Problemas métricos

Angel Montesdeoca

Jueves 17 de Septiembre del 2009

1 Sea el triángulo rectángulo $\widehat{OAB}$ y consideremos y la curva definida por los puntos P situados sobre la rectas que pasan por O y tales que si M es el punto de intersección de OP con AB se tiene que $\overline{MP} = h = cte.$ (concoide de Nicomedes (Ver también) (Ver también) Demostrar que si B' es el punto de la curva intersección con la recta por B paralela a OA, el ángulo $\widehat{AOB} = 3\widehat{AOB'}$.

2 Dados dos ruedas fijas, se considera una una tira elástica uniforme y siempre tensa que está fijada en un punto de la primera rueda distante del centro r y en otro punto de la segunda rueda distante del centro la misma cantidad r. La primera gira con una velocidad angular ω y la segunda con una velocidad angular $k\omega$. Lugar geométrico de los puntos medios de dichas tiras, cuando las ruedas giran en el mismo sentido y en el contrario.

/ Applet CabriJava

3 Lugar geométrico de los puntos del plano tales que su triángulo pedal u órtico, respecto a un triángulo dado, es rectángulo.

/ Applet CabriJava

4 Para todo triángulo, existe un punto en su plano que es la intersección de las circunferencias que contienen los arcos desde cuyos puntos se ven los tres lados del triángulo bajo el mismo ángulo. / Applet CabriJava

5 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo equilátero y M un punto de su circunferencia circunscrita. Mostrar que una de las distancia MA, MB ó MC es igual a la suma de las otras dos.

/ Applet CabriJava

6 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y P un punto de su plano. Denotemos por P_a, P_b y P_c, las proyecciones de P desde cada vértice sobre el lado opuesto. Consideremos las rectas simétricas, respecto a las bisectrices en cada vértice, de las rectas AP_a, BP_b y CP_c. Demostrar que tales rectas se cortan en un punto Q, denominado isogonal conjugado de P. / Applet CabriJava

7 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean A', B' y C' los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B y C, respectivamente, y consideremos los tres pares de circunferencias de diámetros AC' y BC', AB' y CB', y BA' y CA'. Demostrar que los tres centros de homotecia A'', B'' y C'', de estos tres pares de circunferencias (distintos de A', B' y C') están en una recta y el polo de ésta respecto a $\widehat{ABC}$ es el punto X_{393} de ETC. (El polo es el punto de concurrencia de las rectas AA^*, BB^* y CC^*, siendo A^* el conjugado armónico de A'' respecto a B y C; B^* el conjugado armónico de B'' respecto a A y C; y C^* el conjugado armónico de C'' respecto a A y B). / Applet CabriJava

8 Sea BC un diámetro de una circunferencia Γ con centro O. Sea A un punto de Γ tal que $0° < \widehat{AOB} < 120°$. Sea D el punto medio del arco AB no conteniendo a C. La recta a través de O y paralela a DA interseca a AC en J. La mediatriz de OA interseca a Γ en E y F. Probar que J es el incentro del triángulo $\widehat{CEF}$.

/ Applet CabriJava

9 Sea la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 - 2 = 0$. Uma recta que pasa por el origen de coordenadas $O(0,0)$ corta a la circunferencia en los puntos M y N. Lugar geométrico del punto P tal que la distancia de O a P sea igual a la distancia entre M y N. / Applet CabriJava

10 Dado en el plano dos rectas r y r' y un punto M, se determinan los puntos P y P' en r y r', respectivamente, tales

que M es el punto medio de ellos. Se proyectan ortogonalmente P y P' sobre r' y r, respectivamente, obteniéndose los puntos Q' y Q y sea M' el punto medio de éstos.

Demostrar que la correspondencia $\sigma : M \longmapsto M'$ es una semejanza, composición de una homotecia de centro en el punto de corte de las rectas r y r' y la simetría axial respecto a una de sus bisectrices. / Applet CabriJava

11 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y $\widehat{A_1B_1C_1}$ su homotético, mediante la homotecia de centro en un punto H y razón k. El triángulo $\widehat{A'B'C'}$ resulta de girar $\widehat{A_1B_1C_1}$, mediante el giro de centro G y amplitud θ. Resulta, entonces, que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son directamente semejantes y existe un punto O que es a la vez el centro de una homotecia y un giro, cuya composición es la semejanza que lleva $\widehat{ABC}$ en $\widehat{A'B'C'}$.

Justificar que el punto O (centro de semejanza) se determina hallando el punto Q de corte de las rectas AB y $A'B'$ y, luego, el punto de intersección (distinto de Q) de las circunferencias QAA' y QBB'. / Applet CabriJava

12 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y $\widehat{A_1B_1C_1}$ su homotético, mediante la homotecia de centro en un punto H y razón k. El triángulo $\widehat{A'B'C'}$ resulta de girar $\widehat{A_1B_1C_1}$, mediante el giro de centro G y amplitud θ. Resulta, entonces, que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son directamente semejantes y existe un punto O que es a la vez el centro de una homotecia y un giro, cuya composición es la semejanza que lleva $\widehat{ABC}$ en $\widehat{A'B'C'}$.

Justificar que el punto O (centro de semejanza) se determina hallando el punto Q de corte de las rectas AB y $A'B'$ y, luego, el punto de intersección (distinto de Q) de las circunferencias QAA' y QBB'. / Applet CabriJava

13 Dada una circunferencia y en ella dos puntos fijos A, B, otro variable P y una recta r; se trazan las rectas PA y PB que cortan a r en C y D, respectivamente. Determinar dos puntos fijos de r, M y N, tales que el producto $CM \cdot DN$ sea constante al variar P. / Applet CabriJava

14 Si tres o más triángulo directamente semejantes, son colocados de tal forma que una serie de vértices correspondientes coinciden, y una segunda serie sea colineal, entonces la tercera serie es también colineal.

Las circunferencias circunscritas a tales triángulos pasan todas por un mismo punto (además de por el vértice común).

15 Si cuatro o más triángulo directamente semejantes están colocados de tal forma que una serie de vértices correspondientes coinciden, y una segunda serie serie están en un circunferencia, entonces la tercera serie de vértices también están en una circunferencia.

16 Dadas tres circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3 de un haz con puntos base A y B, entonces la razón simple de los puntos en que las circunferencias cortan a una recta arbitraria, que pasa por uno de los puntos base, es constante.