d\theta = \kappa \operatorname{sen} \phi d\phi$.

68 Determinar la función f para que las normales principales a la curva $x = u,\ y = \operatorname{sen} u,\ z = f(u)$, sean paralelas al plano $x = 0$.

69 Probar que cuando dos curvas son simétricas respecto al origen tienen las mismas curvaturas y torsiones opuestas.

70 Probar que si los planos normales de una curva tienen un punto en común, la curva está en una esfera de centro ese punto.

71 Demostrar que los planos osculadores de una curva alabeada $\mathcal{C}$ ($\tau \neq 0$) permanecen tangentes a una esfera fija de centro en O si y sólo si los planos rectificantes de $\mathcal{C}$ pasan por O. En tal curva se tiene que τ/κ es una función lineal del arco.

72 Demostrar que los planos osculadores a una curva alabeada (de torsión no nula) no pueden ser paralelos a una recta.

73 Hallar la curvatura, la torsión y las ecuaciones de la recta tangente, la recta normal principal y la recta binormal, en el punto $(2, 4, 16/3)$, de la curva $\vec{\alpha}(u) = (u, u^2, 2u^3/3)$.

74 Hallar las ecuaciones de los elementos del triedro de Frenet, en $(2,1,1)$, de la curva $x^2+z^2=5,\ y^2+z^2=2$.

75 Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos de la curva $x=2t^3+3t^2,\ y=6t^2+1,\ z=t^3-3t,$ en los cuales los planos osculadores pasan por el origen de coordenadas.

76 Determinar en el punto $(11,5,0)$ de la cúbica $x=t^3+3, \quad y=t^2+1, \quad z=t-2,$ la tangente, normal principal y binormal; plano normal, osculador y rectificante; radio de curvatura y torsión.

77 Hallar la ecuación de la tangente y del plano osculador en el punto $(2,-2,2)$ a la curva

$$2x^2-z^2-3x+2=0; \qquad x^2-z^2+x+y=0.$$

78 Sea $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s)$ una representación paramétrica natural de una curva, si

$$\vec{\alpha}^{(n}(s)=a_n(s)\vec{t}(s)+b_n(s)\vec{n}(s)+c_n(s)\vec{b}(s),$$

$$\vec{\alpha}^{(n+1}(s)=a_{n+1}(s)\vec{t}(s)+b_{n+1}(s)\vec{n}(s)+c_{n+1}(s)\vec{b}(s),$$

comprobar que

$$a_{n+1}=a_n'-\kappa b_n, \qquad b_{n+1}=b_n'+\kappa a_n-\tau c_n, \qquad c_{n+1}=c_n'+\tau b_n.$$

79 Demostrar que si las rectas normales principales de una curva $\mathcal{C}$ son las rectas binormales de otra curva $\mathcal{C}^*$, se cumple:

$$\frac{\kappa^2+\tau^2}{\kappa}=cte.$$

siendo κ y τ la curvatura y torsión de la curva $\mathcal{C}$.

80 Encontrar las rectas tangente, normal principal y binormal y los planos osculador, normal y rectificante en el punto $(2,0,2)$ de la curva intersección de la esfera y cilindro siguientes

$$x^2+y^2+z^2-4x=0, \qquad x^2+y^2-2x=0.$$

81 Sea $\overrightarrow{\beta}: I\to I\!R^3$ una función vectorial satisfaciendo $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=1$ y $[\vec{\beta},\vec{\beta}\,',\vec{\beta}\,'']\neq 0$. Demostrar que la curva

$$\vec{\alpha}(t)=a\int\vec{\beta}(t)\times\vec{\beta}\,'(t)dt \qquad\qquad (*)$$

tiene torsión constante igual a $1/a$.

Recíprocamente, si una curva $\vec{\alpha}$ tiene torsión constante $\tau=1/a$, dicha curva se expresa de la forma $(*)$, para una función vectorial $\vec{\beta}$ verificando $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=1$ y $[\vec{\beta},\vec{\beta}\,',\vec{\beta}\,'']\neq 0$.

82 Comprobar que la curva $\vec{\alpha}(u)=(\frac{4}{5}\cos u, 1-\operatorname{sen} u, -\frac{3}{5}\cos u)$ es una circunferencia. Encontrar su centro, radio y plano donde se encuentra.

83 Demostrar que la curvatura de una curva regular $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$ está dada por

$$\kappa^2v^4=\|\vec{\alpha}\,''\|^2-\left(\frac{dv}{dt}\right)^2, \qquad \text{donde} \quad v=\|\vec{\alpha}\,'\|.$$

84 Considerar un punto P de una curva $\mathcal{C}$ y un punto P_1 próximo a P sobre $\mathcal{C}$, en el sentido positivo desde P. Sobre el lado positivo de la tangente a $\mathcal{C}$ en P, colocamos un segmento PM igual a la longitud del arco Δs de $\mathcal{C}$ entre P y P_1. Denotamos la longitud del segmento P_1M por d. Entonces probar que la curvatura κ de $\mathcal{C}$ en P está dada por

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2d}{\Delta s^2}.$$

85 Probar que si $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, donde s el parámetro arco, es una curva de curvatura constante, entonces $\vec{\beta}(s) = \int_0^s \vec{b}(u)\, du$ es una curva de torsión constante.

86 Demostrar que la distancia entre las dos tangentes en dos puntos de una curva, parametrizada por parámetro arco, cuyos parámetros se diferencia en s, está dada aproximadamente por

$$d = \frac{\kappa\tau s^3}{12}.$$

87 La tercera curvatura en un punto P de una curva $\mathcal{C}$ se define como el límite de la razón entre el ángulo que forman las normales principales en P y en un punto próximo Q en $\mathcal{C}$ y la longitud del arco PQ, cuando el punto Q se aproxima a P a lo largo de $\mathcal{C}$ (definición similar a la de curvatura si se reemplaza la recta tangente por la recta normal principal). Demostrar que la tercera curvatura es:

$$(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}.$$

88 Demostrar que si la distancia al origen de coordenadas de los planos osculadores a una curva alabeada ($\tau \neq 0$) es constante, entonces los planos rectificantes pasan por el origen.

89 Sea $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ una curva $\mathcal{C}$ parametrizada por el parámetro arco y de torsión no nula. Consideremos la curva $\mathcal{C}^*$ dada por

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \lambda(s)\vec{t}(s) + \mu(s)\vec{n}(s) + \nu(s)\vec{b}(s),$$

donde $\vec{t}, \vec{n}$ y $\vec{b}$ son los vectores tangente unitario, normal principal y binormal respectivamente de la curva $\mathcal{C}^*$. Probar que si los planos osculadores de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ en puntos correspondientes son paralelos, entonces también lo serán las rectas tangentes, normales principales y binormales.

90 Una curva de representación paramétrica $\vec{\alpha}(u)$ tiene torsión τ constante no nula y el vector binormal viene dado por $\vec{b}(t) = (\cos^2 u, \operatorname{sen} u \cos u, \operatorname{sen} u)$. Demostrar que

$$\vec{\alpha}'(u) = \frac{1}{\tau}\vec{b}'(t) \times \vec{b}(t).$$

Determinar, por integración, las ecuaciones paramétricas de la curva. (↻)

91 $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t)$ representa una curva, trayectoria de un móvil en el espacio, donde el parámetro t representa el tiempo.

El vector velocidad es $\vec{\alpha}'(t)$ y la velocidad es su módulo $v = \|\vec{\alpha}'(t)\|$. El vector aceleración es la variación del vector velocidad respecto al tiempo, es decir, el vector $\vec{\alpha}''(t)$. Este vector aceleración se descompone en dos vectores, uno $\vec{a}_t$ tangente a la trayectoria y otro $\vec{a}_n$ en la dirección del vector normal principal (componente normal).

Obtener los módulos de estos dos vectores y explicar la siguiente afirmación: "Siempre que haya un cambio del módulo del vector velocidad habrá componente tangencial de vector aceleración y cuando haya cambio del vector velocidad habrá componente normal del vector aceleración".

92 Demostrar que si los planos rectificantes de una curva pasan por un punto fijo, la razón τ/κ es una función lineal del arco.

Recíprocamente, si una curva satisface $\tau/\kappa = s/a$ ($a = cte.$) entonces sus planos rectificantes pasan por un punto fijo.

93 Hallar la curvatura y torsión de la curva intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2-x=0$, en el punto $P(1/2,1/2,1/\sqrt{2})$.

94 Dada la curva de ecuaciones $x^3+yz=1; y^3+xz+z^2=1$, hallar los elementos del triedro de Frenet en el punto $(1,1,0)$.

95 Hallar la normal principal, la binormal, la curvatura, la torsión y el centro de curvatura de la curva $y=x^2-1; z=2x^4$, en el punto $(1,0,2)$.

96 Consideremos la curva, definida paramétricamente, por

$$x=\operatorname{sen} u \quad y=\frac{1}{2}\cos^2 u \quad z=\cos u.$$

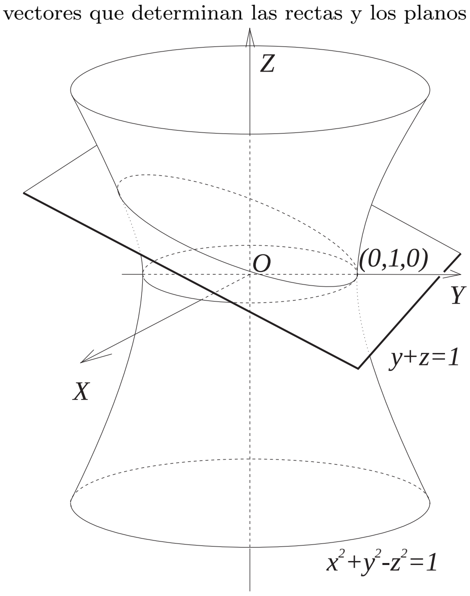
Determinar en $u=0$, el vector tangente, el plano osculador, la normal principal, la binormal, la curvatura y torsión.

97 Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente, normal principal y binormal y las de los planos osculador, normal y rectificante y la curvatura en el punto $(0,1,0)$ a la curva, definida implícitamente (intersección del un hiperboloide con un plano), siguiente:

$$x^2+y^2-z^2=1, \qquad y+z=1.$$

Comprobar además la fórmula del Teorema de Meusnier para dicha sección plana del hiperboloide dado con el plano dado el punto dado. Observar que las sección normal correspondiente es la circunferencia de radio 1, intersección del hiperboloide con el plano $z=0$.

Nota.- Basta con tomar una de las coordenadas (la conveniente) como parámetro. No es necesario obtener explícitamente las ecuaciones paramétricas de la curva, pues, para lo que nos piden, sólo hay que conocer las derivadas, derivando implícitamente y particularizando en el punto en cuestión. No necesitamos que los vectores que determinan las rectas y los planos sean unitarios.



98 Sea $\mathcal{C}_1$ una curva plana y $\mathcal{C}_2$ su imagen por una inversión de centro en un punto no situado en $\mathcal{C}_1$. Demostrar que si P es un punto donde κ' se anula, la torsión de $\mathcal{C}_2$ en el punto correspondiente es es nula.

99 Sea la curva de ecuaciones paramétricas;

$$x=\cos t, \qquad y=\operatorname{sen} t, \qquad z=t^2$$

1. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva en el punto $P(1,0,0)$.
2. Hallar las ecuaciones del plano normal y del plano osculador a la curva en el punto $Q(1,0,0)$.
3. Hallar la curvatura y torsión en un punto arbitrario de la curva.

100 Dada la familia de curvas $\mathcal{C}_\lambda$ dependientes de un parámetro:

$$x(t) = 2\cos t, \qquad y(t) = \lambda(t + e^t), \qquad z(t) = \operatorname{sen} t, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Determinar para que la curva $\mathcal{C}_\lambda$ esté contenida en un plano.
2. Ecuación de la recta normal principal y la curvatura en un punto arbitrario de la curva obtenida en el apartado anterior.
3. Hallar la ecuación del plano osculador y la torsión en el punto $P(2, 1, 0)$ para la curva de la familia correspondiente $\lambda = 1$.

101 Considérese la curva de ecuación: $\vec{\alpha}(t) = (\cos t + \operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t, \cos t)$

1. Calcular los vectores unitarios $\vec{\mathbf{t}}_0, \vec{\mathbf{n}}_0, \vec{\mathbf{b}}_0$ (tangente, normal principal y binormal) en el punto $A(1, 1, 1)$.
2. Encontrar la expresión paramétrica de la curva respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}_0 = \{O; \vec{\mathbf{t}}_0, \vec{\mathbf{n}}_0, \vec{\mathbf{b}}_0\}$.
3. Demostrar que la curva es plana. ¿De qué curva se trata?

102 Sea una curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco $\vec{\alpha}(s)$. Supongamos que el vector posición $\vec{\alpha}(s)$ es siempre combinación lineal de los vectores normal principal y binormal. Demostrar que la curva no pasa por el origen de coordenadas $O \in \mathbb{R}^3$.

103 Ecuación de la tangente a la curva $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt), a, b > 0$ en el punto $t = t_0$. Probar que el ángulo entre $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{\alpha}\,'(t)$ es constante.

104 Encontrar el plano tangente a la hélice $x = 4\cos u,\ y = 4\operatorname{sen} u,\ z = 8u,$ en el punto correspondiente a $u = \pi/4$, que sea paralelo al eje OZ.

105 Se denomina hélice general a aquella curva cuyas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. Demostrar que: “Una curva es una hélice general si y sólo si sus binormales forman un ángulo constante con una recta fija”.

106 Comprobar que la curva $\vec{\alpha}(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ es una hélice general. Determinar el vector $\vec{u}$ que forma un ángulo constante con la tangente.

107 Se define una hélice como aquella curva cuya tangente forma un ángulo constante con una dirección fija.

Demostrar que una curva es una hélice si y sólo si la longitud del arco limitado por un punto fijo P_0 y uno cualquiera P de la curva es una función lineal de las coordenadas cartesianas rectangulares de P.

108 Si las normales principales a una curva son todas paralelas a un plano fijo, la curva es una hélice general.

109 Si $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ es una hélice general también lo es la curva

$$\vec{\beta}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\vec{t}(s) - \int_{s_0}^{s} \vec{n}(u)du.$$

110 Demostrar que una curva $\mathcal{C}$ es una hélice con eje OZ si sólo si la tercera componente de las coordenadas de sus puntos es $z = \sigma \operatorname{cotg}\theta + z_0$, siendo σ el parámetro longitud de arco de la curva proyección ortogonal de $\mathcal{C}$ sobre el plano XOY, z_0 constante y θ el ángulo entre la tangente a $\mathcal{C}$ y el eje OZ.

111 Los vectores tangentes unitarios al desplazarse a lo largo de una curva $\mathcal{C}$, engendran otra curva situada sobre la esfera de centro el origen y radio 1; esta curva recibe el nombre de indicatriz esférica de $\vec{t}$ o indicatriz tangente. Demostrar que una curva es una hélice general si y sólo si su indicatriz esférica tangente es una circunferencia.

112 Demuéstrese que la curvatura κ^* de la proyección de una hélice sobre el plano normal al eje de la hélice viene dada por $\kappa = \kappa^* \operatorname{sen}^2\theta$, donde $\theta \neq 0$ es el ángulo que forma el eje con los vectores tangentes a la hélice y κ la curvatura de la hélice.

113 Probar que la curva $x = at$, $y = bt^2$, $z = t^3$, es una hélice general si y sólo si $2b^2 = 3a$. En este caso hallar el eje y la ecuación de la superficie cilíndrica en la que está contenida la curva.

114 Demostrar que una curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ es un hélice si y sólo si el vector rotación instantánea $\vec{v}$ (vector de Darboux), definido por

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{v} \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{v} \times \vec{n}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{v} \times \vec{b}.$$

tiene una dirección fija.

115 Una hélice circular es una hélice cuya proyección sobre el plano perpendicular a su eje es una circunferencia o parte de ella. Demostrar que una hélice de curvatura constante es necesariamente una hélice circular.

116 Sea $\mathcal{C}$ una hélice general situada sobre un cilindro $\mathcal{M}$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el lugar geométrico de los centros de curvatura de $\mathcal{C}$ sea una hélice general situada sobre un cilindro de generatrices paralelas a las de $\mathcal{M}$ es que la sección recta de $\mathcal{M}$ sea una circunferencia o una espiral logarítmica.

117 Demostrar que los puntos de la hélice $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ en los cuales los planos osculadores pasan por un punto fijo, están en un plano.

118 Probar que los planos osculadores a una hélice que pasan por un punto común, que no está en le hélice, son tangentes a la hélice en puntos que están en un plano.

119 En las binormales a una hélice general se toman puntos a una longitud fija desde la curva. Demostrar que dichos puntos describen otra hélice general.

120 Determinar las curvas trazadas en el cilindro $y^2 = 4ax$ tales que sus tangentes formen un ángulo de 45° con la recta $z = 0$, $y = O$. Probar que en un punto cualquiera de las curvas halladas la curvatura y torsión son iguales; calcular ese valor común.

121 Demostrar que es una hélice la curva de ecuación: $x = e^t(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)$, $y = e^t(2\cos t - \operatorname{sen} t)$, $z = 3e^t$.

122 Encontrar los elementos del triedro de Frenet, la curvatura y torsión de la curva: $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$. Mostrar que se trata de una hélice.

123 Demostrar que una hélice general tiene una representación paramétrica natural de la forma:

$$x = x(s)\vec{e}_1 + y(x)\vec{e}_2 + s\cos\theta\vec{e}_3.$$

124 Probar que el producto de la torsión de una hélice circular por la torsión del lugar geométrico de los centros de curvatura de dicha hélice es igual a κ^2.

125 Las tangentes a una curva dada forman un ángulo constante θ con el eje OZ. Calcular la torsión en función de la curvatura y del ángulo θ.

126 Establecer que la curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, s parámetro arco, es una hélice si y sólo si $[\vec{\dot{\alpha}}(s), \vec{\ddot{\alpha}}(s), \vec{\dddot{\alpha}}(s)] = 0$.

127 Mostrar que la curva $\mathcal{C}$ solución del Ejercicio 172 de ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{e^t}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - t), \quad y = \frac{e^t}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4} - t), \quad z = \frac{e^t}{2}\sqrt{2}.$$

es una hélice situada sobre un cono de revolución de vértice en el origen de coordenadas y que este punto es un punto singular para dicha curva.

Determinar las indicatrices esféricas de las tangentes, de las normales principales y de las binormales de $\mathcal{C}$.

128 Probar que si dos curvas tienen las mismas normales principales, entonces sus planos osculadores se cortan bajo un ángulo constante.

129 Dos curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ se dicen que son de Bertrand si tienen las mismas normales principales. Demostrar que la distancia entre los puntos correspondientes de dos curvas de Bertrand es constante.

130 El ángulo entre las tangentes a dos curvas de Bertrand en puntos correspondientes es constante.

131 Dos curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ reciben el nombre de curvas de Bertrand si sus normales principales son comunes. Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una curva plana, existe siempre una curva $\mathcal{C}^*$ tal que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ son curvas de Bertrand.

132 Demostrar que el producto de las torsiones de las curvas de Bertrand (Ejercicio 131) es constante.

133 Si $\mathcal{C}$ es una curva con torsión τ no nula, demostrar que es una curva de Bertrand (es decir, que existe una curva $\mathcal{C}^*$ tal $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ son curvas de Bertrand), si y sólo si existen constantes λ y μ tales que $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$.

134 Probar que si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ son curvas de Bertrand y si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{**}$ son también curvas de Bertrand, existe una infinidad de curvas cada una de las cuales con $\mathcal{C}$ son curvas de Bertrand. Demostrar que esto ocurre si y sólo si $\mathcal{C}$ es una hélice circular.

135 Probar que si una curva es plana sus evolutas son hélices.

136 Hallar las evolutas de la cicloide $x = a(t - \mathrm{sen}\, t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 0$. Comprobar que la evoluta plana corresponde a otra cicloide.

137 Hallar una fórmula que exprese el ángulo θ entre la normal a una curva en un punto P que es tangente a una evoluta dada y la normal principal de la curva en P.

138 Hallar las involutas de la hélice circular $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, bt)$. ¿Son curvas planas?

139 Demostrar que la curvatura y la binormal de una involuta $\mathcal{C}^*$ de la curva $\mathcal{C}$ viene dada por la expresión:

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2+\tau^2}{(c-s)^2\kappa^2}, \qquad \vec{b}^* = \frac{\kappa\vec{b}+\tau\vec{t}}{(c-s)\kappa\kappa^*}.$$

140 Demostrar que la normal principal de una evoluta $\mathcal{C}^*$ de la curva $\mathcal{C}$ es paralela a la tangente de $\mathcal{C}$.

141 Demostrar que $\operatorname{cotg}\left(\int \tau ds + c\right)$ es la razón de la torsión de una evoluta a su curvatura.

142 Probar que una esfera tiene un contacto de orden 2 al menos con una curva regular en un punto, en el que $\kappa \neq 0 \neq \tau$, si y sólo si la circunferencia osculatriz de la curva en P queda sobre la esfera.

143 Demostrar que el plano normal a una curva situada sobre una esfera pasa por el centro de la misma.

144 Establecer que las ecuaciones intrínsecas de las hélices esféricas pueden escribirse en la forma

$$\kappa^2 = \frac{1}{a^2 - s^2\operatorname{cotg}^2\theta}, \qquad \tau^2 = \frac{1}{a^2\operatorname{tag}^2\theta - s^2},$$

siendo a el radio de la esfera. (Y siempre que la curva posea un punto en el que $\kappa = 1/a$).

145 Una curva de clase C^4 tal que $\kappa \neq 0 \neq \tau$, está en una esfera si y sólo si

$$\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right) = 0.$$

146 Demostrar que los centros de las esferas osculatrices de una curva no esferica $\mathcal{C}$, forman otra curva $\mathcal{C}^*$ tal que sus tangentes son las rectas polares (rectas perpendiculares al plano osculador por el centro de curvatura) de $\mathcal{C}$ en los puntos correspondientes.

147 Demostrar que el plano osculador en un punto P^* del lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de una curva $\mathcal{C}$ es el plano normal en el punto P correspondiente de la curva.

148 Demostrar que la tangente a la indicatriz tangente de una curva es paralela a la tangente de su indicatriz binormal en puntos correspondientes.

149 Demostrar que la curvatura de la indicatriz binormal es $\kappa^{*2} = (\kappa^2+\tau^2)/\tau^2$.

150 Demostrar que la torsión de la indicatriz tangente es $\tau^* = \dfrac{\kappa\dot\tau - \tau\dot\kappa}{\kappa(\kappa^2+\tau^2)}$.

151 Dada una curva $\mathcal{C}$: $\vec\alpha = \vec\alpha(s)$ (s parámetro natural) se define su indicatriz tangente como la curva esférica $\mathcal{C}^*$: $\vec{\alpha^*}(s) = \vec{t}(s)$.

Verificar que la curvatura de $\mathcal{C}$ es $\kappa = \dfrac{ds^*}{ds}$, donde s^* es el parámetro arco de $\mathcal{C}^*$.

Si ahora denotamos también por $\vec{\alpha^*}(s) = \vec{b}(s)$, su indicatriz binormal, se tiene que $|\tau| = \dfrac{ds^*}{ds}$, donde s^* es el parámetro arco de $\mathcal{C}^*$.

152 Consideremos un punto Q del plano normal en un punto P de una curva $\mathcal{C}$. Cuando P se mueve a lo largo de $\mathcal{C}$, se exige que el lugar geométrico $\mathcal{C}_1$ de Q sea tal que su plano osculador en Q sea el plano normal de $\mathcal{C}$ en P. Probar que $\mathcal{C}_1$ es el lugar de los centros de las esferas osculatrices de $\mathcal{C}$.

153 Probar que la tangente a la curva lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices a una curva (no esférica) tiene la dirección de la binormal a la curva en el punto correspondiente.

154 Si una curva tiene curvatura constante, el centro de la esfera osculatriz coincide con el centro de la circunferencia osculatriz; el radio de la esfera osculatriz es constante; la curvatura de la curva lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices es constante e igual a la curvatura de la primera curva; el producto de las torsiones de las dos curvas es igual al cuadrado de la curvatura común; las dos curvas tienen las mismas mormales principales; cada una de las dos curvas es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la otra.

155 Si existe una familia de rectas normales a una curva (no necesariamente principales), dependiendo diferenciablemente del parámetro, que pasan por un punto fijo, demostrar que dicha curva está en una esfera.

156 Determinar la esfera osculatriz, en el punto $(1, 0, 0)$, a la curva

$$x = \cos t,\ y = \cos t \operatorname{sen} t,\ z = \operatorname{sen}^2 t.$$

157 Pruébese que la curva de ecuaciones $x = a \operatorname{sen}^2 u,\ y = a \operatorname{sen} u \cos u,\ z = a \cos u$, está sobre una esfera y que todos los planos normales pasan por el origen de coordenadas.

/ Figura Cabri DOS/ Applet CabriJava

158 Los centros de curvatura de una curva esférica son los pies de las perpendiculares trazadas desde el centro de la esfera a los planos osculadores.

159 Demostrar que el plano osculador corta a la esfera osculatriz a lo largo de la circunferencia osculatriz.

160 Encontrar el radio de curvatura y el radio de torsión de una curva situada sobre una esfera de radio uno, sabiendo que son iguales.

161 Calcular la curvatura y torsión de la curva

$$x = a \operatorname{sen} t \cos t, \quad y = a \operatorname{sen}^2 t, \quad z = a \operatorname{sen} t \qquad (a = cte.)$$

y probar que la curva es esférica.

/ Figura Cabri DOS/ Applet CabriJava

162 Sea $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ una curva $\mathcal{C}$ de curvatura $\kappa \neq 0$. ¿En qué condiciones se puede encontrar funciones $\theta = \theta(s)$ y $a = a(s)$, tales que

$$\vec{\alpha}^*(s) = \vec{\alpha}(s) + a(s)\big(\cos\theta(s)\vec{n}(s) + \operatorname{sen}\theta(s)\vec{b}(s)\big)$$

sea la ecuación de una curva $\mathcal{C}^*$, cuya tangente en un punto s sea normal a $\mathcal{C}$ en s?

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva esférica cerrada de longitud ℓ; mostrar, con ayuda de los cálculos precedentes, que

$$\int_0^\ell \tau(s)\, ds = 0.$$

163 Hallar la ecuación de la esfera osculatriz en el punto $(4, 3, 9)$ a la curva

$$x = 3 + \cos^2 t,\ y = 3 + \operatorname{sen} t,\ z = 9 - \operatorname{sen} t \cos t.$$

164 Hallar la ecuación de la esfera osculatriz en el punto $(4, 0, 0)$ a la curva

$$x = 4 \cos t,\ y = 4 \operatorname{sen} t,\ z = 3t.$$

165 ¿Es posible que exista una hélice esférica cuya curvatura sea $\kappa(s) = s$?

166 Determinar los radios y las coordenadas de los centros de las esferas osculatrices de la curva $\mathcal{C}$ de ecuaciones:

$$x = \frac{e^t}{2} \cos(\frac{\pi}{4} - t), \quad y = \frac{e^t}{2} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - t), \quad z = \frac{e^t}{2}\sqrt{2},$$

y establecer que el lugar geométrico de dichos centros es, como la curva $\mathcal{C}$, una hélice situada sobre un cono de revolución con vértice en el origen de coordenadas.

167 Sea $\vec{\alpha}(s)$ una curva en $I\!R^3$ con parametrización natural y de longitud L, se define la torsión total de la curva $\vec{\alpha}$ como el número

$$T = \int_0^L \tau(s) ds.$$

Si $\vec{v}(s)$ es un vector unitario normal a la curva y tal que $\vec{\dot{v}}(s)$ es tangente a la curva, demostrar que la diferencia del ángulo que forman $\vec{v}(L)$ con la normal principal $\vec{n}(L)$ y el que forman $\vec{v}(0)$ con $\vec{n}(0)$, coincide con la torsión total de la curva,

Demostrar que la torsión total de una curva cerrada que queda en una esfera de $I\!R^3$ debe ser nula.

168 Una hélice circular es una curva cuya curvatura y torsión son constantes y no nulas. Determinar la hélice circular que tiene un orden de contacto máximo en $(0, 0, 0)$ con la cúbica de ecuaciones $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$.

169 Hallar la representación paramétrica de la curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$, sabiendo que su torsión es $\tau = -1/a$ (siendo a una constante real positiva) y que un vector en la dirección y sentido del vector binormal es

$$\vec{v}(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen} t).$$

170 Encontrar la ecuación intrínseca de una curva plana tal que el segmento sobre toda tangente entre el punto de contacto y la proyección desde un punto fijo es de longitud constante.

171 Comprobar que si una curva plana es tal que el lugar de los puntos medios de los segmentos de las normales entre los puntos de la curva y los centros de curvatura es una línea recta su ecuación intrínseca es

$$\rho^2 + s^2 = a^2 \qquad (a = cte.,\ \rho \text{ radio de curvatura.})$$

172 Determinar las coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z de un punto variable de una curva alabeada $\mathcal{C}$, sabiendo que:

a) $O(0, 0, 0)$ es un punto dela curva;

b) Si s es la longitud de arco de la curva, contado a partir de O, la curvatura y torsión en el punto M de $\mathcal{C}$ de parámetro s son respectivamente $s\sqrt{2}$ y $-s\sqrt{2}$;

c) En el punto M_0 de parámetro $s_0 = 1$, la tengente, la normal principal y la binormal tienen los valores siguientes:

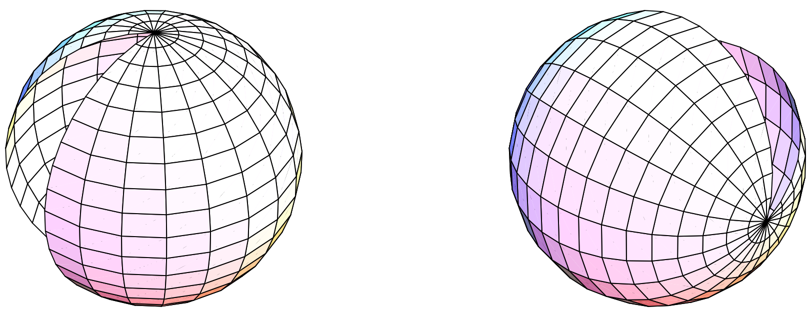
$$\vec{t}_0 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \quad \vec{n}_0 = (0, -1, 0), \quad \vec{b}_0 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

173 Sea una circunferencia tangente en el origen de coordenadas al eje OX. Tracemos la tangente a la circunferencia paralela al eje OX. Tracemos una recta desde el origen que corta a la circunferencia en un punto A y a la tangente en un B. Lugar geométrico del punto P con la ordenada de A y con la abscisa de B (curva de Agnesi). (↺) / Figura Cabri DOS/ Applet CabriJava

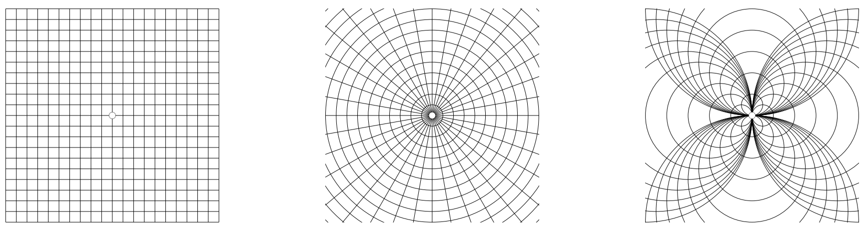
174 Demostrar que las dos cartas locales siguientes juntas recubren la esfera unidad:

$$\vec{\mathbf{x}} :]0, \tfrac{7\pi}{4}[\times] - \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\subset I\!R^2 \to I\!R^3 , \quad (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} v)$$
$$\vec{\mathbf{y}} :]0, \tfrac{7\pi}{4}[\times] - \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\subset I\!R^2 \to I\!R^3 , \ (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\cos(\tfrac{3\pi}{5} - \bar{u}) \cos \bar{v}, \operatorname{sen} \bar{v}, \operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{5} - \bar{u}) \cos \bar{v})$$

Determinar la transformación de coordenadas.



175 Consideremos las tres parametrizaciones del plano cuyas curvas paramétricas vienen representadas en las figuras siguientes:



1) $\vec{\mathbf{x}}(x, y) = (x, y, 0)$,
2) $\vec{\mathbf{y}}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, 0)$,
3) $\vec{\mathbf{z}}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0)$.

La primera, en coordenadas cartesianas; la segunda, en coordenadas polares; y en la tercera, los parámetros son tales que las líneas coordenadas son las curvas de la familia $\rho = \lambda \cos \theta$ y sus trayectorias ortogonales. Encontar esta última parametrización y la primera forma fundamental para cada una de las tres parametrizaciones.

176 Hallar una representación paramétrica regular del cilindro recto que tiene por directriz la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el plano XOY. Determinar las curvas coordenadas.

177 Sea la parábola $x = 0, \ y = z^2$ y la circunferencia $z = 0, \ x^2 + (y + 1)^2 = 1$ que se desliza sobre la parábola conservándose paralela a XOY. Hallar la ecuacion de la superficie que genera (superficie de traslación).

178 Ecuación de la superficie engendrada por una recta variable que se apoya en la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4 = 0, \ z = 0$ y en las rectas $r_1 : \ x = 0, \ z + 1 = 0$ y $r_2 : \ y = 0, \ z - 1 = 0$.

179 Sea la esfera $(x-a)^2+y^2+z^2=r^2$. Ecuación de la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en OZ, paralelas al plano XOY y que permanecen tangentes a la esfera.

180 Hallar el conoide de eje $x=0,\ y=0$ y directriz: $x=a\cos t,\quad y=a\,\mathrm{sen}\,t,\quad z=bt.$

(Conoide es la superficie generada por rectas que cortan a su eje perpendicularmente, y que se apoyan en la directriz). (↺)

181 Ecuación de la superficie cónica de vértice $(0,0,0)$ y directriz la curva $x-3=0,\ y^2+z^2-16=0$.

182 Ecuación de la superficie cónica de vértice $(1,1,1)$ y directriz $x=t^3,\ y=t^2,\ z=t$.

183 Ecuación del cilindro de generatrices paralelas a la recta $y=x,\ z=0$, y que pasan por la curva $y=x^2,\ x=z^2$.

184 Sea una recta y una circunferencia situadas en un plano, a los puntos de la circunferencia se les hace mover, con velocidad constante, paralelamente a la recta y al plano que las contiene se les hace girar con velocidad constante, alrededor de la recta.

Determinar las ecuaciones paramétricas la superficie que así se obtiene.

185 Demostrar que $\mathcal{M}$ es una superficie de revolución si y sólo si todas sus normales tienen intersección en una recta dada.

186 Ecuación de la superficie de revolución engendrada por la parábola $y=x^2,\quad z=0$ al girar alrededor del eje OX.

187 Encontrar una superficie de revolución cuya curvatura de Gauss es nula.

188 Hallar la superficie de revolución engendrada por la recta $x-2y+4=0$, $4x+y+2z=0$, al girar alrededor del eje $x-y+2z+1=0$, $2x+3y-z-2=0$.

189 Se considera la superficie $xyz-1=0$. Hallar:

1. Plano tangente en el punto $(1,1,1)$
2. Planos tangentes que contengan a la recta $y=z,\ x+2y-3=0$.
3. Planos tangentes paralelos al plano $x+y+z=4$.

190 Demostrar que los planos tangentes a la superficie dada por $z=xf(y/x)$, f función diferenciable, pasan por el origen.

191 Hallar el plano paralelo al plano $x+y+z=0$ y tangente a la superficie $x=u^2+v^2, y=u^3, z=v^3$.

192 Hallar el plano tangente a la superficie $x\,f(x,y,z)+y\,g(x,y,z)=0$, en los puntos del eje OZ.

193 Demostrar que los planos tangentes a la superficie $z=x+f(y-z)$ son paralelos a una misma recta.

194 Supongamos que una superficie admite una parametrización de la forma
$$\vec{\mathbf{x}}(u,v)=\vec{\alpha}(u)+\vec{\beta}(v)$$
con $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ curvas regulares. Demostrar que los planos tangentes a lo largo de las líneas coordenadas son todos paralelos a una recta.

195 Probar que es constante la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos intersecados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie
$$x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}.$$

196 Probar que el lugar geométrico de las proyecciones del centro del elipsoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ sobre sus planos tangentes es
$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

197 Establecer que el lugar geométrico de los puntos de contacto de los planos tangentes por el punto $(a,0,0)$ a la superficie $x=u+v, \quad y=uv, \quad z=u^2+4v^2$, son parábolas.

198 Demostrar que cuando un punto P se mueve a lo largo de una generatriz de un helicoide recto, la normal unitaria gira alrededor de la generatriz, de manera que la cotangente del ángulo que forma con el eje es proporcional a la distancia al eje.

199 Sobre la superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ se considera una curva $\mathcal{C}$ cuya proyección sobre el plano XOY es $r=e^\theta$. Hallar la intersección del plano XOY con la recta normal a la curva $\mathcal{C}$ contenida en el plano tangente a la superficie en el punto correspondiente, según se vaya moviendo éste.

200 Componentes en coordenadas curvilíneas locales del vector tangente al meridiano y paralelo en el punto de coordenadas (θ_0,ϕ_0) de la esfera:
$$x=a\cos\theta\cos\phi,\ y=a\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\ z=a\ \operatorname{sen}\theta.$$

201 Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie son concurrentes, entonces la superficie es una esfera o parte de ella.

202 Hallar la primera forma fundamental del plano en coordenadas cartesianas respecto de una base ortonormal. Calcular los g^{ij}. Lo mismo si las coordenadas del plano son las polares.

203 Hallar la primera forma fundamental y los g^{ij} de las superficies:

1. Esfera: $x=a\ \cos\theta\ \cos\phi,\ \ y=a\ \cos\theta\ \operatorname{sen}\phi,\ \ z=a\ \operatorname{sen}\theta$.
2. Superficie de revolución: $x=f(u)\cos v,\ \ y=f(u)\operatorname{sen}v,\ \ z=h(u)$.
3. Catenoide: $x=a\ \cosh(u/a)\cos v,\ \ y=a\ \cosh(u/a)\operatorname{sen}v,\ \ z=u$.
4. Pseudoesfera: $x=a\operatorname{sen}u\cos v,\ y=a\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v,\ z=a(\cos u+\ln\operatorname{tag}(u/a))$.
5. Helicoide: $x=u\cos v,\ \ y=u\operatorname{sen}v,\ \ z=av$.
6. Desarrollable tangente de arista de retroceso $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s)$, ($s$ parámetro natural): $\vec{\mathbf{x}}(s,v)=\vec{\alpha}(s)+v\vec{t}(s)$.
7. Toro: $x=(b+a\cos u)\cos v,\ y=(b+a\cos u)\operatorname{sen}v,\ z=a\operatorname{sen}u$.
8. Elipsoide: $x=a\cos u\cos v,\ y=b\cos u\operatorname{sen}v,\ z=c\ \operatorname{sen}u$.
9. Paraboloide hiperbólico: $x=a(u+v),\ \ y=b(u-v),\ \ z=uv$.

10. $x = ue^{av}\cos v,\ y = ue^{av}\operatorname{sen} v,\ z = f(u)e^{av}$.

204 Obtener la primera forma fundamental del plano cuando las líneas coordenadas son las familias de circunferencias de centro el eje de las "x" y las circunferencias de centro en el eje de las "y"y que pasan por el origen.

205 Estudiar si las líneas coordenadas de las superficies siguientes son trayectorias ortogonales: plano en cartesianas, plano en polares, esfera en coordenadas esféricas.

206 Demostrar que sobre una superficie de 1ª forma fundamental: $I = du^2 + G(u,v)dv^2$ son trayectorias ortogonales las dos familias uniparamétricas de curvas definidas por las ecuaciones diferenciales

$$du + \sqrt{G(u,v)}\,dv = 0 \ \text{ y } \ du - \sqrt{G(u,v)}\,dv = 0.$$

207 Hallar la función f para que las líneas coordenadas de la superficie siguiente sean ortogonales:

$$x = ue^{av}\cos v, \quad y = ue^{av}\operatorname{sen} v, \quad z = f(u)e^{av}.$$

208 Hallar la condición que deben verificar las curvas $\phi(u^1,u^2) = cte.$, $\psi(u^1,u^2) = cte.$, sobre la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$, para que sean ortogonales.

209 Dada una familia uniparamétrica de curvas sobre una superficie, se llama trayectoria isogonal de esta familia a una curva que interseca a todas las de la familia con un ángulo constante $\theta \neq 0$. Si $\theta = \pi/2$, la curva se llama trayectoria ortogonal. Calcular las trayectorias isogonales de la familia de rectas del cilindro circular $x = a\cos u^1,\ y = a\operatorname{sen} u^1,\ z = u^2$.

210 Hallar las trayectorias isogonales (Ejercicio 209) de los meridianos de una esfera (loxodromas).

211 Demostrar que las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $M\,du^1 + N\,du^2 = 0$ están dadas por : $(g_{11}N - g_{12}M)du^1 + (g_{12}N - g_{22}M)du^2 = 0$. Utilizar esta fórmula para obtener las trayectorias ortogonales de las curvas $r = \lambda\cos\theta$ en el plano, para todos los valores de λ.

212 Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que las curvas

$$A(du^1)^2 + 2Bdu^1du^2 + C(du^2)^2 = 0 \qquad (A, B, C \ \text{ funciones de } \ u^1,\ u^2)$$

formen una red ortogonal es que $g_{11}C - 2g_{12}B + g_{22}A = 0$.

213 Hallar las trayectorias ortogonales a las secciones planas $z = cte.$ del paraboloide $x^2 - y^2 = z$.

214 Hallar la familia de curvas ortogonales a las curvas $u\cos v = cte.$ sobre el helicoide recto.

215 Tomando líneas coordenadas ortogonales, demostrar que la ecuación diferencial de las curvas que son bisectrices de los ángulos que forman dichas líneas coordenadas es:

$$g_{11}(du^1)^2 - g_{22}(du^2)^2 = 0.$$

216 Hallar la longitud de la curva

$$u = e^{\frac{\operatorname{cotg}\beta}{\sqrt{2}}\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi,\ \beta = cte.$$

contenida en el cono $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,\theta) = (u\cos\theta,\ u\operatorname{sen}\theta,\ u)$. Demostrar que dicha curva corta a las generatrices del cono bajo un ángulo constante.

217 Hallar la intersección del helicoide $x = u\,\cos v,\ y = u\,\operatorname{sen} v,\ z = v$ con la recta $x = 1,\ \ y = 0$, y el ángulo de esta recta y la superficie en los puntos de intersección. (El ángulo entre curva y superficie se define como el ángulo entre la tangente a la curva y el plano tangente a la superficie).

218 Intersección del helicoide $x = u\cos v,\ y = u\operatorname{sen} v,\ z = v$ con la hélice $x = \cos t,\ \ y = \operatorname{sen} t,\ \ z = -t$. Hallar el ángulo entre la hélice y el helicoide en los puntos de intersección.

219 Demostrar que el ángulo θ entre la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ y la curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ en un punto común que corresponde a los valores $t_0,\ u_0^1,\ u_0^2$ de los parámetros viene dado por

$$\cos\theta = \frac{[\vec{\mathbf{x}}_1\ \ \vec{\mathbf{x}}_2\ \ \vec{\alpha}\,']}{\|\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2\|\ \|\vec{\alpha}\,'\|}.$$

220 Sea $x = f(t),\ \ z = g(t)\ \ (a < t < b)$, una curva regular $\mathcal{C}$ de clase C^n en el plano XOZ, con $f(t) > 0$. Hallar una representación paramétrica de la superficie obtenida al girar $\mathcal{C}$ alrededor de eje OZ. Demostrar que las líneas coordenadas son trayectorias ortogonales.

221 Sea la hélice $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t$, y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar los puntos de intersección y el ángulo que forma la hélice y la esfera en esos puntos.

222 Demostrar que el ángulo θ entre la curva $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y la superficie $F(x,y,z) = 0$ en un punto común viene dado por:

$$\cos\theta = \frac{F_x x' + F_y y' + F_z z'}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

223 En la superficie de primera forma fundamental $I \equiv v^2du^2 - 2uv\,du\,dv + 2u^2dv^2$, encontrar la ecuación diferencial que da las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $v^3/u^2 = cte$. Obtener la primera forma fundamental de la superficie cuando se toman como líneas coordenadas estas dos familias de curvas.

224 Dar una representación paramétrica del cono $x^2 + y^2 - 2xz = 0$, en la que una de las líneas coordenadas sean las secciones $\mathcal{C}_v$ del cono por planos perpendiculares al eje OZ y otras sean las generatrices del cono. Calcular la primera forma fundamental relativa a dicha representación paramétrica.

Encontrar las curvas sobre el cono que cortan ortogonalmente a las curvas $\mathcal{C}_v$, anteriores. Obtener, finalmente, la 1ª forma fundamental relativa a la representación paramétrica para la cual las líneas coordenadas sean las curvas $\mathcal{C}_v$ y sus trayectorias ortogonales.

225 Demostrar que los centros de curvatura de las secciones de una superficie por planos que pasan por una recta tangente en un punto P_0 están sobre una circunferencia.

226 Hallar la curvatura de la sección normal perpendicular al meridiano en un punto del paralelo $z = a^2$, en el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$.

227 Dada la superficie $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u \operatorname{sen} u + v, \cos u + uv, u + v)$.

Se pide: 1) Curvaturas principales en el punto $(1,1,1)$.

2) Calcular la curvatura de Gauss en el punto $(1,1,1)$.

3) Determinar los puntos de las generatrices rectilíneas que pasan por el punto $(1,1,1)$ para los cuales la curvatura de Gauss es máxima o mínima.

228 Encontrar las curvaturas principales y los vectores principales del cilindro circular, en cada uno de sus puntos; y de la silla de montar $(z = xy)$, en el origen.

229 En cada una de las superficies siguientes, hállese la aproximación cuadrática en las proximidades del origen:

$$a) \quad z = exp(x^2 + y^2) - 1, \qquad b) \quad z = \ln \cos x - \ln \cos y, \qquad c) \quad z = (x + 3y)^3.$$

230 Demuéstrese que no hay puntos umbilicales en una superficie en la que $K < 0$; y, que si $K = 0$, los puntos umbilicales son puntos planos.

231 Demuéstrese que la media de las curvaturas normales en dos direcciones ortogonales cualesquiera en P es la curvatura media $H(P)$.

232 La curvatura media es

$$H(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) d(\theta),$$

donde $k(\theta)$ es la curvatura normal, expresada en función de las curvaturas normales principales por la fórmula de Euler

$$k(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

233 Para una carta de Monge $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ verifíquese que

$$g_{11} = 1 + f_u^2; g_{12} = f_u f_v; g_{22} = 1 + f_v^2; \quad L_{11} = \frac{f_{uu}}{W}; L_{12} = \frac{f_{uv}}{W}; L_{22} = \frac{f_{vv}}{W}; \quad K = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{W^4}$$

donde g_{ij} y L_{ij} son los coeficientes de la 1ª y 2ª formas fundamentales, $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$ y K es curvatura de Gauss K. Encuéntrese la curvatura media H.

234 Obtener la superficie de revolución que resulta de girar la curva $x = f(z)$ situada en el plano XOZ, alrededor del eje OZ. Comprobar que la superficie puede ser parametrizada por coordenadas cilíndricas como

$$\vec{\mathbf{x}}(z,\theta) = \big(f(z)\cos\theta, f(z)\operatorname{sen}\theta, z\big).$$

Demostrar que la curvatura media está dada por

$$2H = \kappa + \frac{1}{f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}},$$

donde κ es la curvatura de la curva original $(\kappa = -f''/(1 + f'^2)^{3/2})$.

Obtener la curvatura media de la esfera centrada en el origen.

235 Verifíquese que el punto $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ es un punto umbilical si y sólo si existe un número k tal que

$$L_{11} = kg_{11}, \quad L_{12} = kg_{12}, \quad L_{22} = kg_{22}.$$

(k es la curvatura principal $k_1 = k_2$).

236 Si $\vec{v} = v^1\vec{\mathbf{x}}_1 + v^2\vec{\mathbf{x}}_2$ es tangente a $\mathcal{M}$ en $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, la curvatura normal en la dirección determinada por $\vec{v}$ es

$$k(\vec{v}) = \frac{L_{11}(v^1)^2 + 2L_{12}v^1v^2 + L_{22}(v^2)^2}{g_{11}(v^1)^2 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}(v^2)^2}.$$

237 Demostrar que la catenoide (Ejercicio 299) es la única superficie de revolución, distinta de un plano, que es una superficie mínima (de curvatura media nula).

238 Supongamos que la superficie $\mathcal{M}: \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v)$ es mínima. Entonces la región de la superficie paralela $\mathcal{M}_\lambda$:

$$\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(u, v) = \vec{\mathbf{x}}(u, v) + \lambda\vec{\mathbf{N}}(u, v), \qquad \lambda = cte$$

que corresponde a un dominio D en el plano de los parámetros tiene menor área que la correspondiente región en $\mathcal{M}$.

239 Sobre una superficie $\mathcal{M}$ se verifica:

$$III - 2H\,II + K\,I = 0,$$

donde H es la curvatura media, K es la curvatura de Gauss y I, II y III son la primera, segunda y tercera forma fundamental, definida esta última por:

$$III : T_P(\mathcal{M}) \times T_P(\mathcal{M}) \to T_P(\mathcal{M}) \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto III_P(\vec{u}, \vec{v}) = S_P(\vec{u}) \cdot S_P(\vec{v}).$$

240 Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ dos superficies con normales unitarias $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{N}}^*$, respectivamente y $\mathcal{C}$ la curva intersección de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$. Denotemos por k y k^* las curvaturas normales de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ en los puntos de $\mathcal{C}$ y en las direcciones tangentes a $\mathcal{C}$.

Probar que $k\vec{\mathbf{N}} - k^*\vec{\mathbf{N}}^* = \kappa\left((\vec{\mathbf{N}} \times \vec{\mathbf{N}}^*) \times \vec{n}\right)$, donde κ es la curvatura de $\mathcal{C}$ y $\vec{n}$ su vector normal principal.

Demostrar que $\|(\vec{\mathbf{N}} \times \vec{\mathbf{N}}^*) \times \vec{n}\|^2 = \operatorname{sen}^2\phi$, donde ϕ es el ángulo que forman $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{N}}^*$.

Establecer finalmente que $\kappa^2 \operatorname{sen}^2\phi = k^2 + {k^*}^2 - 2kk^*\cos\phi$.

241 Dada la superficie $\mathcal{M}$ de ecuación implícita $z = xy$ y el punto $P(1, 1, 1)$ de $\mathcal{M}$, se pide:

Probar que el punto $M(0, 0, -1)$ pertenece al plano tangente en el punto P.

Hallar la curvatura normal en P en la dirección de $\overrightarrow{PM}$.

Encontrar las direcciones principales, curvaturas principales y direcciones asintóticas en P.

242 Sea $\mathcal{M}$ una superficie $\mathbb{R}^3$, que contiene al origen O de coordenadas. Supongamos que los ejes OX y OY son tangentes a la superficie en O y que la matriz asociada al operador forma en O, relativa a la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, es

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{C}$ es la curva obtenida intersecando $\mathcal{M}$ con el plano $y = 0$:

- ¿Cuál es la curvatura normal de $\mathcal{C}$ en O?
- ¿Cuales son las curvaturas y direcciones principales en O?
- ¿Cuál es la curvatura geodésica de $\mathcal{C}$ en O?
- ¿Cuál es la curvatura de Gauss de $\mathcal{M}$ en O?
- Dibujar la superficie en las proximidades de O, suponiendo que la normal a la superficie en O es $(0, 0, 1)$.

243 Sea $\mathcal{M}$ el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

Hallar las curvaturas principales y la curvatura de Gauss en el punto $(0, 2, 0)$ de $\mathcal{M}$.

Determinar la curvatura κ en $(0, 2, 0)$ de la elipse sección de $\mathcal{M}$ por el plano $x - \sqrt{3}z = 0$.

244 En la superficie $\mathcal{M}$: $z = f(x, y)$, con $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Demuéstrese que:

a) Los vectores de $T_O(\mathbb{R}^3)$, $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ y $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ son tangentes a $\mathcal{M}$ en el origen $O(0,0,0)$, y que

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{-f'_x E_1 - f'_y E_2 + E_3}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$$

es un campo de vectores normal y unitario a $\mathcal{M}$.

b) El operador forma viene dado por

$$S(\vec{v}_1) = f''_{xx}(0,0)\vec{v}_1 + f''_{xy}(0,0)\vec{v}_2; \quad S(\vec{v}_2) = f''_{yx}(0,0)\vec{v}_1 + f''_{yy}(0,0)\vec{v}_2.$$

c) En cada caso siguiente, exprésese $S(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2)$ en términos de $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ y $\vec{v}_2 = (0,1,0)$, y determínese el rango de S en $(0,0,0)$:

a) $z = xy$; *b)* $z = 2x^2 + y^2$; *c)* $z = (x+y)^2$; *d)* $z = xy^2$.

245 Sea $\mathcal{M}$ una superficie en $\mathbb{R}^3$ con campo de vectores normal y unitario $\vec{\mathbf{N}} = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$. Entonces la aplicación de Gauss $G : \mathcal{M} \to S^2$ de $\mathcal{M}$ transforma cada punto P en el punto $(a_1(P), a_2(P), a_3(P))$ de la esfera unidad S^2.

En cada una de las superficies siguientes, determínese la imagen de la aplicación de Gauss:

a) El cilindro, $x^2 + y^2 = r^2$. c) El plano, $x + y + z = 0$.
b) El cono, $z^2 = x^2 + y^2$. d) La esfera, $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$.

246 Sea $G : \mathbb{T} \to S^2$ la aplicación de Gauss (Ejercicio 245) del toro derivada de su normal unitaria hacia afuera, $\vec{\mathbf{N}}$. ¿Cuáles son las curvas imagen mediante G de los meridianos y paralelos de $\mathbb{T}$? ¿Qué puntos de S^2 son imagen de exactamente dos puntos de $\mathbb{T}$?

247 Las líneas paramétricas de una superficie $\mathcal{M}$ son ortogonales cuando $g_{12} = 0$ (es decir, cuando $\vec{\mathbf{x}}_u$ y $\vec{\mathbf{x}}_v$ son ortogonales en cada punto). Verifíquese que el operador forma viene dado por

$$S(\vec{\mathbf{x}}_1) = \frac{L_{11}}{g_{11}}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{L_{12}}{g_{22}}\vec{\mathbf{x}}_2; \quad S(\vec{\mathbf{x}}_2) = \frac{L_{12}}{g_{11}}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{L_{22}}{g_{22}}\vec{\mathbf{x}}_2.$$

248 Dada la superficie $\mathcal{M}$ de ecuación implícita $z = xy$ y el punto $P(1,1,1)$ de $\mathcal{M}$, se pide:

Probar que el punto $M(0,0,-1)$ pertenece al plano tangente en el punto P.

Expresar el operador forma en P respecto a $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$, base canónica en el punto P cuando se toman como parámetros x e y, en la parametrización de la superficie.

Hallar la curvatura normal en P en la dirección de $\overrightarrow{PM}$.

Encontrar las direcciones principales, curvaturas principales y direcciones asintóticas en P.

249 Si en una superficie de clase ≥ 2, todo punto es umbilical, probar que se trata de un plano o una esfera, o parte de ellos.

Indicación: Toda curva es de curvatura (en particular, las líneas coordenadas) entonces, de la fórmula de Olinde Rodrigues, deducir que κ_n es constante sobre toda la superficie e integrar dicha ecuación sobre una curva arbitraria.

250 Demuéstrese que un vector tangente $\vec{v} = v^1\vec{\mathbf{x}}_1 + v^2\vec{\mathbf{x}}_2$ determina una dirección principal si y sólo si

$$\begin{vmatrix} (v^2)^2 & -v^1v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

(Indicación: La dirección de $\vec{v}$ es principal si y sólo si el vector normal $S(\vec{v}) \times \vec{v}$ es cero).

251 Demuéstrese que una curva $\vec{\alpha}$ sobre una superficie $\mathcal{M}$ es una recta de $I\!R^3$ si y sólo si es geodésica y asintótica.

252 ¿A cuál de los tres tipos (curvatura, asintótica, geodésica) pertenecen las curvas siguientes?:

a) La circunferencia superior en el toro; b) El ecuador del toro; c) El eje OX en $\mathcal{M}: z = xy$.

(Se debe suponer que tenemos parametrizaciones con $\|\vec{\alpha}\,'\| = cte.$)

253 Sea $\vec{\alpha}$ una línea asintótica en $\mathcal{M} \subset I\!R^3$:

a) Demostrar que la binormal $\vec{b}$ de $\vec{\alpha}$ es perpendicular a la superficie a lo largo de $\vec{\alpha}$, y dedúzcase que $S(\vec{t}) = \tau\vec{n}$.

b) A lo largo de $\vec{\alpha}$, la superficie tiene curvatura de Gauss $K = -\tau^2$.

c) Aplíquese b) para calcular la curvatura de Gauss del helicoide recto.

254 Sea $\vec{\alpha}$ una curva situada en dos superficies $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ que forman un ángulo constante a lo largo de $\vec{\alpha}$. Demuéstrese que $\vec{\alpha}$ es línea de curvatura en $\mathcal{M}$ si y sólo si es línea de curvatura en $\mathcal{M}^*$.

255 Si $\vec{\mathbf{x}}$ es una representación paramétrica de una superfie $\mathcal{M}$, demuéstrese, que una curva $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(a^1(t), a^2(t))$ es

a) línea de curvatura si y sólo si

$$\begin{vmatrix} (a^2)'^2 & -a^{1'}a^{2'} & (a^1)'^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

b) línea asintótica si y sólo si

$$L_{11}(a^1)'^2 + 2L_{12}(a^1)'(a^2)' + L_{22}(a^2)'^2 = 0.$$

256 Hallar las líneas de curvatura del helicoide recto.

257 Sea $\vec{\alpha}$ una curva con parametrización natural en una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$. En lugar del campo de sistemas de referencia de Frenet de $\vec{\alpha}$, consideremos el campo de sistema de referencia $\{\vec{t}, \vec{u}, \vec{\mathbf{N}}\}$, donde $\vec{t}$ es la tangente unitaria de $\vec{\alpha}$, $\vec{\mathbf{N}}$ es la normal de la superficie restringuida a $\vec{\alpha}$ y $\vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}$.

a) Verifíquese que

$$\begin{array}{rcccc} d\vec{t}/ds & = & & \kappa_g\vec{u} & +\kappa_n\vec{\mathbf{N}} \\ d\vec{u}/ds & = & -\kappa_g\vec{t} & & +\tau_g\vec{\mathbf{N}} \\ d\vec{\mathbf{N}}/ds & = & -\kappa_n\vec{t} & -\tau_g\vec{u} & \end{array}$$

donde $\kappa_n = S(\vec{t}) \cdot \vec{t}$ es la curvatura normal $k(\vec{t})$ de $\mathcal{M}$ en la dirección de $\vec{t}$, $\tau_g = S(\vec{t}) \cdot \vec{u}$ es la denominada torsión geodésica y κ_g se llama curvatura geodésica de $\vec{\alpha}$.

b) Deducir que $\vec{\alpha}$ es geodésica si y sólo si $\kappa_g = 0$; $\vec{\alpha}$ es asintótica si y sólo si $\kappa_n = 0$; $\vec{\alpha}$ es de curvatura si y sólo si $\tau_g = 0$.

258 Si $\vec{\alpha}$ es una curva con parametrización unitaria sobre una superficie $\mathcal{M}$, pruébese que:

1. $\vec{\alpha}$ es línea de curvatura y geodésica si y sólo si $\vec{\alpha}$ está en un plano que es ortogonal a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$.
2. $\vec{\alpha}$ es línea de curvatura y asintótica si y sólo si $\vec{\alpha}$ está en un plano que es tangente a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$.

259 Las líneas de curvatura de la superficie engendrada por las rectas tangentes a una curva son las tangentes a dicha curva y sus involutas (trayectorias ortogonales de dichas rectas).

260 Demostrar que si una esfera o un plano corta a una superfice $\mathcal{M}$ bajo un ángulo constante, la curva intersección es una línea de curvatura de $\mathcal{M}$.

261 Establecer que las líneas de curvatura en una superficie de revolución son los paralelos y los meridianos. Determinar la curvas que además son asintóticas.

262 Demostrar que el helicoide $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, kv)$, es una superficie mínima (curvatura media nula); y que la curvatura de Gauss es constante a lo largo de cada hélice $u = cte$. Determinar las líneas asintóticas de la superficie. Verificar la fórmula de Beltrami–Enneper: $K = -\tau^2$, sobre la líneas asintóticas no planas (K la curvatura de Gauss y τ es la torsión de la línea asintótica).

263 Sea $\mathcal{M}$ una superficie reglada con curvatura media nula y sea $\mathcal{C}$ una línea asintótica, no rectilínea, sobre $\mathcal{M}$. Demostrar que $\mathcal{M}$ está engendrada por las normales principales a $\mathcal{C}$.

264 Dada una curva $\mathcal{C}$, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, con parámetro arco, sobre la superficie $\mathcal{M}$ $\vec{\mathbf{y}}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{\beta}(s)$, donde $\vec{\beta}(s)$ es un vector unitario tomado sobre cada punto de la curva. ¿Qué condición debe verificar $\vec{\beta}(s)$ para que la curva $\mathcal{C}$ sea una línea asintótica de $\mathcal{M}$?

265 Una superficie es mínima ($H = 0$) si y sólo si por cada punto pasan dos direcciones asintóticas ortogonales.

266 Demostrar que las líneas asintóticas de la superficie $z - x^4 + y^4 = 0$ son las intersecciones de dicha superficie con las familias de cilindros: $x^2 + y^2 = c_1$, $x^2 - y^2 = c_2$.

267 Consideremos la superficie paramétrica $\vec{\mathbf{x}}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, f(\rho, \theta))$, determinar la aplicación f para que las curvas coordenadas (ρ constante, θ constante) formen una red de curvas conjugadas.

268 Se considera la superficie

$$\vec{\mathbf{x}}(u, v) = \left(u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, v + u^2 v - \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2\right),$$

determinar dos familias de líneas conjugadas que se corten bajo un ángulo constante θ_0.

269 Una superficie de revolución está determinada en coordenadas cilíndricas por $z = F(\rho)$; determinar F de clase C^2 para que las líneas asintóticas en todos los puntos sean ortogonales.

270 Sean $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2; obtener la ecución diferencial de las líneas asintóticas de la superficie $z = f(x) + h(x)$; determinar f y h para que las líneas asintóticas que pasa por cada punto sean ortogonales; calcular entonces estas líneas asintóticas.

271 Demostrar que las líneas de curvatura son las únicas curvas de una superficie $\mathcal{M}$ a lo largo de las cuales las normales a $\mathcal{M}$ engendran una superficie desarrollable.

272 Verificar que una curva es geodésica en su superficie rectificante (superfice envolvente de los planos rectificantes)

273 Una superficie desarrollable $\mathcal{M}^*$ es la envolvente de los planos tangentes a una superficie $\mathcal{M}$ en los puntos de una curva $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{M}$. Probar que en todo punto P de $\mathcal{C}$, la correspondiente generatriz rectilínea de $\mathcal{M}^*$ que pasa por P determina en $\mathcal{M}$ la dirección conjugada de $\mathcal{C}$ en P. ¿Son conjugadas dichas direcciones en $\mathcal{M}^*$?

274 Las líneas asintóticas sobre una superficie desarrollable, que no sea un plano, forman una única familia uniparamétrica y coincide con las generatrices de la superficie.

Recíprocamente, si las asintóticas sobre una superficie forman una única familia uniparamétrica de curvas es una superficie desarrollable diferente de un plano.

275 Se denomina imagen esférica (de las normales) de una superficie a la parte de la esfera de radio 1 descrita por las normales unitarias a la superficie dada.

Demostrar que las tangentes a una curva sobre una superficie y a su imagen esférica son paralelas en puntos correspondientes si y sólo si la curva es una línea de curvatura.

Si dos superficie se cortan a lo largo de una curva que es línea de curvatura para ambas superficies, demostrar que éstas se cortan según un ángulo constante.

Si todas las líneas de curvatura de una superficie son planas, establecer que sus imágenes esféricas forman un sistema ortogonal de arcos de circunferencias.

276 Consideremos una curva $\mathcal{C}$ en una superficie $\mathcal{M}$ y las tres propiedades: 1) $\mathcal{C}$ línea de curvatura, 2) $\mathcal{C}$ línea geodésica , y 3) $\mathcal{C}$ curva plana. ¿Qué dos de estas tres propiedades implican la restante?

277 Una superficies definida en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{\mathbf{x}}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, A(\theta) + \rho B(\theta))$$

donde A y B son de clase 2. Determinar la ecuación diferencial de las llineas asintóticas; elegir B para que las curvas asintóticas no rectilíneas tengan proyección sobre el plano XY curvas que sean homotéticas respecto al origen (es decir, si $\rho = \rho(\theta)$ es una tal proyección, la proyección de otra línea asintótica es $\rho = \lambda\rho(\theta)$).

278 Dar una parametrización de la superficie $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ tal que las curvas paramétricas sean líneas asintóticas.

279 Dada una superficie $\mathcal{M}$: $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u, u^2 + v, u^3 + 3uv)$.

Demostrar que el plano osculador en un punto $u = \lambda$ de la curva $\mathcal{C}$: $\vec{\alpha}(u) = \vec{\mathbf{x}}(u, 0)$ corta a $\mathcal{M}$ según una recta y una curva $\mathcal{C}_\lambda$.

Demostrar que por un punto de $\mathcal{M}$ pasan, en general, dos curvas de la familia de curvas $(\mathcal{C}_\lambda)_\lambda$ que se obtienen al considerar los distintos puntos de $\mathcal{C}$ y que las direcciones a estas dos curvas, en sus puntos de corte, son conjugadas.

280 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (uv, u^2v, v + 1)$, se pide:

a) Calcular las direcciones asintóticas de la superficie en el punto $P = (1, 1, 2)$.

b) Calcular las direcciones principales de la superficie en el punto $P = (1, 1, 2)$.

c) Calcular el valor de las curvaturas normales de los puntos de la superficie en la curva $v = 1$.

d) Calcular las líneas de curvatura.

281 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(uv) = (u + v, u - v, u^2 + f(v))$, $u, v \in I\!\!R$, se pide:

a) Hallar la expresión de $f(v)$ para que todos sus puntos sean parabólicos.

b) Calcular la líneas asintóticas en cualquier punto de la superficie en el caso $f(v) = -v^2$.

282 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u + v, u - v, u^2v^2)$, $u, v \in I\!\!R$, se pide:

a) Hallar las líneas de máxima pendiente de la superficie.

b) Hallar las líneas asintóticas de la superficie.

c) Las direcciones y curvaturas principales en el punto $(2, 0, 1)$.

283 Calcular las líneas asintóticas de la superficie reglada dada por la ecuaciones param´etricas $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (uv, vu^2, u+v)$.

284 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u+v; u-v; u^2+v)$, se pide:

a) Hallar las líneas de curvatura de la superficie.

b) Hallar las curvaturas principales de la superficie.

285 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u^2+v^2, u^2-v^2, u^2+f(v))$, $u, v \in I\!R$, se pide:

a) Hallar las líneas de máxima pendiente en el caso particular de $f(v) = e^v$.

b) Hallar el valor que ha de tener $f(v)$ para que las curvas $u = c$ sean líneas de curvatura y hallar las restantes líneas de curvatura.

c) Determinar $f(v)$ para que una de las curvaturas principales sea nula y hallar la otra.

286 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u^2+v, v, u^2-v)$, $-1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$, se pide:

a) Clasificar los puntos de la superficie.

b) Hallar las direcciones y curvaturas principales en el punto $(1,1,-1)$.

c) Hallar las líneas asintóticas.

287 Dada la hélice de ecuaciones paramétricas $\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, u)$, $u \in I\!R$, se pide:

a) Hallar la ecuación del cono que tiene como vértice el origen y por directriz la hélice dada.

b) Hallar las curvas de máxima pendiente sobre la superficie dada.

c) Hallar las líneas de curvatura.

288 a) Hallar las ecuaciones paramétricas del cono de vértice el origen de coordenadas y directriz la hélice de ecuaciones $x = \cos u, y = \operatorname{sen} u, z = u$.

b) Hallar las curvaturas principales y las líneas de curvatura.

c) Calcular la curvatura normal de la hélice anterior en un punto genérico suyo.

289 Dada la superficie de ecuaciones paramétricas $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u; v; u^2+v^3)$, se pide:

a) Encontrar la curva de puntos parabóolicos.

b) Determinar sus líneas de máxima pendiente.

c) Hallar las líneas asintóticas.

290 Dada la superficie de ecuaciones paraméetricas $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u, v, u^2+\lambda v^2)$, se pide:

a) Clasificar los puntos según los valores de λ.

b) Calcular las curvaturas principales en el origen de coordenadas para $\lambda = -1$.

c) Calcular las líneas de curvatura para $\lambda = 1$.

291 Una superficie se dice que es triplemente reglada si por cada uno de sus puntos pasan tres rectas contenidas en la superficie. Determinar todas la superficies triplemente regladas.

292 Supóngase que la normal unitaria a una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$ es constante a lo largo de una curva regular $\mathcal{C}$, contenida en la superficie. Deducir que en este caso, la aceleración es siempre tangente a la superficie (la curva es asíntotica), que la curva está contenida en un plano y que la curvatura de Gauss es nula en cada punto de la curva.

293 Sea $\vec{\alpha}(s)$ la circunferencia $x^2+y^2=1, z=0$ y considérese la superficie, de ecuación paramétrica:

$$\vec{\mathbf{x}}(s,v)=\vec{\alpha}(s)+v(\vec{\alpha}'(s)+\vec{e}_3).$$

Comprobar que se trata del hiperboloide de una hoja o reglado (de revolución) de ecuación implícita:

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

En un punto P de parámetros (s_0,v_0), se verifica que la dirección tangente a la circunferencia $\vec{\mathbf{x}}(s,v_0)$ es principal, y la dirección de la recta $\vec{\mathbf{x}}(s_0,v)$ es asintótica.

Encontrar la otra dirección asintótica en P y establecer que la recta que pasa por P y cuya dirección coincide con la dirección asintótica también está contenida en la superficie (se tienen así las dos rectas contenidas en la superficie que pasan por P).

294 Demostrar que en una superficie, los coeficientes de la 1ª forma fundamental y los símbolos de Christoffel de 1ª especie están relacionados por:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jki}.$$

295 Demostrar que los símbolos de Christoffel de segunda especie se transforman respecto de dos representaciones paramétricas de acuerdo con la ley

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial\tilde{u}^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial\tilde{u}^\beta}\frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^\gamma}-\frac{\partial^2\tilde{u}^\alpha}{\partial u^j\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial\tilde{u}^\beta}\frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^\gamma}.$$

296 Calcular los símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} de una superficie respecto a una parametrización explícita: $z=f(x,y)$.

297 Probar que, si $(g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ln g}{\partial u^1}=\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12},\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\ln g}{\partial u^2}=\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}.$$

298 Utilizando las ecuaciones de Weingarten demostrar que

$$\vec{\mathbf{N}}_1\times\vec{\mathbf{N}}_2=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\;K\vec{\mathbf{N}},$$

donde $\vec{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria, K la curvatura de Gauss y g_{ij} los coeficientes de la primera forma fundamental.

299 Hallar los símbolos de Christoffel de las siguientes superficies:

a) Esfera: $x=a\cos\theta\cos\phi,\quad y=a\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\quad z=a\operatorname{sen}\theta.$

b) Superficie de revolución: $x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\operatorname{sen}v,\quad z=h(u).$

c) Catenoide: $x=a\cosh(u/a)\cos v,\quad y=a\cosh(u/a)\operatorname{sen}v,\quad z=u.$

d) Pseudoesfera: $x=a\operatorname{sen}u\cos v$, $y=a\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v$, $z=a(\cos u+\ln\operatorname{tag}(u/a))$.

e) Helicoide: $x=u\cos v,\quad y=u\operatorname{sen}v,\quad z=av.$

f) Desarrollable tangente de arista de retroceso $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s)$, s parámetro natural: $\vec{\mathbf{x}}(s,v)=\vec{\alpha}s+v\vec{t}(s)$.

g) Toro: $x=(b+a\cos u)\cos v,\quad y=(b+a\cos u)\operatorname{sen}v,\quad z=a\operatorname{sen}u.$

h) Elipsoide: $x=a\cos u\cos v,\quad y=b\cos u\operatorname{sen}v,\quad z=c\operatorname{sen}u.$

i) Paraboloide hiperbólico : $x=a(u+v),\quad y=b(u-v),\quad z=uv.$

j) $x=ue^{av}\cos v,\quad y=ue^{av}\operatorname{sen}v,\quad z=f(u)e^{av}.$

300 Dada una superficie con 1ª forma fundamental $I = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2$ (coordenadas semigeodésicas). Hallar los símbolos de Christoffel.

Idem, si la primera forma fundamental es $I = (\rho(u^1, u^2))^2((du^1)^2 + (du^2)^2)$ (coordenadas isotermas).

301 Sea una superficie con coordenadas ortogonales. Probar que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\right)\right].$$

Idem, en coordenadas isotermas: $g_{11} = g_{22} = \rho^2,\ g_{12} = 0$,

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial u^1\partial u^1} + \frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial u^2\partial u^2}\right].$$

Idem, en coordenadas semigeodésicas: $g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = G$,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^1\partial u^1}.$$

302 Probar que en una superficie en la que las líneas de curvatura son líneas coordenadas se tiene: (Utilizar las condiciones de integrabilidad de Codazzi)

$$\frac{\partial\kappa_1}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}(\kappa_2 - \kappa_1) = (\kappa_2 - \kappa_1)\frac{\partial\ln\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial\kappa_2}{\partial u^1} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}(\kappa_1 - \kappa_2) = (\kappa_1 - \kappa_2)\frac{\partial\ln\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}.$$

303 Probar que las formas siguientes no valen como 1ª y 2ª formas fundamentales de una superficie:

a) $I = (du^1)^2 + (du^2)^2, \qquad II = (du^1)^2 - (du^2)^2.$
b) $I = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2, \qquad II = \cos^2 u^1 (du^1)^2 + (du^2)^2.$

304 Hallar la ecuación de la superficie con primera y segunda forma fundamental

$$I = du^2 + dv^2, \qquad II = du^2.$$

305 Probar que las formas siguientes determinan una superficie, que las tiene como 1ª y 2ª formas fundamentales:

$$I = (1 + 4u^2)du^2 - 4uv\,du\,dv + (1 + 4v^2)dv^2, \qquad II = \frac{2du^2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} - \frac{2dv^2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

306 Demostrar que la aplicación entre la catenoide

$$x = a\,\cosh(\frac{u^1}{a})\cos u^2, \quad y = a\,\cosh(\frac{u^1}{a})\,\mathrm{sen}\,u^2, \quad z = u^1.$$

y el helicoide: $x = v^1\cos v^2, \quad y = v^1\,\mathrm{sen}\,v^2, \quad z = av^2,$ dada por $v^1 = a\,\mathrm{senh}(u^1/a), \quad v^2 = u^2$ es una isometría. ¿En qué se transforman los meridianos y paralelos de la catenoide?

307 Sea una curva $\mathcal{C}$.

a) Demostrar que la superficie formada por las polares (rectas perpendiculares al plano osculador por el centro de curvatura) a $\mathcal{C}$ es desarrollable.

b) Comprobar que las evolutas de $\mathcal{C}$ están contenidas en dicha superficie.

c) Por ser desarrollable es isométrica al plano, probar que las evolutas se transforman en líneas rectas por dicha isometría.

308 Si sobre una superficie existe un sistema de coordenadas ortogonales tal que $g_{11} = g_{11}(u^1)$ y $g_{22} = g_{22}(u^1)$, la superficie es localmente isométrica a una superficie de revolución.

309 Si entre dos puntos P y Q del espacio con vectores de posición respectivos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ existe la relación $\vec{\mathbf{y}} = a^2\vec{\mathbf{x}}/\vec{\mathbf{x}}^2$, se dice que la correspondencia es una inversión. Demostrar que la aplicación obtenida entre dos superficies por una inversión es conforme.

310 Demostrar que la esfera es localmente conforme al plano a través de la proyección estereográfica.

311 Probar que en un cono circular recto de ángulo θ entre una generatriz y el eje, todo punto puede unirse a sí mismo por al menos un arco geodésico si y sólo si $\theta < \pi/6$.

312 Se consideran las dos superficies

$$\mathcal{M}_1 : \quad \vec{\mathbf{x}}(u,v) = (\sqrt{2}v\cos(u/\sqrt{2}), \sqrt{2}v\,\mathrm{sen}(u/\sqrt{2}), \sqrt{2})$$

$$\mathcal{M}_2 : \quad \vec{\mathbf{y}}(u,v) = (\cos u - v\,\mathrm{sen}\,u, \mathrm{sen}\,u + v\cos u, u - v).$$

A un punto $P_1(u,v)$ de $\mathcal{M}_1$ se le asocia el punto $P_2(u,v)$ de $\mathcal{M}_2$, mostrar que la aplicación así definida de $\mathcal{M}_1$ sobre $\mathcal{M}_2$ conserva la longitud y el área.

Determinar sobre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ las trayectorias que forman un ángulo de $\pi/4$ con las generatrices.

Angel Montesdeoca. La Laguna, 2009