Líneas geodésicas

Angel Montesdeoca

Lunes 12 de Mayo del 2008

1 Para que dos superficies se corten bajo un ángulo constante, es necesario y suficiente que la curva intersección tenga la misma torsión geodésica relativa a las dos superficies.

Nota: La torsión geodésica τ_g de una curva en una superficie de normal unitaria $\vec{\mathbf{N}}$, está definida por (↻)

$$\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa_n \vec{t} - \tau_g \vec{u}, \qquad \text{donde} \quad \vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}.$$

2 Supongamos que una superficie $\mathcal{M}$ admite una familia de líneas de curvatura $\mathcal{F}_1$ que son al mismo tiempo geodésicas de $\mathcal{M}$. Mostrar que las curvas de la otra familia $\mathcal{F}_2$ de líneas de curvatura son ortogonales en cada uno de sus puntos, a un plano conteniendo a una curva de la familia $\mathcal{F}_1$.

3 Hallar la curvatura geodésica de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = t$ sobre:
a) El cilindro: $x = a\cos u$, $y = a\operatorname{sen} u$, $z = v$. b) El helicoide: $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = v$.

4 Probar que toda curva es una geodésica de la superficie generada por sus binormales.

5 A) Sobre la superficie $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = f(u)$ (f función de clase C^2), hallar la curvatura geodésica de las curvas coordenadas.
B) Probar que los meridianos de las esferas tienen curvatura geodésica nula.

6 Las curvas paramétricas de una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ de clase $n > 2$ son geodésicas si y sólo si $\Gamma^1_{22} = 0$ y $\Gamma^2_{11} = 0$, respectivamente.

7 Probar que la proyección desde el centro de una esfera sobre otra esfera concéntrica de diferente radio aplica líneas geodésicas en líneas geodésicas, aunque no es una isometría.

8 Sea una superficie de ecuación $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$ cuya primera forma fundamental es $I = du^2 + f(u,v)dv^2$. Probar que las curvas $v = cte.$ son geodésicas.

9 Demostrar que si las coordenadas curvilíneas de una superficie son ortogonales, entonces la curvatura geodésica de las curvas coordenadas es

$$u^2 = cte.: \quad -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \ln\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}; \qquad\qquad u^1 = cte.: \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \ln\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}.$$

10 Sea $\vec{\alpha}(s) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(s), u^2(s))$ una geodésica en una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$ tal que $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g_{22}(u^1)$.
Probar que $\sqrt{g_{22}}\cos\theta = cte.$, siendo θ el ángulo que forma la geodésica con las curvas $u^1 = cte.$

11 Sea $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$ una superficie de clase ≥ 2 tal que $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g_{22}(u^1)$. Probar que:
a) Las curvas coordenadas $u^2 = cte.$ son geodésicas.
b) Las curvas coordenadas $u^1 = cte.$ son geodésicas si y sólo si $\left.\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right|_{u^1_0} = 0$.
c) La curva $\vec{\alpha}(u^1) = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2(u^1))$ es geodésica si y sólo si

$$u^2 = \pm\int \frac{c\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}-c^2}}du^1.$$

12 Probar que en una superficie de revolución todos los meridianos son geodésicos, pero para que el paralelo que pasa por un punto P de un meridiano sea geodésico es necesario y suficiente que la tangente al meridiano en P sea paralela al eje de revolución.

13 Hallar las geodésicas del plano dado en coordenadas polares.

14 Si una geodésica en una superficie de revolución forma un ángulo θ con los meridianos a lo largo de la geodésica, entonces se verifica que

$$u \operatorname{sen}\theta = cte. \qquad \text{(siendo } u \text{ el radio del paralelo)}$$

15 Probar que las curvas de la familia $v^3/u^2 = cte.$ son geodésicas sobre la superficie de primera forma fundamental

$$I = v^2du^2 - 2uvdu\,dv + 2u^2dv^2. \qquad (u > 0, v > 0)$$

16 Utilizar las expresiones de la curvatura geodésica de las curvas paraméricas de una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ con curvas paramétricas ortogonales: (↻)

$$(\kappa_g)_{u^2=cte.} = -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \qquad (\kappa_g)_{u^1=cte.} = \frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

para comprobar que las trayectorias ortogonales de las curvas $u/v = cte.$ en la superficie de primera forma fundamental

$$I \equiv v^2(du)^2 + u^2(dv)^2,$$

son geodésicas. (Indicación: Obtener la primera forma fundamental de la superficie, tomando como nuevas curvas paramétricas las $u/v = cte.$ y sus trayectorias ortogonales).

17 Deducir, de las ecuaciones diferenciales de las geodésicas

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0 \qquad (k = 1, 2),$$

que si las curvas paramétricas son ortogonales, ellas son geodésicas si y sólo si

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

Concluir que la curvatura de Gauss de la superficie es nula. (Indicación: Utilizar el Teorema Egregium de Gauss).

18 Probar que en una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ la condición necesaria y sufiicente para que las curvas $u^2 = cte.$ sean geodésicas es que

$$g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - 2g_{11}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

19 Demostrar que si dos familias de geodésicas se intersecan según un ángulo constante, la superficie tiene curvatura de Gauss nula.

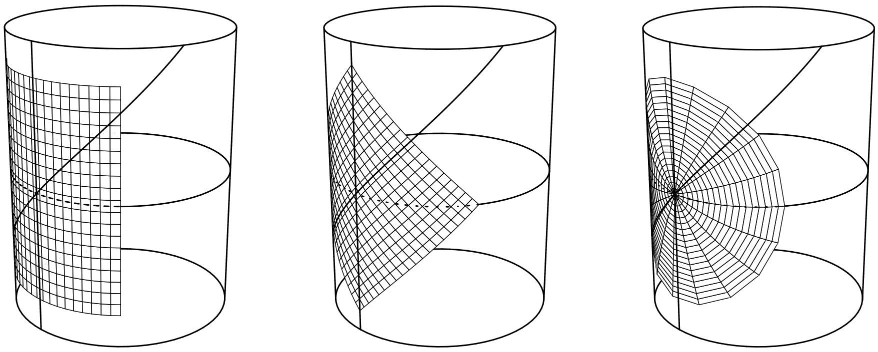
20 Demostrar que las ecuaciones de las geodésicas sobre una superficie definida por $F(x, y, z) = 0$ satisfacen a:

$$\begin{vmatrix} F'_x & x' & x'' \\ F'_y & y' & y'' \\ F'_z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

21 Sea $\mathcal{C}$ una curva sobre una superficie reglada no desarrollable y consideremos las siguientes propiedades:
a) $\mathcal{C}$ es una geodésica.
b) $\mathcal{C}$ es una línea de estricción.
c) $\mathcal{C}$ corta a las generatrices según un ángulo constante.
Demostrar que dos cualesquiera de estas condiciones implica la tercera.

22 Usando representaciones paramétrica diferentes establecer la igualdad entre las expresiones del vector curvatura geodésica.

23 En el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$, encontrar una parametrización semigeodésica alrededor del punto $(1, 0, 0)$ para la cual una de las curvas de la familia de curvas coordenadas geodésicas sea la hélice circular a través de dicho punto $(1, 0, 0)$ y de paso 1.



Parametrización cilíndrica (geodésica):

$$(u, v) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\times]-1, 1[\longrightarrow (\cos u, \operatorname{sen} u, v) \qquad I \equiv (du)^2 + (dv)^2$$

Parametrización geodésica: coordenadas semigeodésicas

$$(u, v) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\times \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\longrightarrow \left(\cos\frac{u-v}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}\frac{u-v}{\sqrt{2}}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \qquad I \equiv (du)^2 + (dv)^2$$

Parametrización semigeodésica polar: coordenadas semigeodésicas polares

$$(u, v) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \Big(\cos(u \cos v), \operatorname{sen}(u \cos v), u \operatorname{sen} v\Big) \qquad I \equiv (du)^2 + u^2(dv)^2$$

24 Demostrar el siguiente resultado relativo a una superficie reglada no desarrollable arbitraria: “la línea de estricción forma un ángulo constante con las generatrices rectilíneas si y sólo si es una línea geodésica”.

25 Establecer que todas las evolutas de una curva son geodésicas en la superficie polar de la curva (superficie desarrollable envolvente de los planos normales a la curva).

26 Probar que en una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ la condición necesaria y suficiente para que las curvas $u^1 = cte.$ sean geodésicas es que

$$g_{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - 2g_{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} = 0.$$

27 Probar que, sobre un paraboloide de revolución, toda geodésica que no sea un meridiano se interseca a sí misma infinitas veces.

28 Si una superficie admite dos familias ortogonales de geodésicas, es isométrica al plano.

29 La curvatura geodésica se puede interpretar como una generalización intrínseca de la curvatura de curvas planas, como se deduce del siguiente resultado:

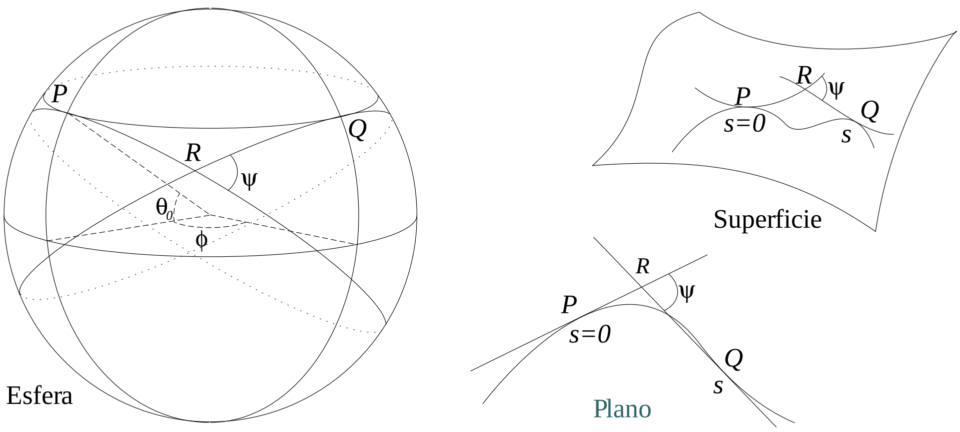
Sea P un punto de una curva dada $\mathcal{C}$ sobre una superficie y Q el punto de $\mathcal{C}$ a una distancia s desde P a lo largo de $\mathcal{C}$. Si las geodésicas tangentes a $\mathcal{C}$ en los punto P y Q se cortan en el punto R, sea ψ el ángulo entre las tangentes a estas geodésicas en R. Entonces la curvatura geodésica de $\mathcal{C}$ en P es

$$\kappa_g = \lim_{s \to o} \frac{\psi}{s} \tag{1}$$

 Angel Montesdeoca. La Laguna, 2008

Obsérvese que para el caso de curvas planas, ocurre que ψ es el ángulo entre las tangentes en P y Q (las geodésicas son estas rectas) y $\lim\limits_{s\to o} \dfrac{\psi}{s}$ es la curvatura de la curva en P.

Aplicar la fórmula (1) para obtener la curvatura geodésica de una circunferencia en la esfera unidad.



La curvatura geodésica del paralelo $\theta = \theta_0$ en la esfera de ecuación paramétrica

$$\vec{\mathbf{x}}(\phi,\theta) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \mathrm{sen}\,\theta)$$

es $\kappa_g = \mathrm{tag}\,\theta_0$.

30 Probar que si las trayectorias ortogonales a las curvas $u^2 = cte.$ son geodésicas, entonces $(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)/g_{11}$ es independiente de u^1.

31 Al proyectar ortogonalmente una curva $\mathcal{C}$ de una superficie sobre el plano tangente a ésta, en un punto P de $\mathcal{C}$, se obtiene una curva plana cuya curvatura en P es la curvatura geodésica de $\mathcal{C}$ en P.

32 Alrededor de un punto P_0 regular de una superficie se considera un sistema de coordenadas semigeodésicas polares, es decir, las curvas paramétricas son las geodésicas que parten de P_0 en todas las direcciones ($v = cte.$) y sus trayectorias ortogonales ($u = cte.$). Se tiene entonces respecto a este sistema de coordenadas la siguiente expresión de la 1ª forma fundamental: $I \equiv du^2 + G(u,v)dv^2$. Establecer que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sqrt{G(u,v)}}{u} = 1$.

33 Un helicoide (general) es una superficie generada por el movimiento helicoidal de una curva (generatriz) alrededor de una recta fija, llamada eje. Las distintas posiciones de la curva generatriz se obtienen, por tanto, primero girando un ángulo v alrededor del eje y luego trasladando una distancia ℓ parallela al eje, cumpliendose que $\ell/v = a$ (constante). La constante $2\pi a$ se denomina paso del helicoide, que viene a ser la distancia trasladada después de una vuelta completa; si el paso es cero se trata de una superficie de revolución.

Si el eje es OZ y la ecuación de la sección del helicoide por el plano XOZ es: $x = f(u),\ y = 0,\ z = h(u)$,

a) Deducir que la ecuación del helicoide de paso $2\pi a$ es

$$\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\,\mathrm{sen}\,v, h(u) + av).$$

b) Probar que las secciones por planos que contienen al eje son geodésicas si y sólo si dichas secciones son líneas rectas.

34 Sea $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$ una parametrización semigeodésica de una superficie, tal que las curvas de parámetro u son geodésicas y que tienen a este parámetro como longitud de arco; es decir, que $I \equiv du^2 + G(u,v)dv^2$ es la primera forma fundamental relativa a esta parametrización. Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una geodésica que forma un ángulo $\theta(s)$ con las curvas de parámetro u (s parámetro arco de $\mathcal{C}$), se tiene que

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds} = 0$$

a lo largo de $\mathcal{C}$.

35 Determinar las geodésicas de una superficie cilíndrica.

36 Si las curvas parámetricas de una representación paramétrica de una superficie son ortonormales (es decir, si los campos de vectores básicos $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2$, son unitario y perpendiculares), demostrar que ellas son geodésicas y establecer que la curvatura de Gauss es idénticamente nula. (↺)