Geometría afín

Angel Montesdeoca

Martes 4 de Octubre del 2011

1 Se dan, en el plano, dos rectas paralelas a y b y dos puntos P y Q. Se proyecta un punto A de a sobre b desde P y Q, obteniéndose, respectivamente, los puntos B y C. Demostrar que las medianas del triángulo $\widehat{ABC}$, cuando A varía, cortan a la recta PQ en tres puntos fijos. / Applet CabriJava

2 Dadas dos rectas en el plano no paralelas, hacemos corresponder a cada punto P el punto medio P' de las proyecciones ortogonales de P sobre cada una de las rectas dadas. Obtener la correspondencia $P \mapsto P'$. ¿Cómo han de ser las dos rectas para que la correspondencia sea una homotecia? / Applet CabriJava

3 Determinar qué transformación es el producto de las simetrías respecto a los cuatro lados, tomados consecutivamente, de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

4 Si $\widehat{ABC}$ es un triángulo y r es una recta que corta a sus lados BC, AC y AB en O_1, O_2 y O_3, respectivamente, se tiene el teorema de Menelao:

$$\frac{O_1C}{O_1B} \cdot \frac{O_2A}{O_2C} \cdot \frac{O_3B}{O_3A} = 1.$$

Probarlo, usando el producto de las homotecias η_1, η_2 y η_3 de centros O_1, O_2 y O_3 y que transforman B en C, C en A y A en B, respectivamente.

5 Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos.

6 Sean A y B dos puntos del plano. A un punto P se le asigna el punto P' tal que P, P' y A estén alineados, y que BA sea bisectriz de $\widehat{PBP'}$. ¿Qué transformación es la así definida?

7 Dados en el plano dos puntos A y B y una recta r, que no pasa por ninguno de los dos, se asigna al punto M el M', transformado de A en la homotecia cuyo centro está en r (o una traslación) que convierte M en B. Probar que la transformación σ resultante ($\sigma(M) = M'$) es el producto de una homología de centro A y la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$.

8 Dado en el plano dos rectas r y r' y un punto M, se determinan los puntos P y P' en r y r', respectivamente, tales que M es el punto medio de ellos. Se proyectan ortogonalmente P y P' sobre r' y r, respectivamente, obteniéndose los puntos Q' y Q y sea M' el punto medio de éstos.

Demostrar que la correspondencia $\sigma : M \longmapsto M'$ es una semejanza, composición de una homotecia de centro en el punto de corte de las rectas r y r' y la simetría axial respecto a una de sus bisectrices. / Applet CabriJava

9 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, a cada punto P de su plano le aplicamos las tres transformaciones (antisemejanzas) siguientes:

$\sigma_a : P \longmapsto P_a$, composición del simétrico de P respecto a la bisectriz en A, con la homotecia de centro A y razón $\cos A$.

$\sigma_b : P \longmapsto P_b$, composición del simétrico de P respecto a la bisectriz en B, con la homotecia de centro B y razón $\cos B$.

$\sigma_c : P \longmapsto P_c$, composición del simétrico de P respecto a la bisectriz en C, con la homotecia de centro C y razón $\cos C$.

Entonces, P_a, P_b y P_c están alineados (sobre la recta de Steiner de P) si sólo si P está en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$. (⟳)

10 Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x - 2y - 4z + 8 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 5, -2)$ y es paralela a los dos planos. (Applet JavaView)

11 Estudiar la posición relativa de las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{5}$ y $s \equiv x + 3 = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+8}{3}$. (Applet JavaView)

12 Consideremos el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 1$ y la recta $r \equiv x - 1 = 2 - y, z = 2x - 2$. Hallar:

1. Ecuación de la recta perpendicular a r contenida en π y en coplanaria con r.

2. Ecuación de la recta proyección ortogonal de r sobre el plano π.
3. Angulo que forma la recta r con su proyección ortogonal.
4. Punto simétrico del $(0, 2, -1)$ respecto a la recta r.

(Applet JavaView)