Geometría proyectiva

Angel Montesdeoca

Martes 5 de Abril del 2011

1 Consideremos el plano proyectivo deducido del plano afín ordinario. Hallar las coordenadas homogéneas de los puntos impropios definidos por las siguientes rectas:

a) $3x - y + 1 = 0$ b) $x = 2$ c) $2y + 3 = 0$ d) $x - 2y - 3 = 0$.

Resp. a) $(0, 1, 3)$, b) $(0, 0, 1)$, c) $(0, 1, 0)$, d) $(0, 2, 1)$.

2 En el espacio proyectivo deducido del espacio afín ordinario, hallar las coordenadas homogéneas del punto impropio de las rectas

a) $$x = 3z + 1, \qquad y = -z + 4.$$

b) $$2x - y + 3z = 1, \qquad x + 3y - z = 2.$$

Resp. a) $(3, -1, 1, 0)$, b) $(-8, 5, 7, 0)$.

3 En el plano proyectivo real, los vértices de un cuadrilátero constituyen un sistema de referencia. En este sistema, hallar las ecuaciones de los lados del cuadrilátero y de sus diagonales.

Resp. $\{A, B, C; D\}, AB : x^2 = 0, AC : x^1 = 0, BC : x^0 = 0, BD : x^0 - x^2 = 0, AD : x^2 - x^1 = 0, CD : x^1 - x^0 = 0$.

4 En el plano proyectivo real, hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas tal que los nuevos puntos básicos sean $V_0(3, 1, -3)$, $V_1(-1, 0, 5)$, $V_2(1, 8, -1)$; $V(3, 9, 1)$, siendo este último el punto unidad.

Resp. $x^0 = 3v^0 - v^1 + v^2$, $x^1 = v^0 + 8v^2$, $x^2 = -3v^0 + 5v^1 - v^2$.

5 En el plano proyectivo real, hallar las ecuaciones de cambio de coordenadas que pasan del sistema de coordenadas $\{U_0(1, 0, 0), U_1(0, 1, 0), U_2(0, 0, 1); U(1, 1, 1)\}$, al sistema $\{U'_0(1, 0, 0), U'_1(0, 1, 0), U'_2(0, 0, 1); U'(-1, 2, 3)\}$.

Resp. $x^0 = -x'^0$, $x^1 = 2x'^1$, $x^2 = 3x'^2$.

6 En un espacio proyectivo real de dimensión tres, y respecto de cierta referencia proyectiva, se consideran las rectas de ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{rcl} \rho x^0 & = & \lambda + \mu \\ \rho x^1 & = & 2\lambda - \mu \\ \rho x^2 & = & -\lambda + 2\mu \\ \rho x^3 & = & \lambda - \mu \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \rho x^0 & = & 3\lambda - \mu \\ \rho x^1 & = & \mu \\ \rho x^2 & = & \lambda \\ \rho x^3 & = & 3\lambda + a\mu \end{array}$$

Hállese $a \in I\!R$ para que estas rectas se corten y localícese, en tal caso, el plano que las contiene.

7 En el espacio proyectivo real tridimensional $P_3(I\!R)$ se consideran los puntos

$$A_0(1, 1, 1, 1),\ A_1(2, 4, 0, 1),\ A_2(-1, 2, -1, -1),\ A_3(1, 0, 2, 1),\ A(1, 0, 0, 0).$$

a) Comprobar que $\{A_0, A_1, A_2, A_3; A\}$ es una referencia proyectiva de $P_3(I\!R)$, con A como punto unidad.

b) Hállense las coordenadas homogéneas, respecto de esta referencia, del punto $P(1, 2, 2, 1)$.

Resp. $(1, 0, 4, -4)$

8 Se considera en el plano proyectivo la referencia proyectiva $\{U_0, U_1, U_2; U\}$, siendo U el punto unidad. Hallar las ecuaciones de cambio de coordenadas al adoptar como nuevo sistema de referencia el $\{U, U_1, U_2; U_0\}$.

Resp. $x^0 = x'^0$, $x^1 = x'^0 - x'^1$, $x^2 = x^0 - x'^2$.

9 Se considera en el plano proyectivo real un sistema referencia proyectivo $\{U_0, U_1, U_2; U\}$ y el punto $A(0,1,1)$ (en la recta U_1U_2). Se traza por A una recta ℓ variable que corta a U_0U_2 en M y a U_0U_1 en N. Sea P el punto de intersección de U_2N y U_0A. Demostrar que la recta MP pasa por un punto fijo cuando ℓ varía.

/ Applet CabriJava

Resp. Punto fijo: $(0,1,2)$.

10 En el espacio cuatridimensonal $I\!R^4$ un punto tiene coordenadas (x,y,z,t). Consideremos los hiperplanos:

$$x+y+z+t=0, \qquad x+2y+3z+4t=0.$$

Encontrar dos puntos impropios distintos que pertenezca a la intersección de los dos hiperplanos.

Resp. Puntos de la recta $(x,t,z,t,u) = \lambda(2,-3,0,1,0) + \mu(1,-2,1,0,0)$

11 En el plano proyectivo, enunciar las proposiciones duales de las siguientes:

i) "Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta".

ii) "No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a la misma recta".

iii) "Toda recta tiene por lo menos tres puntos".

iv) "Dos rectas distintas del plano proyectivo tienen siempre un punto en común".

12 Establecer el siguiente resultado y enunciar su dual:

"Dada una cónica y un punto P de su plano no perteneciente a ella, todos los cuadrivértices inscritos en la cónica que tienen en P un punto diagonal tienen los dos restantes puntos diagonales sobre una misma recta".

13 Enunciar el dual de la siguiente proposición:

"Sobre una recta no tangente a una cónica, la correspondencia biyectiva entre cada punto y su conjugado respecto de la cónica es una involución, llamada involución de puntos conjugados respecto de la cónica".

14 Se da en un plano proyectivo un triángulo $\widehat{ABC}$ y una recta r que corta en los puntos P, Q, R a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Las rectas AP, BQ y CR determinan un nuevo triángulo de vértices $A' \equiv CR \cap BQ$, $B' \equiv CR \cap AP$, $C' \equiv QB \cap AP$. Demostrar que las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.

/ Applet CabriJava

15 Un triángulo $\widehat{ABC}$ se corta con una recta s. Sean P, Q y R los puntos en que corta a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea P' el conjugado armónico de P respecto de B y C, y análogamente Q' y R'. Probar que AP', BQ' y CR' concurren en un punto. Dar el enunciado dual de este ejercicio.

/ Applet CabriJava

16 Se considera en la recta real tres puntos A, B y C. Denotamos por P_∞ su punto del infinito. Sean a, b y c las abscisas de los puntos A, B y C, respectivamente, respecto a una referencia cartesiana con origen en O.

Demostrar: a) Si $(ABCO) = -1$, entonces $\dfrac{2}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. b) Si $(ABCP_\infty) = -1$, $2c = a + b$.

17 *Teorema de Menelao en el plano proyectivo.* Se considera en el plano proyectivo real una referencia proyectiva $\{A_1, A_2, A_3; U\}$ y tres puntos: P_1 situado sobre el lado A_2A_3; P_2 sobre A_1A_3 y P_3 sobre A_1A_2. Demostrar que los puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados si y sólo si,

$$(A_2A_3U_1P_1)(A_3A_1U_2P_2)(A_1A_2U_3P_3) = -1,$$

donde $U_i = A_iU \cap A_jA_k$, i, j, k distintos entre si. / Applet CabriJava

18 Si A, B, C son puntos de una recta r y A', B', C' otros de otra recta r', tales que AA', BB', CC' sean rectas concurrentes, probar que los puntos $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$ y $R = AC' \cap A'C$ están alineados con el punto O de intersección de r y r'. Enunciar el teorema dual.

/ Applet CabriJava

19 Cuatro puntos A, B, C, D y tres rectas a, b, c del mismo plano son tales que los puntos intersección A', B', C' de las rectas b y c, c y a y a y b, están respectivamente sobre las rectas AD, BD y CD. Sea d una recta tal que los puntos de intersección P y Q de a y d y b y d están sobre las rectas BC y AC, respectivamente. Probar que el punto de intersección R de la recta c con d está sobre la recta AB. / Applet CabriJava

20 Sean P, Q, R, S y P, A, B, C dos cuaternas de puntos distintos sobre rectas distintas con el punto común P. Si las razones dobles de estas cuaternas son iguales, probar que las rectas QA , RB y SC son concurrentes.

21 Dados los planos en el espacio proyectivo deducido del espacio afín ordinario ampliado con los puntos impropios

$$\pi_1 \equiv y - 2z = 0, \quad \pi_2 \equiv x + y + z - 1 = 0, \quad \pi_3 \equiv x - y = 0,$$

$$\pi_4 \equiv 2x - y + 2z = 0, \quad \pi_5 \equiv -3x + 3y + 2 = 0,$$

obtener los puntos impropios de las rectas determinadas por la intersección dos a dos de estos planos.

Dar las ecuaciones de los planos del apartado anterior respecto a la referencia proyectiva que tiene como puntos bases $\{A(0,0,0), B(2,2,1), C(1,1,1), D(1,0,0)\}$.

22 En la recta proyectiva real se consideran cuatro puntos distintos tales que $(ABCD) = (ACDB)$. ¿Cuántos valores distintos puede tomar la razón doble, al permutar los cuatro puntos?

Resp. Ninguno

23 Dados cuatro puntos A, B, C y D sobre una recta, se verifica, para cualquier otro punto P, la siguiente relación entre razones dobles:

$$(ABCD) = \frac{(PBCD)}{(PACD)} = \frac{(ABPD)}{(ABPC)}.$$

24 Determinar h para que el par de puntos dados por las soluciones de $x^2 - 6x + 5 = 0$, esté armónicamente separado por el de las soluciones de $x^2 - 11x + h = 0$.

Resp. $h = 28$

25 En el espacio proyectivo real cuatridimensional, determinar las ecuaciones paramétricas del subespacio proyectivo $\mathcal{F}$, intersección de los hiperplanos de ecuaciones implícitas siguientes:

$$\mathcal{H}_1 \equiv x^0 - x^1 - x^2 = 0, \quad \mathcal{H}_2 \equiv 3x^1 + x^2 - x^4 = 0, \quad \mathcal{H}_3 \equiv 2x^1 + 2x^2 - x^3 = 0, \quad \mathcal{H}_4 \equiv x^0 + 2x^1 - x^4 = 0.$$

Dar las coordenadas concretas de cuatro puntos alineados de $\mathcal{F}$ y obtener su razón doble.

Resp. $x^0 = \lambda,\ x^1 = \mu,\ x^2 = \lambda - \mu,\ x^3 = 2\lambda,\ x^4 = \lambda + 2\mu.$

26 Sean en el plano proyectivo real los puntos $U_0(1,0,0), U_1(0,1,0), U_2(0,0,1)$ y los puntos $A(0, a^1, a^2)$, $B(b^0, 0, b^2)$ y $C(c^0, c^1, 0)$ sobre los lados del triángulo $\widehat{U_0U_1U_2}$. Demostrar que las rectas U_0A, U_1B y U_2C son concurrentes si y sólo si $a^1b^2c^0 = a^2b^0c^1$.

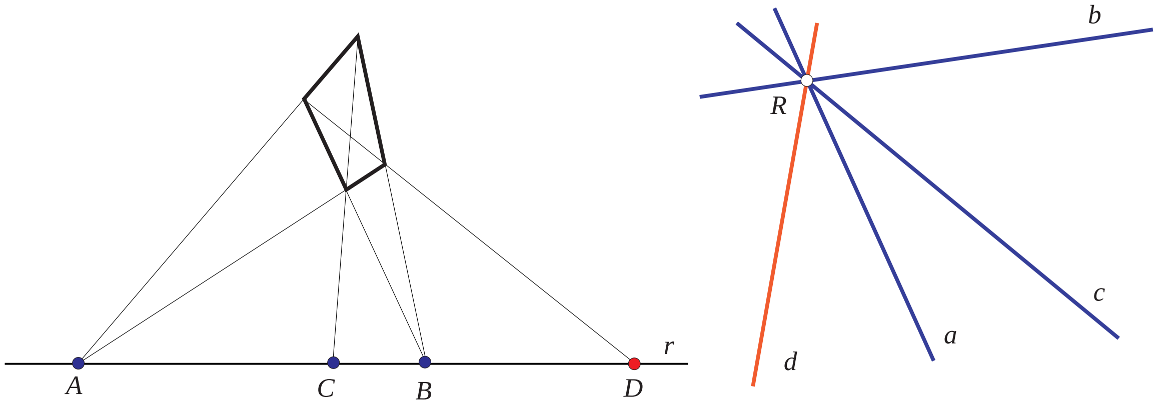
27 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y A', B' y C' tres puntos de una recta r. Se supone que AA', BB' y CC' son concurrentes y que r corta a BC, CA y AB respectivamente en los puntos P, Q y R. Probar que:

1. $(A'B'C'R) = (ABSR)$, donde $S = CC' \cap AB$.
2. Los pares (A', P), (B', Q) y (C', R) son conjugados en una involución.

/ Applet CabriJava

28 Tomemos un triángulo $\widehat{ABC}$, un punto D en AC y otro E en AB. Sea I el punto de encuentro de BD y CE. Se toma F en AI. Se designa por G el punto de encuentro de DF y CE y con H el de EF y BD. Demuéstrese que BC, DE y GH son concurrentes.

29 Dados tres puntos A, B y C, sobre una recta r, para hallar gráficamente el punto D armónicamente separado de un punto dado C, respecto de otros dos A y B, basta con dibujar un cuadrivértice, con dos de sus puntos diagonales coincidentes con A y B, y que además uno de los lados que pasa por el tercer punto diagonal, pase por C. El punto D se obtiene intersecando el otro lado que pasa por el tercer punto diagonal con la recta r.



Hacer la construcción gráfica para obtener la recta conjugada armónica de la recta c, respecto a otras dos a y b (las tres rectas a, b y c, son concurrentes).

Se puede proceder de dos formas, una como una situación dual de lo anterior, construyendo el cuadrilátero adecuado. Y una segunda forma, cortando la rectas dadas por otra y utilizar el hecho que la razón doble se conserva por secciones y proyecciones, y por tanto poder utilizar la construcción que se describe arriba. / Applet CabriJava

30 Si las coordenadas de P, Q, R, S son $(a, b, c), (a, b, -c), (-a, b, c), (a, -b, c)$, demostrar que los puntos diagonales del cuadrivértice $PQRS$ son los vértices del triángulo de referencias. (Ver Ejercicio 33)

31 Por el punto medio M de la base BC de un triángulo $\widehat{ABC}$, se traza una recta variable que encuentra a los lados AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Se pide el lugar geométrico de los puntos de encuentro de las recta BE y CD.

/ Applet CabriJava

Resp. Paralela a BC por A.

32 Demostrar que si el triángulo $\widehat{ABC}$ es homólogo (perspectivo) con el $\widehat{A'B'C'}$ y con el $\widehat{B'C'A'}$, también lo es con el $\widehat{C'A'B'}$. / Applet CabriJava

33 En el plano proyectivo real, sean $A(1, 1, 1), B(1, -1, 1), C(-1, 1, 1)$ y $D(-1, -1, 1)$ los cuatro vértices de un cuadrivértice. Determinar las coordenadas de los tres puntos diagonales P, Q y R. Si R es el punto diagonal situado en el lado AB, encontrar las coordenadas del punto armónicamente separado de R respecto a A y B, y comprobar que está en la diagonal PQ.

34 Si (x^0, x^1, x^2) son las coordenadas homogéneas en un sistema de referencia $\{U_0, U_1, U_2\}$ en el plano proyectivo real y una recta r tiene por ecuación, respecto a este sistema, $2x^0 + 4x^1 - x^2 = 0$, encontrar un nuevo sistema de referencia proyectivo, con coordenadas homogéneas (y^0, y^1, y^2), respecto al cual la recta r tenga por ecuación $y^0 = 0$. Dar las ecuaciones del cambio de coordenadas.

35 Considerar, en el plano, un triángulo $\widehat{ABC}$ y una recta ℓ, que no pasa por sus vértices.

Ponemos $AB \cap \ell = C''$, $BC \cap \ell = A''$, $CA \cap \ell = B''$ y construimos los puntos A', B' y C' para los cuales $(B\ C\ A'\ A'') = (C\ A\ B'\ B'') = (A\ B\ C'\ C'') = -1$. Tomamos dos puntos diferentes P y Q sobre ℓ (ambos diferentes de A'', B'', C'') y considerando los puntos A''', B''' y C''' tales que $(P\ Q\ A''\ A''') = (P\ Q\ B''\ B''') = (P\ Q\ C''\ C''') = -1$. Entonces, se tiene que las rectas $A'A''', B'B'''$ y $C'C'''$ concurren en un punto L. / Applet CabriJava

Resp. Polo de ℓ respecto a la cónica que pasa por A, B, C, P, Q

36 Se da una proyectividad en el haz de rectas de origen O, en la que se corresponden las rectas del modo siguiente: $3x - y = 0$ se transforma en $x - y = 0$, $2x + y = 0$ en $y = 0$ y $x - 2y = 0$ en $x + y = 0$. Hallar:

A) La ecuación de la proyectividad.

B) Ecuación de la involución que tenga sus misma rectas dobles.

C) Par de rectas correspondientes en la involución y perpendiculares.

D) Par de rectas que separan armónicamente a cada recta doble de la involución con los ejes OX y OY.

E) Par de rectas que separan armónicamente a cada eje de coordenadas de las rectas dobles. / Applet CabriJava

37 Sobre la recta proyectiva real hallar la ecuación de la proyectividad determinada por los pares de puntos 3, –1; 0, 2 y –1, 1. Encontrar los puntos dobles.

Resp. $xx' - x' + 2 = 0$. No tiene puntos dobles.

38 De una proyectividad se dan dos pares de puntos homólogos y la condición de ser parabólica; ¿está determinada?

39 Una proyectividad de la recta proyectiva real en sí misma está determinada por los pares de puntos homólogos $1, 0; -2, 2$ y $0, 1$. Hallar su ecuación, los puntos dobles y los puntos límites.

Resp. $xx' - 4(x + x') + 4 = 0,\ 2(2 \pm \sqrt{3}),\ \{\infty, 4\},\ \{4, \infty\}$.

40 Hallar las proyectividades que conmutan con la involución $xx' + 1 = 0$.

Resp. $xx' + k(x' - x) + 1 = 0$

41 Estudiar las proyectividades de una recta proyectiva en sí misma que conservan un conjunto $\{A, B, C\}$ de tres puntos distintos. Encontrar las ecuaciones de dichas proyectividades respecto al referencia $\{A, B; C\}$ e indicar cuáles de ellas son involuciones.

42 Sea σ una proyectividad de la recta r en sí misma y τ una proyectividad de r en otra recta s. Demostrar que la proyectividad $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ es del mismo tipo que σ.

Resp. Si P es doble para σ, $\tau(P)$ lo es para $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$; si Q es doble para $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$, $\tau^1(Q)$ lo es para σ.

43 Clasificar, según la distribución de sus puntos dobles, la familia de proyectividades de la recta real:

$$xx' + (2 + \lambda)x + x' - 4 = 0.$$

Resp. Todas hiperbólicas.

44 Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos involuciones sea una involución es que conmuten.

Resp. $(\sigma \circ \tau)^2 = 1 \Leftrightarrow \sigma(\sigma \circ \tau)^2 \tau = \sigma\tau$

45 Sea σ una involución hiperbólica y X y X' sus puntos dobles Demostrar que para todo otro par P y Q tales que $\sigma(P) = Q$, se tiene que $(XX'PQ) = -1$.

Resp. $(XX'PQ) = (\sigma(X)\sigma(X')\sigma(P)\sigma(Q)) = (XX'QP)$

46 Se considera el plano afín euclídeo, determinar la ecuación de la proyectividad entre el haz de rectas con punto base $(1, 0)$ y la diagonal ℓ del primer cuadrante, definida como sigue: a cada recta r del haz le hacemos corresponder el punto R obtenido intersecando ℓ con su perpendicular desde el punto de intersección de r con el eje OY.

/ Applet CabriJava

47 Consideramos el plano ordinario. Obtener las ecuaciones de las perspectividades siguientes:

1. La obtenida al proyectar los punto del eje OX sobre el eje OY desde el punto $(1, 1)$.
2. Perspectividad entre los haces de rectas con con puntos base $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y con eje de perspectividad la recta $x = -1$.

/ Applet CabriJava

Resp. 1) $t \mapsto \frac{t}{t-1}$; b) $m \mapsto \frac{m+1}{2}$.

48 En la recta afín ampliada y respecto de una referencia cartesiana, se define una proyectividad mediante las condiciones siguientes: Los dos puntos límites coinciden en el $P(2)$ y el punto $Q(1)$ es doble.

1. Hállese la ecuación de la proyectividad.
2. Compruébese que es una involución.
3. Hállesen los puntos dobles y compruébese que forman una cuaterna armónica con cualquier par de puntos homólogos.

Resp. $xx' - 2(x + x') + 3 = 0$. Puntos dobles: $1, 3$.

49 En la recta real y respecto a una referencia cartesiana, se considera la involución tal que la imagen de $A\,(0)$ es $A'\,(1)$ y su punto central (punto medio de los doble) C es el conjugado armónico de $D\,(2/5)$ respecto de A y A'. Hállese la ecuación de la involución y los puntos tales que ellos y sus imagenes tienen por coordenadas números inversos.

/ Applet CabriJava

Resp. $xx' + 2(x + x') - 2 = 0$; imaginarios.

50 Reducir a la forma canónica las proyectividades: $xx' + 3x - 2x' - 2 = 0, \quad xx' - x - x' - 3 = 0$.

Resp. $y' = 4y$, $y' = -y$.

51 Sean A_i, A'_i $(i = 1, 2, 3)$ puntos sobre una recta r.

1. Probar que los pares (A_i, A'_i) $(i = 1, 2, 3)$ con $A_1 \neq A'_1$ son conjugados de una involución si y sólo si:
$$(A_1A'_1A_2A_3) = (A'_1A_1A'_2A'_3)$$
2. Respecto de una referencia proyectiva sobre r supongamos que los puntos A_i, A'_i $(i = 1, 2, 3)$ tienen por coordenadas no homogéneas $A_1(0), A'_1(1), A_2(2), A'_2(-\frac{1}{3}), A_3(-2)$ y $A'_3(-3)$. Probar que estos puntos verifican la condición anterior.
3. Calcular la involución en la que los pares de puntos anteriores sean conjugados.

/ Applet CabriJava

Resp. 3) $xx' + x + x' - 1 = 0$

52 Sea σ una proyectividad sobre una recta r, cuyos puntos invariantes son A y B. Encontrar las involuciones τ de la recta r que conmutan con σ. ¿Cuánto vale la razón doble: $\big(X, \tau(X), \sigma(X), \sigma^{-1}(X)\big)$, siendo X un punto de la recta r distinto de A?

Resp. Respecto a $\{A, B\}$, $\tau(x) = -x$; $\big(X, \tau(X), \sigma(X), \sigma^{-1}(X)\big) = -1$

53 Sea σ una proyectividad entre espacios proyectivos reales unidimensionales hiperbólica o parabólica. Demostrar que para cualquier punto A, sus homólogos por σ, $\sigma^2, \ldots, \sigma^n$ tienden a uno de los puntos dobles cuando n tiende a infinito.

54 Si una proyectividad σ entre dos rectas r y r' del plano proyectivo real aplica el punto $D \in r$ sobre $D' \in r'$, y si τ es una perspectividad de r' sobre r'' con centro sobre la recta DD', donde r'' es una recta que pasa por D, demostrar que la proyectividad producto $\tau\sigma$ es una perspectividad.

/ Applet CabriJava

Resp. $\tau(\sigma(D)) = D$.

55 Sean dos pares de puntos A, B y C, D sobre la recta real que se separan. Consideremos dos puntos X y X' que son conjugados armónicos de un mismo punto Y respecto a A y B y a C y D, respectivamente (i.e. $(XYAB) = -1$ y $(X'YCD) = -1$). La correspondencia $X \mapsto X'$, al variar X, es una proyectividad que no tiene puntos dobles (proyectividad elíptica).

56 Ecuación de la proyectividad entre dos haces de vértices en $A(1, 3)$ y $A'(2, 4)$ y en la que son homólogos los tres pares de rectas $x - 1 = 0$ y $y - 2x = 0$, $y - 3x = 0$ y $y - 4 = 0$, $x - y + 2 = 0, x + y - 6 = 0$. / Applet CabriJava

Resp. $mm' - 2m + 3m' + 6 = 0$.

57 Las líneas de dos haces con diferentes vértices en el plano euclídeo están en correspondencia biunívoca de tal manera que son colineales las intersecciones de líneas correspondientes. Encontrar un par de líneas perpendiculares en el primero, para el cual las líneas correspondientes en el otro, sea también perpendiculares.

58 Dos haces de rectas de distinto vértices y del mismo sentido tienen el mismo rayo origen y a cada rayo le asignamos como coordenada su pendiente con el rayo origen, es decir, la tangente del ángulo que forma con éste. A los rayos $a(1), b(-2)$ y $c(0)$, del primer haz, les corresponden los $a'(2), b'$ (paralelo a b) y c' (perpendicular a c), del segundo.

Hallar la ecuación de esta proyectividad, los otros dos rayos perpendiculares y correspondientes; los otros dos rayos correspondientes y paralelos y dos rayos correspondientes que forman un ángulo de 45°. / Applet CabriJava

Resp. $3mm' + 2m - 8 = 0; \{11/2, -2/11\}; \{4/3, 4/3\}; \{(-13 \pm \sqrt{201})/2, (9 \pm \sqrt{201})/6\}$.

59 Dadas dos rectas r y s y dos puntos A y B, fuera de ellas. Sea P un punto variable sobre r y sean M y N los puntos de corte de la rectas s con las rectas AP y BP, respectivamente. Establecer que la correspondencia entre rectas que pasan por A y rectas que pasan por B definida por $AN \mapsto BM$, es una perspectividad.

60 Considérese un punto P variable situado en el eje de las "x" en el plano ordinario y dos puntos fijos $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$. Sean M y N los puntos en el eje de las "y" donde se intersecan las rectas AP y BP, respectivamente. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas AN y BM.

/ Applet CabriJava

Resp. $(x + y - 3)(5x - 2y) = 0$ AB y eje de perspectividad.

61 Determinar analítica y gráficamente el punto homólogo del de coordenada -1, en la proyectividad entre el eje "x" y el eje "y" en el plano euclídeo, determinada por los tres pares de puntos homólogos de coordenadas $0, 3$; $1, -2$ y $2, -1$.

Idem para la recta homóloga a la de pendiente -1, en la proyectividad entre el haz de base en el punto $(0, 0)$ y el haz de base en $(9, 0)$, determinada por los tres pares de rectas homólogas de pendientes $0, 3$; $1, -2$ y $2, -1$.

Resp. $1/2$

62 Demostrar que si $\sigma: r \to r$ es una proyectividad parabólica, no existen involuciones que conmuten con ella.

63 Toda proyectividad parabólica o hiperbólica sobre una recta, de la que se conoce un punto doble y un par de puntos homólogos, puede ser construida como producto de dos perspectividades. Comprobar que el otro punto doble es la intersección de la rectas que une los centros de las perspectividades con la recta en la que está definida la proyectividad.

64 Dos lados de un triángulo variable $\widehat{ABC}$ están sobre los lados de una ángulo fijo A; la suma de los recíprocos de las longitudes de los lados AB y AC es constante. Probar que la recta del tercer lado pasa por un punto fijo.

/ Applet CabriJava

65 Dos lados de un triángulo variable $\widehat{ABC}$ están sobre los lados de un ángulo fijo A; la suma de las longitudes de los lados AB y AC es constante. Probar que el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices –perpendiculares en los puntos medios de los lados–) de todos los triángulos ABC están alineados.

/ Applet CabriJava

66 Dados cuatro puntos distintos A, B, C, D sobre una recta proyectiva real, dar las ecuaciones de las proyectividades de dicha recta sobre sí misma, tales que:

i) A, B, C, D se transforme en B, A, D, C.

ii) A, B, C, D se transforme en D, C, B, A.

iii) A, B, C, D se transforme en C, D, A, B.

Resp. $\{A, B; C\}; D(1, d); (x, y)- > (x', y'); 1)dxx' - yy' = 0; 2)dxx' - dx'y - xy' + dyy' = 0; 3)dxx' - dx'y - dxy' + yy' = 0.$

67 Dadas cuatro rectas distintas a, b, c, d de un mismo haz P, ¿existe una proyectividad del haz en si mismo que transforme a, b, c, d en b, c, a, d, respectivamente?

Resp. La proyectividad no existe.

68 Determinar las ecuaciones de la homografía que transforma los puntos $A(0, 0, 1), B(0, 1, 0), C(1, 0, 0), D(1, 1, 1)$ respectivamente en los puntos B, C, D, A. Hallar los elementos dobles de la misma.

/ Applet CabriJava

Resp. $\rho \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$. Pto. doble $(1, 0, 1)$. Recta doble $(1, -1, 1)$.

69 En coordenadas no homogéneas, hallar al ecuación de la homografía que tiene por puntos dobles el origen y los impropios de cada uno de los ejes OX y OY, teniendo además como puntos homólogos $(1, 1) \mapsto (2, -3)$.

Resp. $x' = 2x,\ y' = -3y$.

70 Hallar la ecuación de la afinidad determinada por los pares de puntos homólogos $(1, 0, 0) \mapsto (1, -1, 0),\ (1, 1, 0) \mapsto (1, 0, 0),\ (1, 0, 1) \mapsto (1, 1, 1)$

Resp. $x' = x + 2y - 1,\ y' = y$.

71 Una afinidad (homografía en el plano afín ampliado que conserva la recta impropia) variable tiene al origen de coordenadas como doble; hace corresponder al punto del infinito del eje "x" el del eje "y" y recíprocamente; al punto $U(1, 1)$ le corresponde el punto U' variable a lo largo de la recta $x + y = 0$. Se pide:

1) Qué forman las homólogas de la recta $x + y + 1 = 0$.

2) Ecuación de la proyectividad subordinada en el origen.

Resp. $x' = ty, y' = -tx$, 1) $x - y - 1/t = 0$, 2) $y = mx \mapsto y = -mx$.

72 Se dan dos puntos P y Q y dos rectas r y s del plano, tales que los puntos no están en las rectas y que las tres rectas PQ, r y s no son concurrentes. A cada punto X se le hace corresponder el punto X' tal que PX y QX' se cortan en r y PX' y QX en s. Probar que se trata de una homografía y hallar los elementos dobles.

Resp. Punto doble: $r \cap s$. Recta doble: PQ.

73 Sea en el plano proyectivo real una homografía σ de ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho x'^0 &= x^0 - x^1 + x^2 \\ \rho x'^1 &= 2x^0 - x^2 \\ \rho x'^2 &= -x^0 - x^1 + 3x^2 \end{aligned}$$

Sabemos que toda homografía transforma puntos alineados en puntos alineados, en particular la homografía en cuestión aplica un punto P de la recta $r \equiv x - y = 0$ en un punto P' de la recta r'. Determinar la ecuación de la recta r' y la de la proyectividad que homografía σ induce sobre r y r' ($P \in r \mapsto \sigma(P) = P' \in r'$). ¿Es ésta una perspectividad?

Resp. $r' : \ 2x + y - 3 = 0$.

74 En el espacio ordinario, consideremos los planos $\pi_1 : y = 0$ y $\pi_2 : x - 2z = 0$ y el punto $A(1, 1, 0)$. Definimos la aplicación $\sigma\colon \pi_1 \to \pi_2$ de la siguiente forma: a cada punto $P \in \pi_1$ le hacemos corresponder el punto $P' \in \pi_2$, tal que P, P' y A estén alineados. Fijar una referencia proyectiva en cada plano y obtener las ecuaciones de σ respecto a ellos. Concluir que es una homografía. ¿Qué puntos coinciden con sus imágenes? ¿Cuál es la imagen de la recta $y = 0, z = 0$.

75 Sea $P_n(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n. Demostrar que si $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ son subespacios proyectivos se tiene que:

$$\dim \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathcal{F}_i - (r-1)n.$$

76 Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tres subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $P_n(E)$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Demostrar que se verifica:

$$\mathcal{G} \cap (\mathcal{F} + \mathcal{H}) = \mathcal{F} + (\mathcal{G} \cap \mathcal{H}).$$

77 Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{F}$ de un espacio proyectivo $P_n(E)$, demostrar que si $\dim \mathcal{F} = r$, entonces, para cualquier hiperplano $\mathcal{H}$ de $P_n(E)$, se tiene

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \quad \text{o} \quad \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{H}) = r - 1.$$

78 Se considera el plano proyectivo sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$ de los enteros módulo 2. Se pide:

a) Número de puntos. b) Número de rectas y número de puntos en cada recta.

79 Sea $P_n(K)$ un espacio proyectivo n–dimensional sobre un cuerpo K de q elementos. Encontrar:

a) Número de puntos de $P_n(K)$. b) Número de hiperplanos de $P_n(K)$.

c) Número de hiperplanos que pasan por un punto fijado.

80 En un espacio proyectivo $P_n(K)$ de dimensión n sobre un cuerpo K de q elementos encontrar el número de rectas.

81 Sea E un espacio vectorial de dimensión 2 sobre un cuerpo finito de q elementos y consideremos la recta proyectiva $P(E)$. Calcular los puntos que tiene esta recta y cuáles son sus coordenadas homogéneas.

82 Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo K de q elementos y $P_n(K) = P(E)$ el espacio proyectivo asociado. Demostrar que el número de puntos de $P(E)$ es:

$$\#P(E) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1$$

El número de referencias de $P(E)$ es

$$(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\cdots(q^{n+1}-q^{n-1})q^n.$$

El número de subespacios proyectivos de dimensión d de $P(E)$ es

$$\frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\cdots(q^{n+1}-q^d)}{(q^{d+1}-1)(q^{d+1}-q)\cdots(q^{d+1}-q^d)}.$$

83 En el plano proyectivo complejo, hallar el punto de intersección de las dos rectas:

$$ix^0 + 2x^1 - x^2 = 0, \qquad (2-i)x^0 + 3x^1 + (1+i)x^2 = 0,$$

siendo i la unidad imaginaria, $i^2 = -1$.

84 Dado los siguientes puntos en el espacio proyectivo $P_4(\mathbb{R})$:

$$A_1(1,0,2,1,3), \quad A_2(1,2,-1,0,1), \quad A_3(0,1,-1,1,-1),$$

$$B_1(0,2,5,-1,2), \quad B_2(1,1,1,1,1), \quad B_3(0,6,1,1,6),$$

encontrar la intersección del subespacio proyectivo generado por A_1, A_2, A_3 con el subespacio proyectivo generado por B_1, B_2, B_3.

85 Demostrar que la intersección de un subespacio proyectivo k–dimensional con otro h-dimensional de un espacio proyectivo n–dimensional, es un subespacio de dimensión no menor que $k+h-n$.

86 Demostrar que si dos tetraedros del espacio proyectivo real de dimensión tres, son tales que las rectas que unen vértices homólogos concurren en un punto O, las caras homólogas se cortan de dos en dos en cuatro rectas coplanarias.

87 Sobre la recta proyectiva compleja, y respecto de una referencia, las coordenadas de los puntos A, B, C y D son, respectivamente: $1, i, -1$ y $-i$. Hallar la razón doble $(ABCD)$.

88 Sea la recta sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de los enteros módulo 5. Hallar la ecuación de la involución que tiene por puntos homólogos los pares de puntos 0, 3 y 1, 1. Hallar también el segundo punto doble.

89 Dada la ecuación $3xx' + 2x - x' - 4 = 0$, ¿representa una proyectividad en $\mathbb{Z}_5$, cuerpo de los enteros módulo 5?

90 Dada la proyectividad $2xx' - 3x + x' - 1 = 0$ en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de los enteros módulo 5, hallar los puntos correspondientes a los de coordenadas $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Indicar los puntos dobles.

91 Hallar la ecuación de la proyectividad determinada por los pares de puntos homólogos $-3, -1; -2, 0$ y $-1, 1$ en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de los enteros módulo 5. Encontrar los puntos dobles.

92 Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio proyectivo $\mathcal{F}$ de $P_3(\mathbb{R})$ determinado por los puntos que, respecto a la referencia canónica $\{U_0, U_1, U_2, U_3\}$, tienen por coordenadas $A_1(1,-1,0,0)$, $A_2(1,0,1,0)$, $A_3(1,0,0,2)$ y $A_4(1,1,1,2)$.

93 En el plano proyectivo, sean ℓ, p, q rectas que concurren en un punto O, y A, D puntos en ℓ; B, E en p y C, F en q, con

$$BC \cap EF = U, \quad CA \cap FD = V, \quad AB \cap DE = W.$$

Sea r una recta que no contiene a ninguno de los puntos anteriores, y r interesecta a las rectas UVW, ℓ, p, q en X, Y, Z, R, respectivamente. Entonces se tiene la siguiente relación entre razones dobles:

$$(WUVX) = \frac{1-(ADYO)}{1-(CFRO)} \frac{(BEZO)-(CFRO)}{(BEZO)-(ADYO)}.$$

94 En el plano proyectivo, sean p, q rectas que se intersecan en O, y A, B, C puntos en p y D, E, F en q, tales que

$$BF \cap CE = U, \quad CD \cap AF = V, \quad AE \cap BD = W.$$

Si ℓ es una recta que no pasa por ninguno de los puntos anteriores e interseca a las rectas UVW, p y q en X, Y, Z, respectivamente, entonces se tiene la siguiente relación entre razones dobles

$$(WUVX) = \frac{1-(BCOY)(EFOZ)}{1-(BAOY)(EDOZ)}.$$

95 En el plano proyectivo, la razón doble se conserva por secciones y proyecciones.

96 En el espacio ordinario, se denomina haz de planos al conjunto de planos que pasan por una recta fija (recta base del haz). Si $\pi_1 = 0$ y $\pi_2 = 0$ son las ecuaciones de dos de tales planos, cualquier otro del haz tiene por ecuación

$$\pi = \lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0,$$

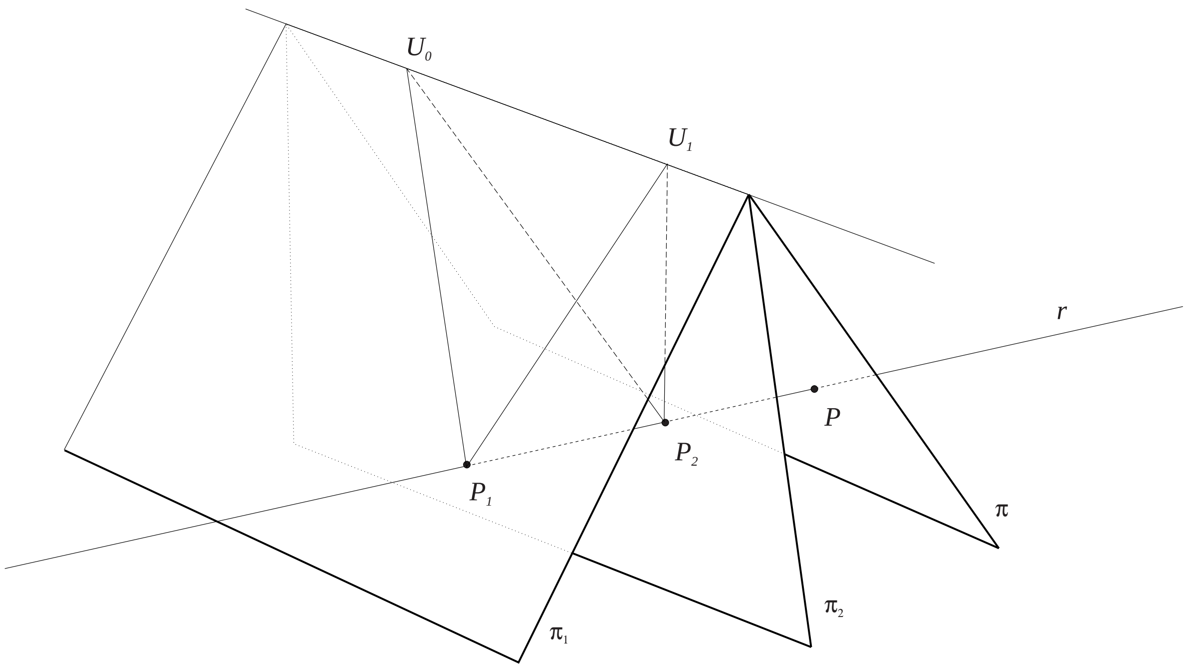
por lo que cualquier plano del haz viene determinado por un par de números (λ, μ) (coordenadas homogéneas respecto a π_1 y π_2). Podemos así definir la razón doble de cuatro planos del haz $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, poniendo

$$(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_1 \\ \mu_4 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}}.$$

Una recta r que no corte a la recta base de un haz de planos y ni esté contenida en ninguno de los planos, interseca a cada uno de los planos en un punto. Probar que si P_1, P_2, P_3 y P_4 son los puntos de corte de r con los planos π_1, π_2, π_3 y π_4, respectivamente, se tiene la igualdad de las razones dobles

$$(P_1P_2P_3P_4) = (\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4).$$

Nota: Se puede tomar un tetraedro de referencia $\{U_0, U_1, P_1, P_2\}$, como el de la figura.



Comprobarlo en el caso particular del haz de planos de recta base $x + y - 1 = 0, y - z = 0$; para los cuatro planos del dicho haz $\pi_1 \equiv x + 2y - z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 3y - 2z - 1 = 0$, $\pi_3 \equiv x + z - 1 = 0$, $\pi_4 \equiv 3x + 2y + z - 3 = 0$; y la recta r que corta a todos ellos: $z = 0, y = x$.

97 En el espacio ordinario, considerando coordenadas homogéneas (x^0, x^1, x^2, x^3), sea el subespacio proyectivo $\mathcal{H}_1$ generado por los puntos $A_1(1,1,0,0)$, $B_1(1,0,0,1)$ y $C_1(1,1,1,0)$ (el menor subespacio que contiene a estos puntos) y el subespacio $\mathcal{H}_2$ generado por los puntos $A_2(1,0,0,2)$, $B_2(1,0,0,0)$ y $C_2(1,1,2,0)$. Encontrar la ecuación paramétrica del subespacio intersección $\mathcal{L} = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Sea la proyectividad entre los espacios proyectivos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ que lleva los puntos $A_1 \mapsto B_2$, $B_1 \mapsto A_2$ y $C_1 \mapsto C_2$. Determinar la imagen de la recta $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$.

98 Sea ABC un triángulo no equilátero. Sea T su circunferencia circunscrita y O su centro.

Las tangentes en A, B , C a la misma forman un triángulo A' B' C'. Sea A" B" C" el homotético de A'B'C' de centro O y razón -1/2.

1.-Demostrar que ABC y A" B" C" son homólgicos*, cuyo centro D de homología está sobre T.

2.- Demostrar que cada uno de los puntos A B C D pueden ser obtenidos de la misma manera que D a partir de A B C.

(*) Homólogicos en el sentido de Desargues: sus vértices dos a dos se encuentran sobre tres rectas que tienen un punto de concurrencia.

99 Si p es la polar trilineal del punto P respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$ y A' el polo trilineal de p respecto a $\widehat{PBC}$, y se definen análogamente B' y C', los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ están en perspectivadad con centro de perspectivadad P.

100 El triángulo anticeviano del punto P respecto el triángulo $\widehat{ABC}$ es el triángulo $\widehat{A"B"C"}$ tal que $\widehat{ABC}$ es el triángulo ceviano de P respecto a $\widehat{A"B"C"}$. Por ejemplo:

El triángulo anticeviano del incentro es el triángulo de los excentros.

El triángulo anticeviano del baricentro es el triángulo antimedial.

El triánglo anticeviano del simediano es el triángulo tangencial.

Dado un punto P y un triángulo $\widehat{A_0B_0C_0}$, se consideran las suseción de triángulos anticevianos $\widehat{A_kB_kC_k}$, cada uno de ellos el triángulo anticeviano respecto a P del anterior, $\widehat{A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}}$. Demostrar que la posición límite de los vértices A_k, B_k y C_k, es la recta polar de P respecto a cualquier triángulo $\widehat{A_kB_kC_k}$.

(El triángulo antimedial del triángulo $\widehat{ABC}$ es el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ formado por las paralelas a cada lado de $\widehat{ABC}$ trazadas por el vértice opuesto. En tal caso $\widehat{ABC}$ es el triángulo medial del $\widehat{A'B'C'}$.

Las simedianas de un triángulo son las rectas isogonales de las medianas. Son tres rectas concurrentes en el simediano.) .

101 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P de su plano, una recta variable pasando por P interseca a dos lados de $\widehat{ABC}$ en U y V. El lugar de los puntos W tales que $(UVPW) = -1$ están en el triángulo anticeviano de P respecto a $\widehat{ABC}$.

102 Se considera una aplicación $\sigma \colon P_1(E) \to P_1(E')$, entre espacios proyectivos unidimensionales con el mismo cuerpo de escalares, tal que la razón doble de cuatro puntos de $P_1(E)$ es igual a la razón doble de los cuatro puntos imagen, por σ, en $P_1(E')$.

a) Pruébese que σ es una aplicación biyectiva.

b) Ecuaciones de σ, respecto de una referencia $\{U_0, U_1; U\}$ de $P(E)$ y la referencia $\{\sigma(U_0), \sigma(U_1); \sigma(U)\}$ de $P(E')$.

c) Indíquese si σ es una proyectividad.

103 Sobre la recta proyectiva compleja hallar la proyectividad que tiene los puntos $i, -i$ como puntos dobles y $0, -1$ por puntos homólogos.

104 Sobre la recta real, se llama centro de una involución al punto homólogo del punto impropio. Demostrar que el producto de distancia del centro de involución a cualquier par de puntos homólogos es constante (a este producto se denomina parámetro de la involución). Demostrar además que el parámetro de involución es positivo en las involuciones hiperbólicas y negativos en las elípticas y que el centro de involución es el punto medio de los puntos dobles.

105 Hallar la ecuación de la involución sobre la recta proyectiva compleja cuyos puntos dobles son i y $-i$.

106 Hallar la ecuación de la proyectividad determinada en la recta proyectiva sobre $\mathbb{Z}_7$ por los pares de puntos homólogos $2, 1;\ 4, 3$ y $0, 2$.

107 Se da, en plano, una perspectividad entre dos haces de rectas de bases O y O', y una recta r, que no pasa por los puntos base. Al cortar la recta r por dichos haces, se define sobre ella una proyectividad, en la que a cada punto P le corresponde el punto de intersección P' de la recta $O'P'$ homóloga de OP. ¿Donde se encuentran los puntos dobles de esta proyectividad? Deducir que tal proyectividad no puede ser elíptica.

108 Un tangente variable a una circunferencia determina sobre dos tangentes fijas una proyectividad. .

109 En dos planos superpuestos se tiene una correlación en la que son homólogos:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Puntos} & (0,1,0) & (0,1,1) & (1,0,2) & (1,0,0) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Rectas} & (4,1,0) & (4,1,1) & (3,2,1) & (3,2,-1) \end{array}$$

Hallar la ecuación de la correlación, los elementos involutivos, la cónica lugar de puntos (pertenecientes a sus rectas homólogas) y la cónica lugar de rectas (incidente con sus puntos homólogos).

110 Hállense todas las proyectividades, $\sigma(x^0, x^1, x^2) = (x'^0, x'^1, x'^2)$ del plano afín ampliado $\bar{A}(I\!R^3)$ en sí mismo, que no sean biyectivas y estén definidas en el conjunto menos amplio posible, tales que:

— transformen la recta del infinito en la $x'^0 + x'^1 = 0$,

— la recta $x^0 - x^1 - x^2 = 0$ se transforme en la del infinito,

— $\sigma(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

111 Hállese el valor real que hay que asignar al parámetro a para que:

$$\begin{aligned} \rho x'^0 &= x^0 + x^2 - x^3 \\ \rho x'^1 &= x^0 + x^1 + x^2 \\ \rho x'^2 &= 2x^0 + x^1 + x^3 \\ \rho x'^3 &= ax^1 + x^2 - x^3 \end{aligned}$$

sean las ecuaciones de una proyectividad no biyectiva y hállese, en tal caso el subconjunto del espacio proyectivo real $P_3(I\!R)$ en el que está definida.

Para dicho valor a, hállese la relación que han de satisfacer α, β, γ y δ para que la proyectividad esté definida en todos los puntos del plano

$$\alpha\, x^0 + \beta\, x^1 + \gamma\, x^2 + \delta\, x^3 = 0.$$

112 Encontrar la condición necesaria y suficiente para que sea una homología con centro propio la transformación afín

$$x' = a^1_1 x + a^1_2 y + a^1_0 \qquad\qquad y' = a^2_1 x + a^2_2 y + a^2_0.$$

113 Clasificar las homografías siguientes, y obtener sus puntos y rectas dobles.

$$A)\quad \begin{array}{rcl} \lambda\, x'^0 &=& 3x^1 + x^2 \\ \lambda\, x'^1 &=& x^0 - x^1 - x^2 \\ \lambda\, x'^2 &=& x^0 - 3x^2 \end{array} \qquad B)\quad \begin{array}{rcl} \lambda\, x'^0 &=& 3x^0 - x^1 \\ \lambda\, x'^1 &=& x^0 + 5x^1 \\ \lambda\, x'^2 &=& x^0 - 2x^1 + x^2 \end{array}$$

114 Hallar los elementos dobles de la homografía:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

y la imagen de los puntos de $8(x^1)^2 + 8(x^2)^2 - (x^0)^2 = 0$.

115 Dada la homografía

$$\lambda\, x'^0 = x^1 + x^2 \qquad \lambda x'^1 = -x^0 + 2x^2 \qquad \lambda x'^2 = -x^0 + x^2.$$

se pide clasificarla y hallar la ecuación de la proyectividad entre la primera bisectriz de los ejes x^1x^2 del primer plano y su recta homóloga en el segundo plano.

116 Encontrar la condición necesaria y suficiente para que mediante una transformación afín a cualquier recta le corresponda una recta paralela a ella. ¿De qué transformaciones particulares se trata?

117 Probar que la homografía que transforma los puntos A, B, C, D en B, A, D, C es una homología. Determinar el centro y el eje.

118 Probar que la siguiente homografía es una homología y determinar su centro, su eje y la razón de homología:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

119 Si σ es una homología especial de centro O, y P es un punto no perteneciente al eje demostrar que la cuaterna $O, P, \sigma(P), \sigma^{-1}(P)$ es armónica.

120 Comprobar que si el centro de una homología es el punto (a^0, a^1, a^3) y el eje es la recta $\omega = u_0x^0 + u_1x^1 + u_2x^2 = 0$, sus ecuaciones son:

$$\lambda x'^0 = mx^0 + a^0\omega \qquad \lambda x'^1 = mx^1 + a^1\omega \qquad \lambda x'^2 = mx^2 + a^2\omega$$

donde m es una constante.

121 Una homología (geométrica) es una transformación del plano en sí mismo que lleva puntos alineados en puntos alineados y que tiene una recta de puntos dobles (eje de homología) y, por consiguiente, un punto doble (centro de homología).

Dados dos pares de rectas que se cortan, determinar una homología que transforme cada par de rectas en un par de rectas perpendiculares. / Applet CabriJava

122 Construir gráficamente la homología que proyecta un cuadrilátero en un cuadrado de lado dado. / Applet CabriJava

123 Dados el punto A, la recta r y sus elementos homólogos A' y r', el centro de homología O, se pide determinar el eje de la homología que definen. / Applet CabriJava

124 De una homología afín en el plano, se conocen los puntos A, B y sus homólogos A', B' y el punto Q del eje de homología. Sabiendo que AB es paralelo a $A'B'$, se pide:

Construir el eje y los homólogos de los triángulos equiláteros que tengan como uno de sus lados el AB dado. / Applet CabriJava

125 Toda cónica puede ser proyectada mediante una homología en una circunferencia. / Applet CabriJava

126 Ecuaciones de homología de centro en $(3, -2)$, eje $5x - y - 5 = 0$ y puntos homólogos $A(1, -4)$ y $A'(-1, -6)$.

127 Verificar que la tansformación dada por

$$x' = 5x + 12y + 3, \qquad y' = 8x + 25y + 6,$$

es un homologia afin. Determinar su centro, su eje y la razón de homología.

128 Demuéstrese que si se traslada el eje de una homología sin mover el centro ni la recta límite, la nueva figura imagen es homotética de la anterior. / Applet CabriJava

129 Dado el triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto D en su plano, determinar los elementos de la homología (centro, eje y recta limite) que transforme el triángulo $\widehat{ABC}$ en otro equilátero de lado dado y el punto D en su ortocentro. / Applet CabriJava

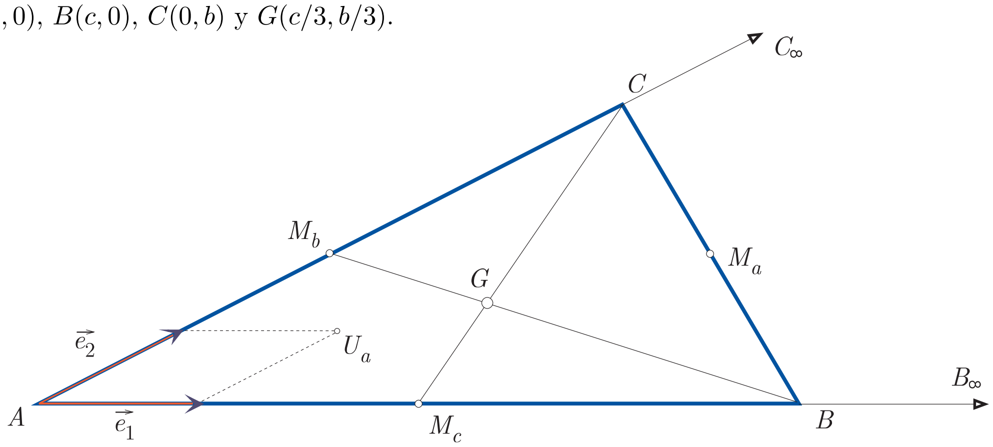
130 Sean σ_1 y σ_2 dos homologías armónicas con distintos centros y distintos ejes que se cortan en la recta que une sus centros. Demostrar que su producto tiene un solo punto fijo y una sola recta fija. / Applet CabriJava

131 En la familia de afinidades del plano de ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= ax + ay + b \\ y' &= ax + 6y + b^2 \end{aligned}$$

hay cuatro homologías, cuyos ejes son los lados de un paralelogramo.

132 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ con longitudes a del lado BC, b del lado CA y c del lado AB; consideremos la referencia afín euclídea $\{A; \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2\}$, formada por el vértice A y los vectores unitarios $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$ y $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ con origen en A y sentido el de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, respectivamente. En esta referencia, las coordenadas de los vértices y del baricentro (o centro de gravedad) de $\widehat{ABC}$ son $A(0, 0)$, $B(c, 0)$, $C(0, b)$ y $G(c/3, b/3)$.



En el plano proyectivo obtenido ampliando el plano afín con la recta del infinito y respecto a la referencia proyectiva $\bar{\mathcal{R}}_a = \{A, B_\infty, C_\infty; U_a\}$ (el vértice A, los puntos del infinito de los ejes coordenados AB y AC y el punto unidad $U_a(1, 1)$), se tiene que

$$A(1, 0, 0), \qquad B(1, c, 0), \qquad C(1, 0, b), \qquad G(3, c, b).$$

Consideremos la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{A, B, C; G\}$, formada por estos puntos (punto unidad en G), obtener las expresiones de cambio de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ y (x, y, z) de un punto respecto a las referencias $\bar{\mathcal{R}}_a$ y $\mathcal{R}$.

Las coordenadas homogéneas en la referencia proyectiva $\{A, B, C; G\}$ son las COORDENADAS BARICÉNTRICAS respecto a $\widehat{ABC}$.

133 Demuéstrese que las rectas que unen los vértices de un triángulo con dos puntos cualesquiera de su plano, cortan a los lados opuestos en seis puntos que están en una cónica.

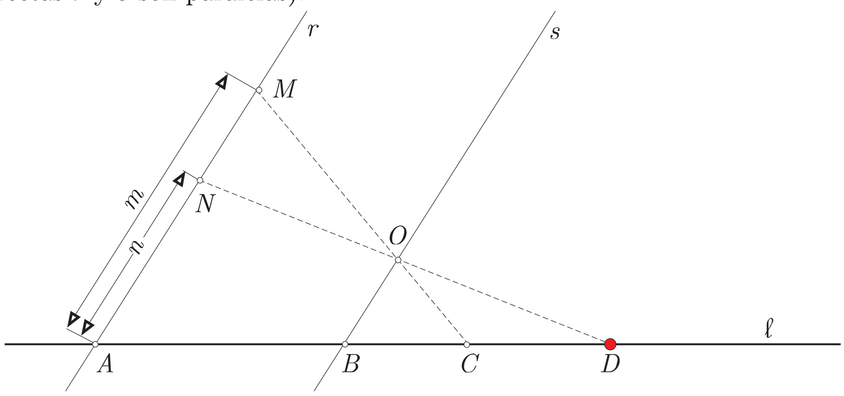
Enunciar el dual. / Applet CabriJava

134 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano, de coordenadas homogéneas (p^0, p^1, p^2), referidas a la referencia proyectiva $\{A, B, C\}$. Si P_a, P_b y P_c son los puntos de corte de las rectas AP, BP y CP con los lados BC, CA y AB, respectivamente, sean P'_a el conjugado armónico de P_a respecto a B y C; P'_b el conjugado armónico de P_b respecto a C y A; y P'_c el conjugado armónico de P_c respecto a A y B. Demostrar que los puntos P'_a, P'_b y P'_c están en una recta, denominada polar trilineal (o tripolar) de P, respecto a $\widehat{ABC}$. ¿Cuál es su ecuación? / Applet CabriJava

135 En una recta se consideran los cuatro puntos A, B, C y D de abscisas a, b, c y d, respectivamente. Establecer que si $(A\,B\,C\,D) = -1$ (es decir, A y B están armónicamente separados de C y D), entonces $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$.

Deducir de lo anterior que si M es el punto medio de AB, se verifica que $\overline{MA}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.

136 Justificar la siguiente construcción del punto D tal que con los puntos A, B y C, se tenga que la razón doble $(A\,B\,C\,D) = m/n$ (las rectas r y s son paralelas).



137 Teorema de Desargues:

Dados dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ que se relacionan de tal forma que las rectas AA', BB' y CC', que unen vértices homólogos, son concurrentes en un punto O, entonces los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta e.

Sea la homografía (homología) determinada por los cuatro pares de puntos homólogos: $O \mapsto O, A \mapsto A', B \mapsto B'$ y $C \mapsto C'$. Si $P = BC \cap B'C'$, establecer que los puntos P y P' (su homólogo) coinciden.

Concluir que en esta homografía, e es una recta de puntos dobles (eje de homología) y un punto cualquiera del plano y su homólogo están alineados con O (centro de homología). / Applet CabriJava

138 Consideremos la homografía en plano, distinta de la identidad, involutiva (su cuadrado es la identidad), que deja invariante el origen $O(0, 0)$ y a cada punto de la recta $d: x = 1$ lo lleva es sí mismo; determinar su ecuación. Sea ℓ una recta arbitraria que pasa por O y corta a d en A, demostrar que O y A están armónicamente separados de P y su imagen, para todo punto P de ℓ.

139 Razonar la siguiente afirmación: ≪Dados cuatro puntos alineados M, P, A y A', para encontrar el transformado M' del punto M en la involución que tiene P como punto fijo y que transforma A en A', es suficiente determinar:

— el conjugado armónico P' del punto P, respecto a los puntos A y A'.

— el conjugado armónico M' de M respecto a los puntos P y P' ≫.

140 En el plano ordinario se consideran, respecto a un sistema de coordenadas cartesianas rectangular, los siguientes puntos:

$$U_0(0,0),\quad U_1(1,0),\quad U_2(1,1);\qquad V_0(0,1),\quad V_1(-1,1),\quad V_2(-1,0);\qquad U(0,2).$$

1. Dar una determinación fija a las referencias proyectivas $\mathfrak{R}_1 = \{U_0, U_1, U_2; U\}$ y $\mathfrak{R}_2 = \{V_0, V_1, V_2; U\}$, siendo U el punto unidad en cada una de ellas.
2. Si (u^0, u^1, u^2) y (v^0, v^1, v^2) son las coordenadas homogéneas respecto a las referencias proyectivas $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$, respectivamente, obtener las coordenadas (u^0, u^1, u^2) en función de las (v^0, v^1, v^2).
3. A parte del punto U, encontrar otro punto cuyas coordenadas homogéneas sean las mismas respecto a las dos referencias proyectivas $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$.

Resp. 3) Punto del infinito del eje de ordenadas.

141 Se tienen cuatro puntos A, B, C y D sobre una circunferencia Γ.

Sea K_a el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{BCD}$, K_b el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ACD}$, K_c el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ABD}$ y K_d el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ABC}$.

Sea σ la transformación proyectiva del plano, definida por: $\sigma(A) = K_a, \sigma(B) = K_b, \sigma(C) = K_c, \sigma(D) = K_d$. Determinar los puntos fijos y las rectas dobles en tal transformación.

142 Sea la homogrfía en el plano determinada por los cutro pares de puntos homólogos

$$A(0,0) \mapsto A'(-1,1),\quad B(-1,0) \mapsto B'(1,-2),\quad c(0,-1) \mapsto C'(0,-1),\quad D(1,1) \mapsto (-1,3/2).$$

A las rectas que pasan por $P(1,0)$ le corresponde, en esta homografía, rectas que pasan por un punto fijo P'. Definir analíficamente la correspondencia entre las rectas de estos dos haces. Encontrar la ecuación de la hipérbola, lugar geométrico de las rectas homólogas de estos dos haces (pasa por C, P y P'). / Applet CabriJava