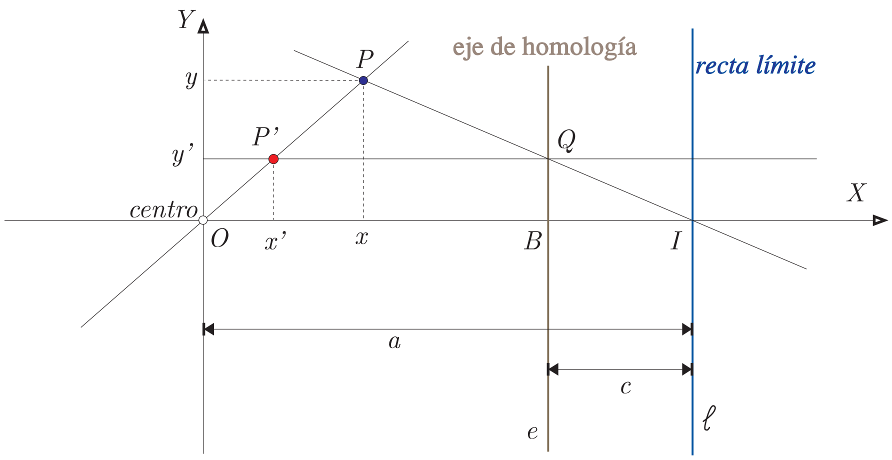
Proyección mediante una homología en el plano

Angel Montesdeoca

— *Definición*

En un sistema de coordenadas rectangulares OXY, sean dos rectas, e y ℓ, paralelas al eje OY (denominadas, respectivamente, recta base (o eje) y recta límite) que cortan a la eje OX en B e I, respectivamente. Para un punto P del plano se considera el punto Q de intersección de la recta PI con la recta base, entonces al punto P', intersección de la recta paralela al eje OX por Q, con la recta OP, se le llama proyección de P y a la correspondencia $P \mapsto P'$, homología. Se dice además que P y P' son puntos homólogos.



— *Ecuaciones de la homología*

Es fácil obtener la relación entre la coordenadas de $P(x, y)$ y $P'(x', y')$:

$$x' = \frac{cx}{a-x}, \quad y' = \frac{cy}{a-x}; \qquad x = \frac{ax'}{c+x'}, \quad y = \frac{ay'}{c+x'}. \tag{1}$$

— *Elementos dobles de una homología*

Los puntos que se proyectan en sí mismos son el origen (denominado centro de la proyección o de homología) y los puntos de la recta base. Las rectas que se transforman en sí mismas son la recta base (denominada eje de la proyección o de homología) y todas rectas que pasan por el origen.

Estas propiedades motivan que se denomine homología a esta proyección y a un punto y su proyección, puntos homólogos.

— *Correspondencia entre puntos impropios*

Los puntos de la recta límite ℓ se transforman en los puntos de infinito. Y la recta del infinito se transforma en la recta, paralela al eje, $k' \equiv x = -c$ (conocida también como recta límite, aunque, si no se indica lo contrario, cuando decimos recta límite, nos referimos a la primera).

Para obtener gráficamente la recta límite k', nos bastará determinar uno de sus puntos: Sea una recta ID, que corta al eje en D. La intersección de la perpendicular al eje, por D, con la paralela a ID por O, nos da un punto de k'.

Obsérvese que la distancia de la primera recta límite ℓ al eje es la misma que la distancia de la otra recta límite k' al centro.

— ***Homóloga de una recta de la que se conoce los puntos de corte con el eje y con la recta límite***

Si una recta corta al eje en C y a la recta límite ℓ en D, como D se transforma en el punto impropio de la recta OD y el punto C queda fijo, la recta CD se transforma en la recta paralela a OD por C.

— ***Rectas que se cortan en la recta límite***

Todo par de recta que se corten en la recta límite ℓ, se transforman en rectas paralelas.

— ***Rectas paralelas se proyectan en rectas concurrentes***

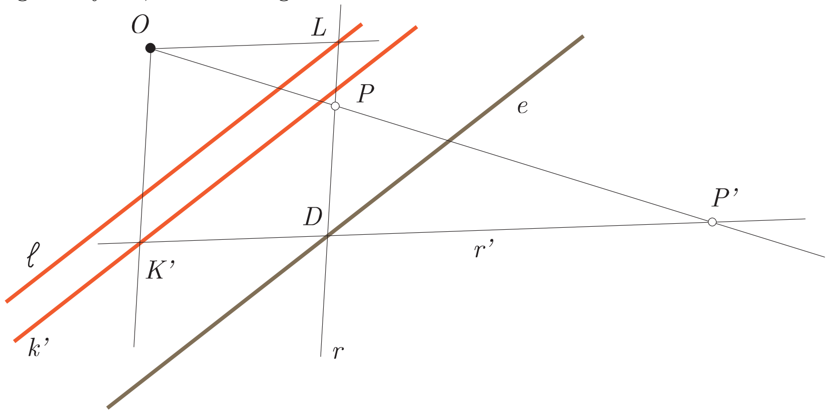
Pues el punto impropio común, se proyecta en un punto de la recta $x = -c$. De hecho si las rectas paralelas se expresan por $mx + ny + t = 0$ (t variable), éstas se transforman en las de ecuación $amx + any + t(c + x) = 0$, que tienen como punto de concurrencia el $(-c, cm/n)$.

— ***Determinación de una homología***

a) *Una homología queda determinada conociendo el centro, el eje y un par de puntos homólogos.*

Por nuestra definición, sólo nos bastaría determinar la recta límite ℓ. Si P y P' son los puntos homólogos y Q el punto de intersección de la perpendicular al eje por P' con éste, entonces la recta PQ corta a la perpendicular al eje por O en I. La paralela al eje por I es la recta límite.

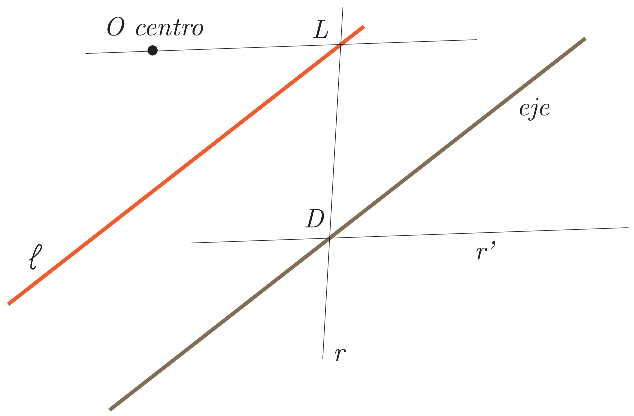
Otra forma de determinar las rectas límite de una homología, dada por su centro O, su eje e y un par de puntos homólogos P y P', es como sigue:



Tomemos un punto D en el eje, las rectas $r \equiv PD$ y $r' \equiv P'D$, son homólogas. El punto impropio K de r, tiene como homólogo el punto K' de intersección de r' con la paralela a r por O. El punto L' (impropio de la recta r') es el homólogo del punto L, intersección de la paralela a r' por O con la recta r. Las rectas límite ℓ y k' son las paralelas al eje por L y K', respectivamente.

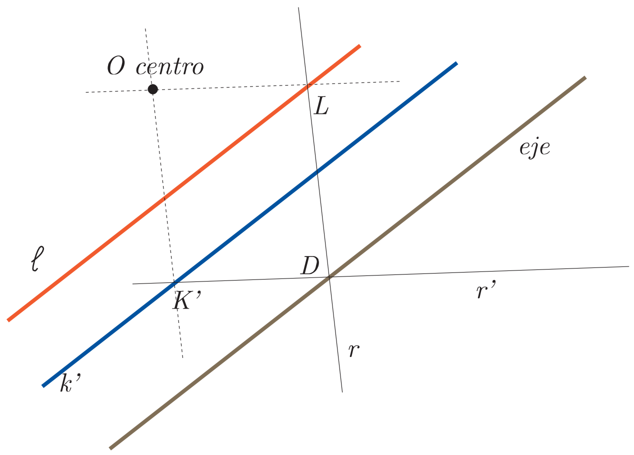
b) *Una homología queda determinada conociendo el centro, el eje y un par de rectas homólogas.*

Si r y r' son dos rectas homólogas (que se han de cortar en el eje), para determinar la recta límite, basta con trazar la paralela a r' por el centro O, la cual corta a r en L. La paralela al eje por L es la recta límite.



c) *Una homología queda determinada conociendo el centro, el eje y la recta homóloga de la recta impropia.*

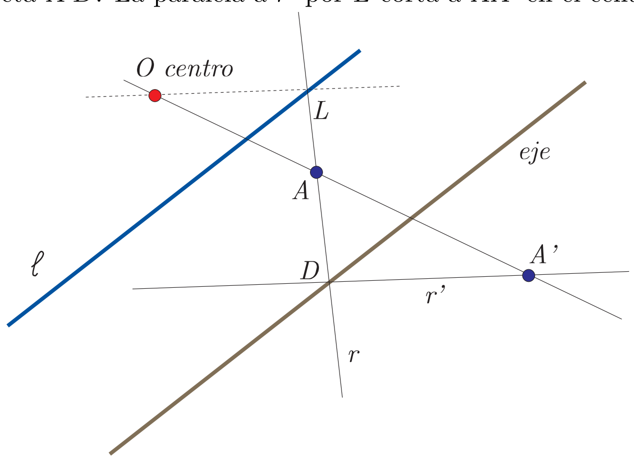
Tomando una recta auxiliar r' que corta al eje en D y a la recta k' (imagen de la recta impropia) en K'. La imagen recíproca r de r', que pasa por D, es paralela a OK'. La paralela a r' por el centro O, corta a r en L, que está en la recta límite.



d) *Una homología queda determinada conociendo el eje, la recta límite y un par de puntos homólogos.*

El centro O, a determinar, ha de estar en la recta AA', que pasa por los puntos homólogos dados.

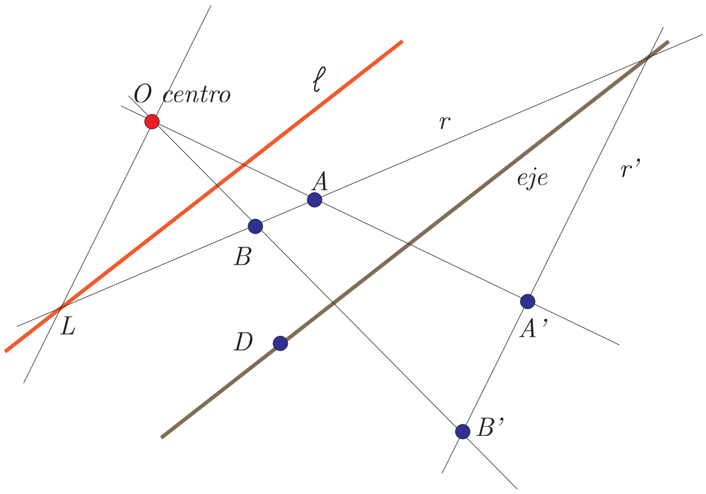
Tomemos una recta auxiliar r, pasando por A, la cual corta al eje en D y a la recta límite en L. La homóloga r' de r es la recta $A'D$. La paralela a r' por L corta a AA' en el centro de homología.



e) *Una homología queda determinada conociendo un punto del eje y dos pares de puntos homólogos.*

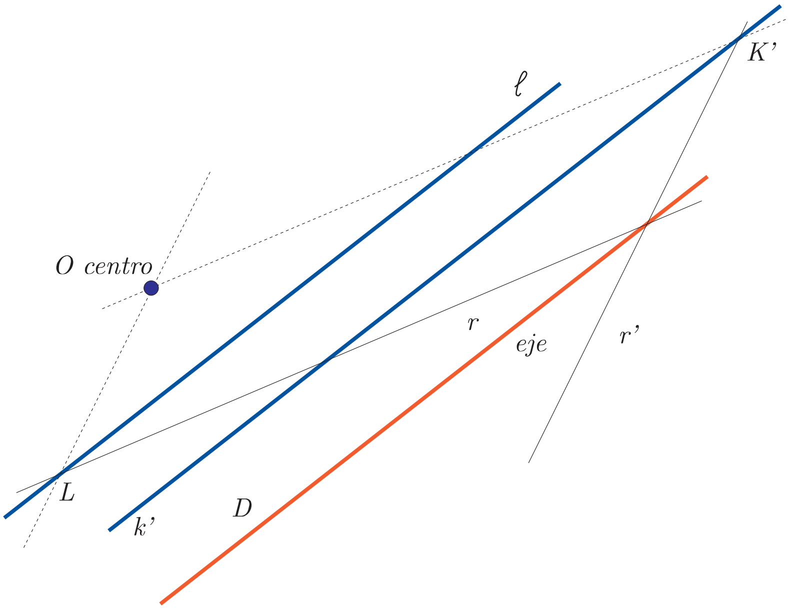
Las recta AA' y BB', determinadas por dos pares de puntos homólogos, se cortan en el centro O de homología. El eje quedada determinado por el punto D, dado en él, y el de intersección de las rectas AB

y $A'B'$. Finalmente, la paralela a $A'B'$ por O, corta a AB en L y la paralela por este punto al eje es la recta límite.



f) *Una homología queda determinada conociendo el centro y las rectas límites.*

Sean O, ℓ y k' el centro y las rectas límites dadas. Trazamos una recta auxiliar r, que corta a ℓ en L; su recta homóloga r' tiene la dirección de OL. La paralela a r por O corta a k' en K' y r' es la paralela a OL por K'. El punto de corte de r y r' está en el eje: que queda determinado.



— ***Razón de homología***

La razón doble del centro, un punto del eje y un par de puntos homólogos de la recta (doble) determinada por aquellos, es constante. Se le denomina razón de homología, o también módulo o característica.

Pues, considerando las abscisas de estos cuatro puntos:

$$(0 \;\; a-c \;\; x \;\; x') = \frac{x}{x-a+c} : \frac{x'}{x'-a+c} = \frac{a}{c}.$$

— ***Homologías armónicas***

Una homología es involutiva si y sólo si la razón de homología es -1*.*

Pues si D es el punto de intersección de la recta OP con el eje, de $(O\ \ D\ \ P\ \ P') = 1/(O\ \ D\ \ P'\ \ P)$, resulta que $(O\ \ D\ \ P\ \ P') = -1$. Debido a este resultado, a la homología involutiva también se le conoce como homología armónica.

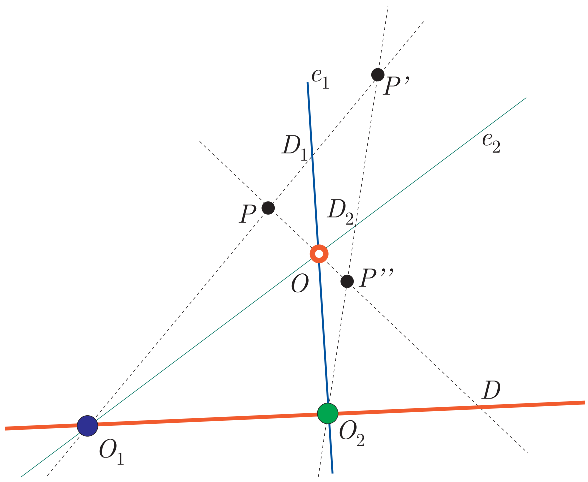
— *Producto de homologías involutivas*

Si σ_1 y σ_2 son dos homologías involutivas, con centros O_1 y O_2 y ejes e_1 y e_2, tales que O_1 está en e_2 y O_2 está en e_1, el producto $\sigma_2\sigma_1$ es una homología involutiva con centro en $e_1 \cap e_2$ y eje O_1O_2.

Si A es un punto de la recta O_1O_2, se tiene

$$(O_1\ \ O_2\ \ A\ \ \sigma_1(A)) = -1, \qquad (O_2\ \ O_1\ \ \sigma_1(A)\ \ \sigma_2\sigma_1(A)) = (O_1\ \ O_2\ \ \sigma_2\sigma_1(A)\ \ \sigma_1(A)) = -1,$$

luego $\sigma_2\sigma_1(A) = A$; es decir todos los puntos de O_1O_2 son dobles en la homología producto $\sigma_2\sigma_1$. Así mismo, el punto $O = e_1 \cap e_2$ es doble para cada homología, por estar en sus respectivos ejes; por tanto, es doble para el producto.



El producto es involutivo: Sea $P' = \sigma_1(P)$ y $D_1 = PP' \cap e_1$, se tiene $(O_1\ \ D_1\ \ P\ \ P') = -1$. Proyectando desde O sobre O_2P', se tiene que $(D_2\ \ O_2\ \ P''\ \ P') = (O_2\ \ D_2\ \ P'\ \ P'') = -1$; es decir, $\sigma_2(P') = P''$. Así, $\sigma_2\sigma_1(P) = P''$.

Proyectando O_2P desde O_1 sobre OP, se tiene, si $D = OP \cap O_1O_2$, que $(D\ \ O\ \ P\ \ P'') = -1$, o sea, $(O\ \ D\ \ P\ \ P'') = -1$: $\sigma_2\sigma_1$ es involutiva.

También se puede establecer que la homología $\sigma_2\sigma_1$ es involutiva, tomando dos puntos armónicamente separados P y P' con respecto a O_1 y O, es decir, $(O\ \ O_1\ \ P\ \ P') = -1$. Como se verifica que $\sigma_2(\sigma_1(P)) = \sigma_2(P') = P'$, se tiene que $(O\ \ O_1\ \ P\ \ \sigma_2\sigma_1(P)) = -1$, luego $\sigma_2\sigma_1$ es involutiva.

— *Ejemplo de homología armónica*

Sean A y B dos puntos del plano. A un punto P se le asigna el punto P' tal que P, P' y A estén alineados, y que BA sea bisectriz de $\widehat{PBP'}$. ¿Qué transformación es la así definida?

Tomando un sistema de coordenadas cartesianas rectangular con origen en A y eje de abscisas conteniendo al segmento AB, tememos las siguientes coordenadas:

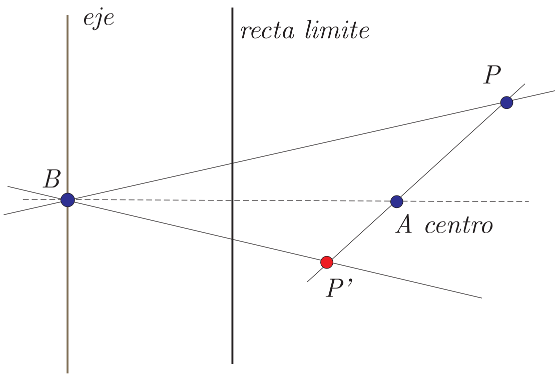
$$A(0,0), \quad B(b,0), \quad P(\xi,\eta), \quad P'(\xi',\eta').$$

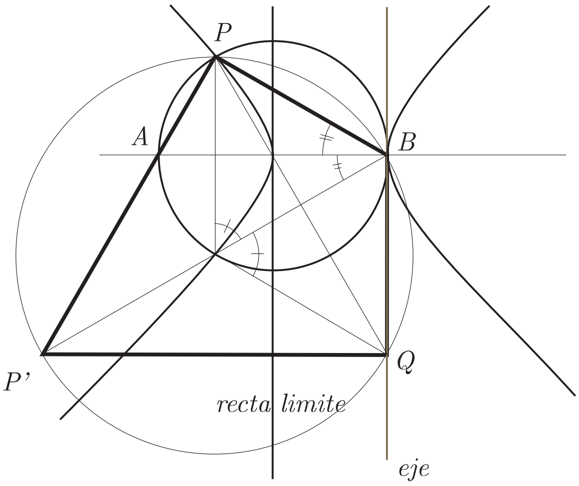
Como BA ha de ser la bisectriz de $\widehat{PBP'}$, se verifica que la razón doble de las rectas BP, BP', BA y la perpendicular a BA por B, es armónica:

$$\left(\frac{\eta}{\xi - b}\ \frac{\eta'}{\xi' - b}\ 0\ \infty\right) = -1.$$

De aquí se deduce las ecuaciones de la transformación $P \longmapsto P'$ son:

$$x' = \frac{bx}{2x-b}, \qquad y' = \frac{by}{2x-b}.$$



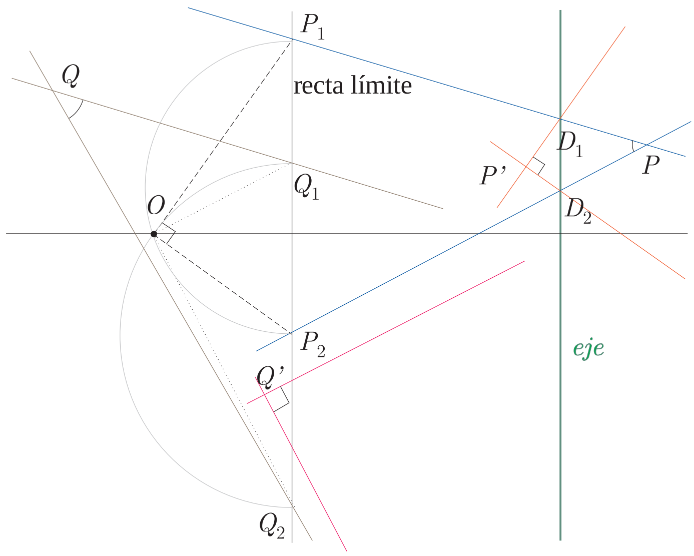


Se trata de las ecuaciones de una homología armónica de centro en $A(0,0)$, eje $x = b$ y recta límite $x = b/2$.

NOTA: Sea el punto P, su homólogo P' y el punto Q de intersección del eje con la perpendicular a él por P'; para que $PP'QB$ forme una cuadrilátero armónico (inscrito en un circunferencia), P únicamente ha de ser un punto de intersección de la circunferencia de diámetro AB con la hipérbola equilátera de vértices en B y en el punto medio de AB.

Un cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ armónico verifica entre otras la siguientes propiedades:
– La razón doble compleja de sus cuatro vértices es armónica, $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = -1$
– Si M es el punto medio de una de la diagonal P_1P_3, ésta es la bisectriz del ángulo $\widehat{P_2MP_4}$.
– $MP_1 = MP_3$ es media proporcional entre MP_2 y MP_4.
– El producto de dos lados opuestos es igual al de los otros dos lados y, por consiguiente, al semiproducto de las diagonales.

— *Proyectar dos ángulos en un ángulo dado*

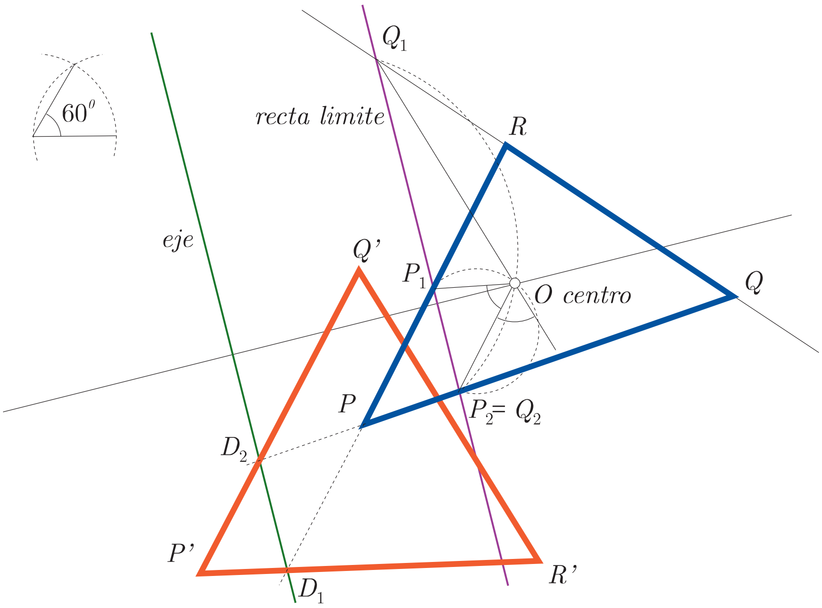


Supongamos que el ángulo en el que se han de transformar los ángulos dados sea de 90°.

Sean P y Q los puntos de corte de los pares de rectas dadas. Empecemos fijando la recta límite, como una que corte a uno de los pares de rectas en P_1 y P_2 y al otro par en Q_1 y Q_2, de tal forma que los puntos P_i y Q_i se alternen. Trazamos las circunferencias de diámetros P_1P_2 y Q_1Q_2. Desde los puntos de intersección de estas circunferencias se ven los segmentos P_1P_2 y Q_1Q_2 bajo un ángulo recto.

Se toma como centro de homología O uno de estos puntos de corte, que está garantizado por la forma de elegir la recta límite. Como eje, elegimos cualquier recta paralela a la recta límite, tomada. Si D_1 y D_2 son los cortes de las rectas PP_1 y PP_2 con el eje, las rectas PP_1 y PP_2 se transforman en rectas que pasan, respectivamente, por D_1 y D_2 y son paralelas, respectivamente, a las rectas OP_1 y OP_2. Como éstas son perpendiculares, las rectas transformadas, también lo son. El mismo razonamiento se sigue para establecer que las trasformadas de QQ_1 y QQ_2, también son perpendiculares.

Nota: Si se quiere transformar los pares de rectas dadas en pares de rectas que forman otro ángulo, distinto de 90°, basta tomar los correspondientes arcos capaces sobre los segmentos P_1P_2 y Q_1Q_2, en vez se semicircunferencias como en este caso. Como, por ejemplo, encontrar una homología que transforma un triángulo arbitrario en triángulo equilátero:



El ángulo en el que se han de transformar dos ángulos del triángulo dado es de 60°.

Sean P y Q dos vértices del triángulo dado. Empecemos fijando la recta límite, como una que corte al par de lados que pasan por P en P_1 y P_2 y al otro par que pasan por Q en Q_1 y Q_2 ($P_2 = Q_2$) de tal forma que P_1 esté entre Q_1 y Q_2. Trazamos los arcos capaces desde cuyos puntos se ven los segmentos P_1P_2 y Q_1Q_2 bajo un ángulo de 60°. Desde los puntos de intersección de estos arcos se ven los segmentos P_1P_2 y Q_1Q_2 bajo un ángulo de 60°.

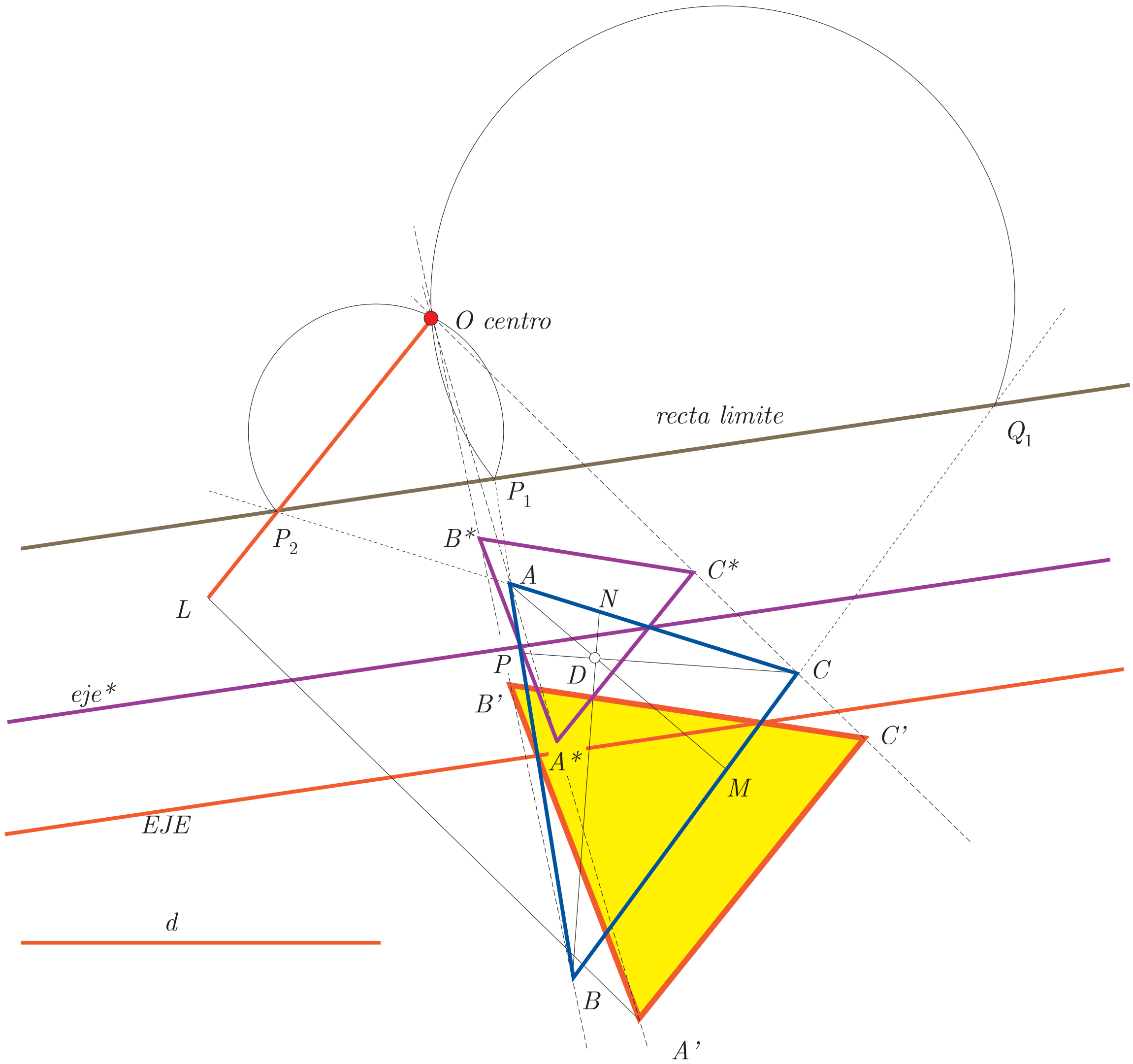
Se toma como centro de homología O uno de estos puntos de corte, que está garantizado por la forma de elegir la recta límite. Como eje, elegimos cualquier recta paralela a la recta límite, tomada. Si D_1 y D_2 son los cortes de las rectas PP_1 y PP_2 con el eje, las rectas PP_1 y PP_2 se transforman en rectas que pasan, respectivamente, por D_1 y D_2 y son paralelas, respectivamente, a las rectas OP_1 y OP_2. Como éstas forman un ángulo de 60°, las rectas transformadas, también forman el mismo ángulo. El mismo razonamiento se sigue para establecer que las trasformadas de QQ_1 y QQ_2, también forman un ángulo de 60°.

Otro ejemplo de construcción de triángulo equilátero:

Dado el triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto D en su plano, determinar los elementos de la homología (centro, eje y recta limite) que transforme el triángulo $\widehat{ABC}$ en otro equilátero de lado dado y el punto D en su ortocentro.

Sabiendo como se transforma, mediante una homología, un triángulo cualquiera en otro equilátero, sólo nos queda elegir adecuadamente la recta límite para que el punto D vaya en el ortocentro (baricentro) del triángulo equilátero.

Si M es el píe de la ceviana AD, en el triángulo $\widehat{ABC}$, su transformado M' debe ser el punto medio del lado $B'C'$ en su triángulo equilátero homólogo $\widehat{A'B'C'}$. Por tanto, se trata de tomar como punto Q_1, de intersección de BC con la recta límite, el conjugado armónico de M respecto a B y C.



Análogamente, si N es el pie de la ceviana BD, para que su transformado N' sea el punto medio de $A'C'$, se ha de tomar el punto P_2, de intersección de AC con la recta límite, como el conjugado armónico de N respecto a A y C.

Se verifica entonces que, si P es el pie de la ceviana CD y P_1 el punto de intersección de la recta Q_1P_2 (límite) con el lado BC, P_1 está armónicamente separado de P respecto a A y B. La recta límite es la polar trilineal de D respecto a $\widehat{ABC}$ y se trata de una homología es involutiva o armónica σ.

El centro de homología O es el punto de intersección de los arcos capaces de 60° sobre los segmentos Q_1P_1 y P_1P_2. Por lo que el eje de esta homología armónica, es la recta paralela a la recta límite por el punto simétrico de O respecto a dicha recta. Así pues, la homología queda totalmente determinada.

No obstante, el triángulo equilátero $\widehat{A^*B^*C^*}$, homólogo del $\widehat{ABC}$, no tiene por que tener lados iguales a la longitud dada d. Para obtener un tal triángulo $\widehat{A'B'C'}$, basta con hacer una homotecia η de centro en O y razón $k = d/\overline{A^*B^*}$.

Ocurre que la composición de la homología y homotecia descritas $\eta \circ \sigma$ es una homología con centro en O y recta límite la misma que σ, por lo que, para determinarla, sólo nos bastaría con determinar su eje.

Recordemos que las ecuaciones de una homología, respecto a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal, con origen en su centro y con el eje y la recta límite perpendiculares al eje de abscisas, son

$$x' = \frac{cx}{a-x}, \quad y' = \frac{cy}{a-x},$$

donde a es la distancia del centro a la recta límite y c es la distancia de ésta al eje. En nuestro caso, las ecuaciones de σ son:

$$x' = \frac{ax}{a-x}, \quad y' = \frac{ay}{a-x}.$$

Si la componemos con la homotecia de centro en O y razón k ($x' = kx, y' = ky$), resultan las ecuaciones:

$$x' = \frac{akx}{a-x}, \quad y' = \frac{aky}{a-x},$$

que son las de una homología de centro O, con la recta límite a una distancia a y cuyo eje dista de la recta límite $c = ak$. Esta cantidad c puede ser construible, teniendo en cuenta las proporciones

$$\frac{d}{\overline{A^*B^*}} = \frac{c}{a}.$$

Podemos determinar directamente la homología que transforma el triángulo $\widehat{ABC}$ en el triángulo equilátero $\widehat{A'B'C'}$ de lado d, mediante la siguiente construcción (`http://es.geocities.com/castillaz/homologia1.html`):

Se toma un segmento OL de longitud d sobre la recta OP_2 (OL es paralela a $A'C'$) y se traza la paralela a OC por L; donde esta paralela corte a OA, estará el vértice A'.

La paralela a OP_2 por A' corta a OC en el vértice C'. Para determinar el vértice B' (que ha de estar en OB), trazamos el eje de la homología, que es la paralela a la recta límite por el punto de intersección de AC con $A'C'$; el lado $A'B'$ pasa por el punto de intersección del eje con AB.

— ***Teorema de Desargues***

Si dos triángulos son tales que los puntos de intersección de lados correspondientes están alineados, las rectas que unen los vértices correspondientes son concurrentes.

Considerando un homología con recta límite ℓ, la recta donde se intersecan los lados, los triángulos se proyectan en triángulos homotéticos. Cada par de vértices correspondientes están alineados con el centro de homotecia.

— ***Triángulo homólogos y semejantes a la vez***

Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos.

SOLUCIÓN:

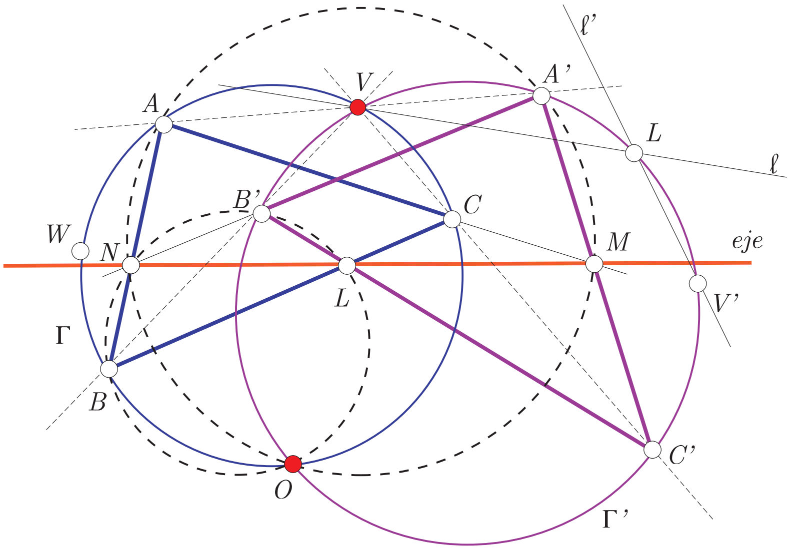
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **584**

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

> *Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos.*
>
> *Inglada García-Serrano, V. (1948): Métodos para la resolución de los problemas geométricos. Dossat. Madrid. p.155*

—— - ——



Daremos dos demostraciones distintas: Una determinando en centro de la semejanza y la transformación que ésta induce entre haces de rectas; y otra, utilizando coordenadas complejas.

• PRIMERA SOLUCIÓN

Utilizamos los siguientes resultados:

1. En una semejanza directa que transforma los puntos A y B en A' y B', respectivamente, el centro de semejanza es el segundo punto de intersección de las circunferencias determinadas por los puntos A, A' y P y por los puntos B, B' y P; siendo P el punto de intersección de las rectas AA' y BB'.

   http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejcg1853.pdf

2. En una semejanza en el plano, una recta de un haz y su transformada se cortan en un punto que está en la circunferencia que pasa por los puntos base de ambos haces.

   Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los haces de recta pasan por $(0,0)$ y $(1,0)$, entonces la ecuación de una semejanza que tenga estos punto como homólogos, tiene por ecuaciones:

$$x' = ax + by + 1, \qquad y' = -bx + ay; \qquad\qquad x = \frac{ax' - by' - a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{bx' + ay' - b}{a^2 + b^2}.$$

   Una recta $y = mx$, por $(0,0)$, se transforma en le recta, por $(1,0)$, $(b - am)x + (a + bm)y + am - b = 0$. Eliminando m entre las ecuaciones de estas dos rectas, se obtiene la ecuación de la circunferencia que pasa por $(0,0)$ y $(1,0)$ y de centro en $(1/2, -a/2b)$:

$$b(x^2 + y^2) - bx + ay = 0.$$

Sean $\widehat{ABC}$ y$\widehat{A'B'C'}$ dos triángulos directamente semejantes y homólogos (perspectivos), tal que se correspondan los mismos vértices en la semejanza y en la homología.

Sea N el punto de intersección de los lados AB y $A'B'$; el centro de semejanza que transforma A en A' y B en B' es el punto O (distinto de N) donde se cortan las circunferencia determinadas por el par de ternas $\{A, A', N\}$ y $\{B, B', N\}$.

Al ser los triángulos $\widehat{ABC}$ y$\widehat{A'B'C'}$ perspectivos, el centro de perspectividad (centro de homología) es el punto V de intersección de las rectas AA' y BB'. Por tanto, la recta que contiene a C y C' también ha de pasar por V.

Sea ℓ una recta arbitraria que pasa por V; su imagen, en la semejanza, es una recta ℓ' que pasa por un punto fijo V', cuando ℓ varía. Denotemos por L el punto de intersección de las rectas ℓ y ℓ'. Si D es un punto de ℓ y D', en ℓ', su imagen en la semejanza, los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{A'B'D'}$ son perspectivos si D' está en ℓ, es decir, si $D' = L$.

Luego, el vértice C', de nuestro triángulo de partida, debe estar en el lugar geométrico descrito por el punto L, cuando la recta ℓ gira alrededor del centro de perspectividad V. Tal lugar, intersección de rectas de dos haces que se corresponden en la semejanza, es una circunferencia (2) Γ' que pasa por los puntos base V y V'.

Como en la semejanza, la recta VO y su transformada $V'O$ (O es fijo) se cortan en O, éste pertenece a Γ'. Además, la recta VA se transforma en $V'A'$, y como A, A' y V están alineados, también $A' \in \Gamma'$; por la misma razón $B' \in \Gamma'$. Tenemos entonces que la circunferencia circunscrita Γ' al triángulo $\widehat{A'B'C'}$ contiene a los centros de semejanza y homología.

La circunferencia Γ' es la imagen, en la semejanza, de la circunferencia Γ circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$, que contiene a O (fijo en la semejanza). Esta circunferencia también contiene al centro de homología V, pues si $W \in \Gamma$ es el punto que se transforma en V mediante la semejanza, las rectas que pasan por W se transforman en rectas que pasan por V, y ambas se cortan en la circunferencia que contiene a los puntos W, V, A, B y S (por (2)).

• SEGUNDA SOLUCIÓN

Vamos a utilizar coordenadas complejas[(1)] en el plano para resolver este problema.

Un punto P de coordenadas cartesianas (x, y), lo representamos por el número complejo $z = x + iy$, se dice que P es el afijo de z. Recíprocamente, el número complejo $z = x + iy$ representa el punto de coordenadas cartesianas

$$(x, y) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right),$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es el complejo conjugado de z.

La razón simple compleja de tres puntos A, B y C afijos de z_1, z_2 y z_3, es el número complejo

$$\rho = (A\,B\,C) = (z_1\,z_2\,z_3) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

Su módulo y argumento vienen dados por ($\rho = |\rho|(\cos\arg(\rho) + i \operatorname{sen}\arg(\rho))$:

$$|\rho| = \frac{AB}{AC}, \qquad \arg(\rho) = \widehat{CAB}.$$

Se deduce, de la definición, que la razón simple compleja es real si los tres puntos están alineados; es imaginaria pura si el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo, con el ángulo recto en A; y tiene módulo $|\rho| = 1$, si dicho triángulo es isósceles de base BC. Además, dos triángulo $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes si sólo si sus razones simples complejas $\rho = (A\,B\,C)$ y $\rho' = (A'\,B'\,C')$ son iguales.

La razón doble compleja de una cuaterna de puntos se define por

$$\rho = (A\,B\,C\,D) = (z_1\,z_2\,z_3\,z_4) = \frac{(A\,C\,D)}{(B\,C\,D)} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

y, por tanto, su módulo y argumento vienen dados por

$$|\rho| = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}, \qquad \arg(\rho) = \widehat{DAC} - \widehat{DBC}.$$

En consecuencia, la razón doble compleja de cuatro puntos es real si éstos están en una circunferencia o están alineados.

Las ecuaciones de una semejanza (directa)

$$\begin{aligned} x' &= a_0^1 + a_1^1 x + a_2^1 y \\ y' &= a_0^2 - a_2^1 x + a_1^1 y \end{aligned}$$

se expresan en coordenadas complejas como

$$z' = \alpha z + \beta,$$

donde $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $\alpha = a_1^1 - ia_2^1$ y $\beta = a_0^1 + ia_0^2$.

(1) Siguiendo la solución dada por Vicente Inglada en "Métodos para la resolución de los Problemas Geométricos".

Con esta introducción, consideremos dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ semejantes, con centro de semejanza [(2)] en O y además homólogos mediante una homología de centro en V (los vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología). Tomemos O como origen de coordenadas y asignemos las siguientes coordenadas complejas:

$$O(0),\ A(z_1),\ B(z_2),\ C(z_3),\ A'(\alpha z_1),\ B'(\alpha z_2),\ C'(\alpha z_3),\ V(z_0).$$

Como los vértices homólogos están alineados con el centro de homología V, se tiene que las razones simples complejas siguientes son reales:

$$(z_1\, z_0\, \alpha z_1) = \frac{z_0 - z_1}{z_1(\alpha-1)}, \qquad (z_2\, z_0\, \alpha z_2) = \frac{z_0 - z_2}{z_2(\alpha-1)}, \qquad (z_3\, z_0\, \alpha z_3) = \frac{z_0 - z_3}{z_3(\alpha-1)},$$

y, por tanto, son reales las siguientes razones dobles complejas:

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_1}{z_2} = (z_0\, 0\, z_1\, z_2), \qquad \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_2}{z_3} = (z_0\, 0\, z_2\, z_3).$$

En consecuencia, los puntos $O(0)$ y $V(z_0)$ están en la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$.

Para establecer que ambos centros también están en la circunferencia circunscrita a $\widehat{A'B'C'}$, basta con considerar la semejanza recíproca $z' = \dfrac{1}{\alpha} z$, que lleva $\widehat{A'B'C'}$ en $\widehat{ABC}$, y hacer el mismo razonamiento.

— *Proyectar una cuadrilátero en un cuadrado*

Dado el cuadrilátero $PQRS$, sean T y U los otros dos vértices y E, F y G los puntos diagonales. Para que $PQRS$ se proyecte en cuadrado $P'Q'R'S'$, una de las diagonales de aquél (la FG, que no pasa por los vértices dados), se debe transformar en la recta del infinito; es decir, FG es la recta límite de la homología. Además, las dos diagonales EF y EG, se han de transformar en rectas perpendiculares, luego, debe ocurrir que, como las imágenes de dichas diagonales son rectas paralelas, respectivamente, a OF y a OG (O centro de homología), éstas han de ser perpendiculares. Así, el centro de homología debe ser elegido en la circunferencia de diámetro FG.

Por otro parte, dos lados adyacentes (sean PQ y PS) se han de transformar en rectas perpendiculares, por lo que, por la misma razón que antes, OT y OU han ser perpendiculares. Por lo que, O debe ser tomado en la intersección de la circunferencia de diámetro TU con la anteriormente descrita (circunferencia de diámetro FG).

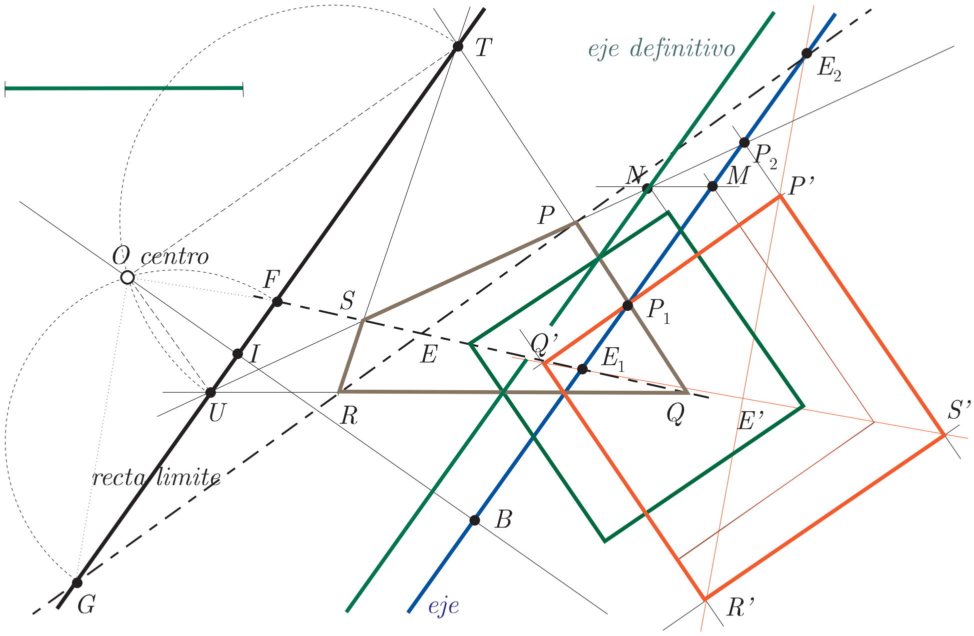
El eje de homología se toma como cualquier recta paralela a la recta límite FG.

Si E_1 y E_2 son las intersecciones del eje elegido con las diagonales EF y EG, las transformadas de éstas son la recta que pasa por E_1 y es paralela a OF, y la recta que pasa por E_2 y es paralela a OG. Del mismo modo, si P_1 y P_2 son los puntos de intersección del eje con los lados PQ y PS, sus transformados son la recta que pasa por P_1 y es paralela a OT, y la que pasa por P_2 y es paralela a OU. Estas dos diagonales y estos dos lados, determinan totalmente el cuadrado $P'Q'R'S'$, transformado del paralelogramo $PQRS$.

---

(2) Supongamos que la semejanza es directa y tomemos dos segmentos homólogos no paralelos; vamos a encontrar centro de semejanza O. Prolonguemos $A'B'$ hasta que corte a AB en N. El segundo punto de intersección de la circunferencia que pasa por N, A y A' y de la que pasa por N, B y B' es el punto O buscado.

En efecto, se tiene que $\widehat{OAN} = \widehat{OB'N}$ y $\widehat{OAN} = \widehat{OA'B'}$ y, por consiguiente, son semejantes los triángulos $\widehat{OAB}$ y $\widehat{OA'B'}$, lo que prueba que O es el punto doble de la semejanza.



Nota: Elegido un eje de homología arbitrario, como se ha hecho, y construida la figura homóloga de $PQRS$, se obtendrá un cuadrado semejante al dado, sin más que trasladar el eje convenientemente para que el cuadrado obtenido coincida con otro de lado dado.

— *Proyección de una cónica*

Una curva de segundo grado se proyecta en una curva de segundo grado.

Pues al hacer las sustituciones de las ecuaciones de una proyección en la ecuación de segundo grado, da nuevamente una ecuación de segundo grado.

La homóloga de una tangente a una cónica es la tangente a la proyección.

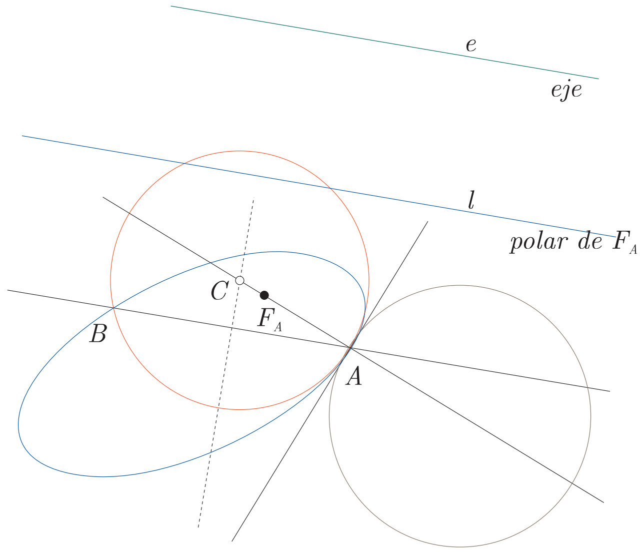
La relación de polo y polar se conservan por una homología.

— *Circunferencia osculatriz en un punto de una cónica*

Conférence de Michel Guillerault:

http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/Guillerault/Fregier.html

Teorema (de Frégier) utilizado : Sea A un punto de una cónica. La transformada de esta cónica en una homología armónica de centro A es una circunferencia si y sólo si la recta "límite" (homotética del eje mediante $h_{A,1/2}$) es la polar del punto de Frégier asociado a A, con respecto a la cónica.



A partir de un punto A de una cónica, se construye su punto de de Frégier F_A (punto común a todas las cuerdas que se ven desde A bajo un ángulo recto), luego la polar de F_A con respecto a la cónica. El eje e de la homología es el homotético de esta polar mediante la homotecia de centro A y de razón 2. La homóloga de la cónica por esta homología es entonces una circunferencia, tangente a la cónica en A. La recta paralela a e que pasa por A es globalmente invariante, se deduce que la circunferencia simétrica de la circunferencia imagen en la simetría de centro A corta a la cónica de partida en un único punto B: la intersección de la cónica con la recta. Esto a significa que el contacto en A entre la cónica y esta circunferencia es de orden 3: ésta es la circunferencia osculatriz a la cónica en A, su centro C es el centro de curvatura de la cónica en A. El punto C se construye como la intersección de AF_A y la mediatriz de AB.

Ejemplo:
Curvatura y centro de curvatura de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - x + 3y - 4 = 0$ en el punto $(0, 1)$.

SOLUCIÓN:
Damos tres formas de resolver el problema: la primera, utilizando una haz de cónicas osculatrices; la segunda, mediante la fórmula que da la curvatura de una curva plana; y la tercera, mediante una construcción geométrica, usando una homologia que transforma la cónica en una circunferencia.

• Se trata de calcular la circunferencia con máximo contacto con la cónica en $(0, 1)$.
La tangente en el punto dado $(0, 1)$ es $3x - 5y + 5 = 0$ y una recta arbitraria por $(0, 1)$, tiene por ecuación $mx - y + 1 = 0$.
El haz de cónicas teniendo tres puntos de contacto con la cónica dada en $(0, 1)$ está dado por (cónicas osculatrices)

$$u(x^2 - 2xy + y^2 - x + 3y - 4) + v(3x - 5y + 5)(mx - y + 1) = 0,$$

o bien

$$(u + 3w)x^2 - (2u + 3v + 5w)xy + (u + 5v)y^2 + (-u + 3v + 5w)x + (3u - 10v)y - 4u + 5v = 0,$$

donde $w = mv$. Ésta representa una circunferencia si

$$u + 3w = u + 5v, \qquad 2u + 3v + 5w = 0.$$

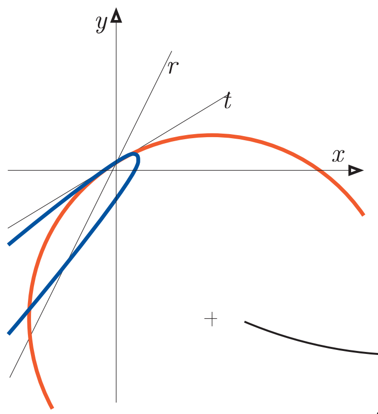
Entonces

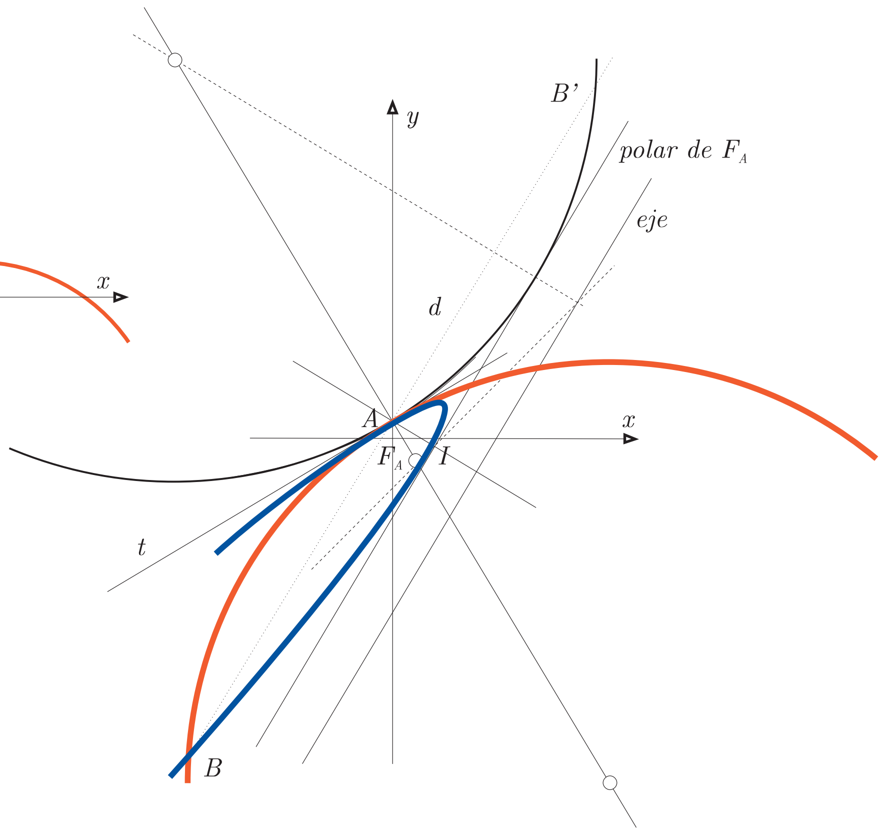
$$v = \frac{-3u}{17}, \qquad w = \frac{-5u}{17}, \qquad m = \frac{5}{3}.$$

La ecuación de la circunferencia de curvatura es, poniendo $u = 17$,

$$2x^2 + 2y^2 - 51x + 81y - 83 = 0.$$

El centro de curvatura es $(a, b) = (51/4, -81/4) \simeq (12.75, -20.25)$ y el radio de curvatura $r = \sqrt{c - a^2 + b^2} = \sqrt{83/2 + (51/4)^2 + (-81/4)^2} = 17\sqrt{17}/2\sqrt{2} \simeq 24.78$.





La gráfica de la izquierda está extraida del MATHEMATICA:

```
f[u_,v_,m_][x_,y_]:=u(x^2-2x*y+y^2-x+3y-4)+v(3x-5y+5)(m*x-y+1)

 ImplicitPlot[{f[1,0,m][x,y]==0,
               f[0,1,2][x,y]==0,
               f[17,-3,5/3][x,y]==0},{x,-15,30}]
```

• Otra forma de resolver este ejercicio es utilizando la fórmula de la curvatura para curvas planas

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

derivando implícitamente, respecto de x, en la ecuación de la cónica.

$2x - 2y - 2xy' + 2yy' - 1 + 3y' = 0$, en $(0,1)$: $-3 + 5y' = 0$, $y' = 3/5$.

$2 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' + 3y'' = 0$, para $x = 0, y = 1$ e $y' = 3/5$: $y'' = -8/125$.

$$\kappa = \left| \frac{-\dfrac{8}{125}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{9}{25}}\right)^3} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{17\sqrt{17}}.$$

El centro (a,b) de la circunferencia osculatriz se obtiene teniendo en cuenta la relación $r^2 = a^2+(b-1)^2$ y que debe estar en la perpendicular a la tangente de pendiente $y' = 3/5$ en $(0,1)$: $5a + 3b = 3$. Obteniéndose los valores $(-51/4, 89/4)$ ó $(51/4, -81/4)$. El segundo es el que vale, pues está en el semiplano definido por la tangente determinado por el sentido de la derivada segunda $(125, -8)$.

• Construcción gráfica de la circunferencia osculatriz mediante una homología (gráfica de la derecha):

La cónica (parábola) dada queda determinada por los cinco puntos: $(0,1)$ y $(0,-4)$ de intersección con el eje OY, $(2,-1)$ y $(-3,-1)$ de intersección con la recta $y = -1$, y por el punto $(3,1)$, el otro punto de intersección con la recta $y = 1$.

Utilizaremos una propiedad de un punto de Frégier para transformar la cónica en una circunferencia mediante una homología.

El punto F_A de Frégier relativo al punto A de la cónica, es aquel donde se cortan todas las cuerdas que se ven bajo un ángulo recto desde A. Dos de estas cuerdas lo determinan:

La perpendicular por $(0,1)$ a la cuerda determinada por los puntos $(0,1)$ y $(0,-4)$ es la cuerda que une los puntos $(0,1)$ y $(3,1)$ de la cónica, así una de las cuerdas que se ven bajo un ángulo recto desde A es la une los puntos $(0,-4)$ y $(3,1)$, que tiene por ecuación

$$-5x+3y+12=0.$$

La perpendicular a la tangente en $(0,1)$ determina otra cuerda que se ve bajo un ángulo recto desde A; su ecuación es

$$5x+3y-3=0.$$

El punto de Frégier relativo a A es el de intersección de estas rectas, o sea, $F_A(3/2,-3/2)$.

Utilizaremos el siguiente resultado:

"Sea A un punto de una cónica. La transformada de esta cónica en una homología de centro A es una circunferencia si y sólo si la recta límite (homotética del eje de homología por una homotecia $h_{A,1/2}$) es la polar del punto de Frégier asociado a A, con respecto a la cónica".

Polar del punto de Frégier $(3/2,-3/2)$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad 5x-3y-14=0.$$

El eje de la homología de centro $A(0,1)$ es la recta homotética de esta polar en la homotecia $h_{A,2}$, de centro A y razón 2.

El homólogo del punto de Frégier F_A es el centro de la circunferencia homóloga de la cónica, pues al conservarse la relación polo y polar mediante una homología, y como la polar de F_A es la recta límite de la homología, que se transforma en la recta del infinito, cuyo polo es el centro de la circunferencia. Éste se determina trazando la recta que une F_A con el punto I de intersección de la recta límite con la perpendicular a ella por A. La recta F_AI corta al eje en un punto; la perpendicular por este punto al eje corta a AF_A en el centro buscado. La tangente a la cónica, por pasar por el centro de la homología A, queda invariante, por tanto, tal circunferencia es tangente a la cónica en A.

Justificaremos ahora que la circunferencia osculatriz en A a la cónica es la simétrica de la circunferencia homóloga respecto a la simétria de centro A:

La recta d paralela al eje de homología por A corta a la cónica en otro punto B. El punto B' homólogo de B es el simétrico de B respecto a A, luego la circunferencia simétrica, respecto a A, de la obtenida, pasa por B. Esta circunferencia es la circunferencia osculatriz en A a la cónica, pues ella pertenece al haz de cónica osculatrices determinado por la cónica dada y por la cónica degenerada en el producto de la tangente t en y la recta d. También, podemos justicar que se trata de la circunferencia osculatriz, observando que los únicos puntos comunes con la cónica son A y B', luego circunferencia y cónica tienen tres puntos comunes confundidos en A.

— ***Triángulo diagonal autoconjugado***

El triángulo diagonal de un cuadrilátero es autoconjugado respecto a toda cónica inscrita en el cuadrilátero.

Proyectando el cuadrilátero en un cuadrado, la intersección de las diagonales de éste es el centro de las cónicas inscritas, el cual es el polo de la recta del infinito con respecto a tales cónicas. Entonces toda diagonal del cuadrilátero es la polar de la intersección de las otras dos.

Demostración, sin usar proyección homológica. Tomando un sistema de coordenadas proyectivas $\{U_0, U_1, U_2; U\}$ formado por los vértices del cuadrilátero, los puntos diagonales tienen por coordenadas:

$$(0,1,1), \qquad (1,0,1), \qquad (1,1,0).$$

La ecuación de todas las cónicas inscritas es:

$$u_0(u_0+u_1+u_2)+\lambda u_1u_2=0.$$

El polo de la diagonal $x^0 - x^1 - x^2 = 0$, que pasa por los dos últimos puntos diagonales anteriores, es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix},$$

que es el otro punto diagonal $(0,1,1)$.

— ***Cónicas inscritas en un cuadrilátero***

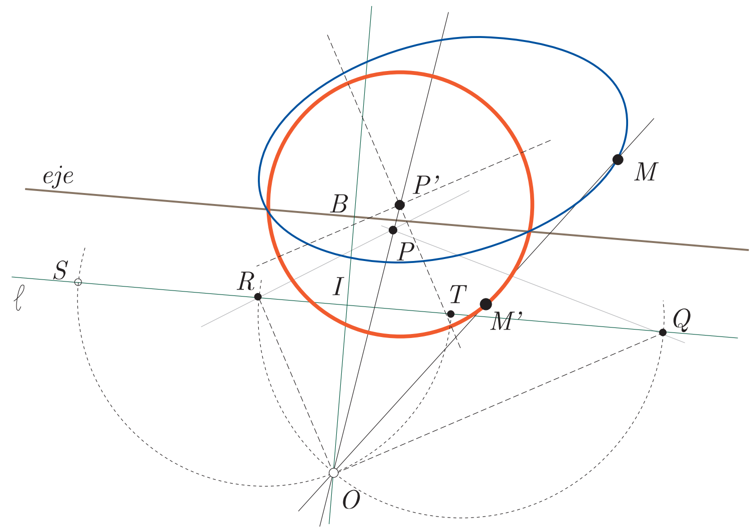
Si dos cónicas están inscritas en un cuadrilátero, sus ocho puntos de contacto quedan en una cónica.

Mediante una homología se puede proyectar el cuadrilátero en un cuadrado. Y este resultado en cierto para un cuadrado.

— ***Proyectar una cónica en una circunferencia***

Toda cónica se puede proyectar en una circunferencia, mediante una homología.

SOLUCIÓN:



Sean una cónica $\mathcal{C}$, P un punto de su plano (interior a la cónica) y ℓ la polar de P respecto a $\mathcal{C}$. Tomamos como recta límite de la homología, a determinar, la recta ℓ (sus puntos se proyectan en la recta del infinito) y sobre ℓ dos pares de puntos conjugados Q, R y S, T (R en la polar de Q, T en la polar de S). Tracemos las circunferencias de diámetros QR y ST y sea O un punto de corte, que tomamos con centro de homología. El eje de homología puede ser cualquier recta paralela a ℓ. En la homología así construida, las rectas PQ y PR se proyectan en dos rectas (perpendiculares) que pasan por los puntos donde ellas corten al eje y que son paralelas a las rectas OQ y OR, respectivamente, que son perpendiculares ($\widehat{QOR}$ abarca media circunferencia).

En una homología, la relación polo polar se conserva, luego la polar del punto P', homólogo de P, es la recta del infinito, homólaga de la recta límite ℓ. Luego la homóloga de la cónica $\mathcal{C}$ es una cónica que tiene por centro P' (polo de la recta del infinito). En esta cónica hay dos pares de diámetros conjugados que son perpendiculares: las rectas homólogas de las rectas PQ y PR y las homólogas de PS y PT, por consiguiente, se trata de una circunferencia.

Esto último, es así, pues considerando la ecuación de la involución de diámetros conjugados de una cónica, se tiene que los diámetros perpendiculares en esta involución satisfacen a la ecuación

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0,$$

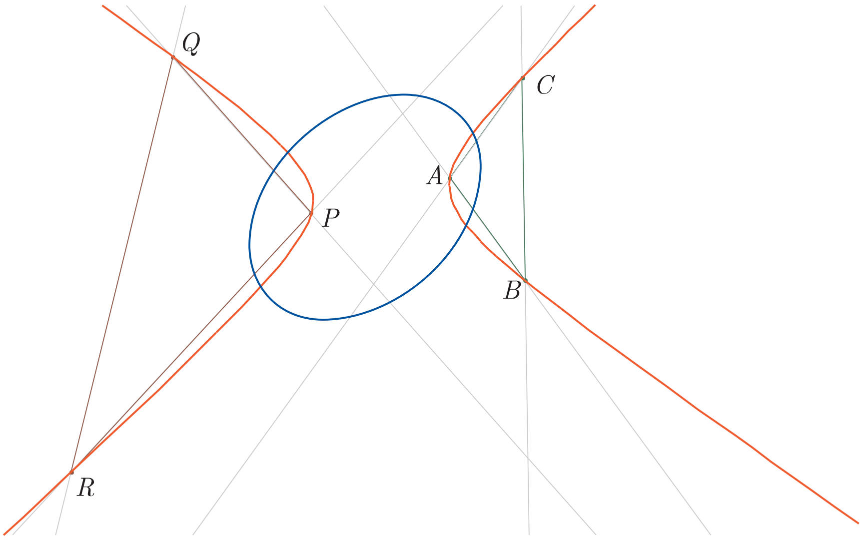
que ha de ser idénticamente nula, si se tatisface para $m, -1/m, n$ y $1/n$ $(m \neq n)$.

Se deduce entonces que debe ser $a_{12} = 0$ y $a_{11} = a_{22}$: se trata de una circunferencia.

— *Cónica que pasa por los vértices de dos triángulo autopolares*

Dados dos triángulos autopolares (cada vértice es el polo del lado opuesto) respecto a una cónica, por los seis vértices pasa una cónica.

SOLUCIÓN:



Sean $\widehat{PQR}$ y $\widehat{ABC}$ dos triángulo autopolares respecto a una cónica $\mathcal{C}$. Consideremos una homología, con recta límite QR, que transforma la cónica en una circunferencia. Los puntos homólogos de los vértices de los triángulos dados constituyen dos triángulo $\widehat{P'Q'R'}$ y $\widehat{A'B'C'}$, autopolares respecto a la circunferencia, siendo además P' el centro de la circunferencia (polo de la recta del infinito $Q'R'$).

Para encontrar la cónica que pasa por los seis puntos P', Q', R', A', B' y C', fijemos un sistema de coordenadas con origen en P', con eje de abscisas $P'Q'$ y como eje de ordenadas $P'R'$. La ecuación de la cónica que pasa por $Q', R', A'(a_1, a_2), B'(b_1, b_2)$ y $C'(c_1, c_2)$ (que será una hipérbola de asíntotas paralelas a los ejes), no tiene términos en x^2 e y^2, por lo que es

$$\begin{vmatrix} xy & x & y & 1 \\ a_1a_2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1b_2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1c_2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nos falta comprobar que el punto $P'(0,0)$ también satisface esta ecuación. Las polares, respecto a la circunferencia (de centro en el origen y radio r) homóloga de $\mathcal{C}$, de los puntos A', B' y C' son, respectivamente:

$$a_1x + a_2y - r^2 = 0, \qquad b_1x + b_2y - r^2 = 0, \qquad c_1x + c_2y - r^2 = 0.$$

Y como cada punto está en las polares de los otros:

$$a_1b_1 + a_2b_2 - r^2 = 0, \quad a_1c_1 + a_2c_2 - r^2 = 0, \quad b_1a_1 + b_2a_2 - r^2 = 0, \quad b_1c_1 + b_2c_2 - r^2 = 0,$$

$$c_1a_1 + c_2a_2 - r^2 = 0, \quad c_1b_1 + c_2b_2 - r^2 = 0,$$

de donde,

$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2.$$

Por lo que el punto $P(0,0)$ satisface la ecuación de la cónica, ya que

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1a_2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1b_2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1c_2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_2 & a_1 & a_2 \\ b_1b_2 & b_1 & b_2 \\ c_1c_2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$a_1a_2b_1c_2 + a_1b_2c_1c_2 + b_1b_2c_1a_2 - c_1c_2b_1a_2 - b_1b_2a_1c_2 - a_1a_2c_1b_2 =$$

$$(b_1c_1 - a_1c_1)a_2b_2 + (a_1b_1 - c_1b_1)a_2c_2 + (a_1c_1 - a_1b_1)b_2c_2 = (a_2c_2 - b_2c_2)a_2b_2 + (b_2c_2 - a_2b_2)a_2c_2 + (a_2b_2 - a_2c_2) = 0.$$

La imagen recíproca de esta hipérbola, mediante la homología considerada, es una cónica (que no tiene por que ser hipérbola).

Nota: Si un vértice del primer triángulo está en un lado del segundo, el vértice opuesto, de este lado del segundo, está en el lado opuesto del vértice considerado en el primer triángulo. Por lo que la cónica que pasa por los seis vértices es un producto de rectas.

— ***Ecuaciones de la homología de centro, eje y recta límite arbitrarios***

Obtengamos las ecuaciones de la homología con centro en $C(x_0, y_0)$, recta límite $\ell \equiv ax + by + c = 0$ y eje $e \equiv ax + by + (c - d) = 0$.

Punto I de intersección de la recta por C perpendicular a e y ℓ, con ℓ:

```
In[1]:= Solve[{(x-x0)/a==(y-y0)/b, a*x+b*y+c==0},{x,y}]

Out[1]=  {{x -> -((a*c - b^2*x0 + a*b*y0)/(a^2 + b^2)),
           y -> -((b*c + a*b*x0 - a^2*y0)/(a^2 + b^2))}}
```

Punto Q de intersección de la recta PI con e ($P(X, Y)$):

```
In[2]:=     Simplify[Solve[{a*x+b*y+(c-d)==0,
        Det[{{x,y,1},{%1[[1,1,2]],%1[[1,2,2]],1},{X,Y,1}}]==0},{x,y}]]

Out[2]=     {{x -> (b^2*(d*(X - x0) + x0*(c + b*Y)) -
                    a^2*X*(c - d + b*y0) -
                    a*(c^2 + c*(-d + b*Y + b*y0) -
                    b*(b*X*x0 + d*y0 - b*Y*y0)))/
                             ((a^2 + b^2)*(c + a*X + b*Y)),
              y -> (-(b^2*(c - d + a*x0)*Y) +
                      a^2*(d*(Y - y0) + (c + a*X)*y0) -
                      b*(c^2 + c*(-d + a*X + a*x0) +
                      a*(-(d*x0) + a*X*x0 - a*Y*y0)))/
                          ((a^2 + b^2)*(c + a*X + b*Y))}}
```

Punto P' de intersección de da recta CP con la perpendicular a e y ℓ, por Q:

```
In[3]:=     Solve[{Det[{{x,y,1},{x0,y0,1},{X,Y,1}}]==0,
               (x-%2[[1,1,2]])/a==(y-%2[[1,2,2]])/b},{x,y}]

Out[3]=     {{x -> -((-(d*X) - c*x0 + d*x0 - a*X*x0 -  b*x0*Y)/
                                         (c + a*X + b*Y)),
              y -> -((-(d*Y) - c*y0 + d*y0 - a*X*y0 -  b*Y*y0)/
                             (c + a*X + b*Y))}}
```

Obteniéndose las ecuaciones de la homología, poniendo $P(x, y)$ y $P'(x', y')$, siguientes:

$$x' = \frac{d(x - x_0) + x_0(ax + by + c)}{ax + by + c}, \qquad y' = \frac{d(y - y_0) + y_0(ax + by + c)}{ax + by + c}. \tag{2}$$

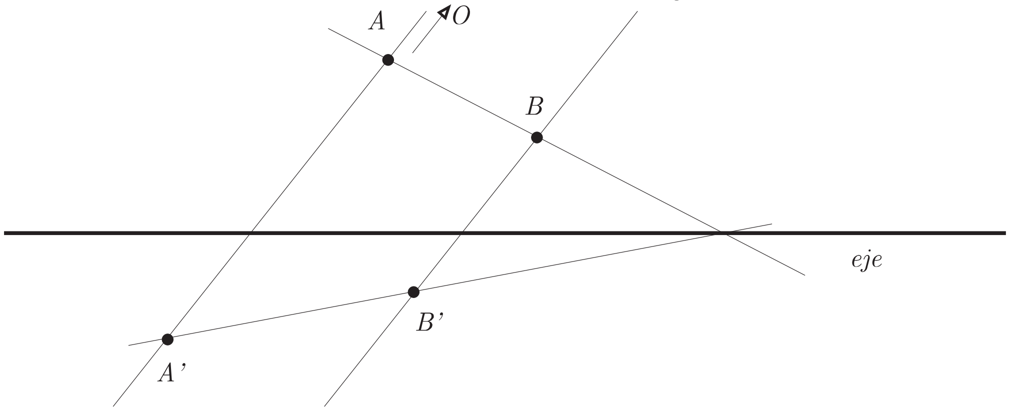
O bien, en esta otra forma:

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{d}{ax + by + c}. \tag{3}$$

Una homología de eje propio y centro impropio se llama homología afín.

Como las rectas que pasan por el centro son dobles, la recta del infinito lo es y, por tanto, ambas rectas límite se confunden con la recta del infinito.

Para que tal homología quede terminada, basta conocer un par de puntos homólogos. Si éstos son A y A', para hallar el homólogo de B, basta determinar el punto de corte de la recta AB con el eje, la recta que une éste con A' corta a la paralela a AA' por B, en el homólogo B' de B, buscado.



La razón de homología, es decir, la razón doble constante $(O_\infty \; A_e \; A \; A')$, donde O_∞ es el centro y A_e el punto de corte de la recta AA', determinada por pares de puntos homólogos, con el eje, se reduce a la razón simple

$$k = \frac{A_e A'}{A_e A},$$

de las distancias del eje a cada par de puntos homólogos, tomadas en la dirección del centro. A esta constante, se le denomina en este caso, razón de afinidad.

Vamos a determinar las ecuaciones de la homología afín con eje OY, dirección del centro el de la recta $y = mx$ y razón de afinidad k:

Si $P(\xi, \eta)$ y $P'(\xi', \eta')$ es un par de puntos homólogos, el punto de intersección de la recta PP', $y - \eta = m(x - \xi)$, con el eje es $E(0, \eta - m\xi)$, luego se verifica

$$\frac{\xi'}{\xi} = k, \qquad \frac{\eta' - \eta + m\xi}{\eta - \eta + m\xi} = k,$$

de donde, resultan las ecuaciones de la homología afín:

$$x' = kx, \qquad y' = m(k-1)x + y. \tag{4}$$

Para obtener las ecuaciones de una homología afín con eje y centros arbitrario, procedemos como antes. Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación del eje, $y = mx$ la dirección del centro y k la razón de afinidad.

El punto E de intersección de la recta que une dos puntos homólogos $P(\xi, \eta)$ y $P'(\xi', \eta')$ con el eje, tiene de coordenadas

$$E\left(\frac{-c + bm\xi - b\eta}{a + bm}, \frac{-cm - am\xi + a\eta}{a + bm}\right).$$

Del hecho de que $\overline{P'E}/\overline{PE} = k$, surgen las ecuaciones homología afín

$$x' = \frac{(ak + bm)x + b(k-1)y + c(k-1)}{a + bm}, \qquad y' = \frac{am(k-1)x + (bmk + a)y + c(k-1)m}{a + bm}. \tag{5}$$

Se ha de verificar que $a + bm \neq 0$, es decir, que la dirección del centro no coincida con la dirección del eje.

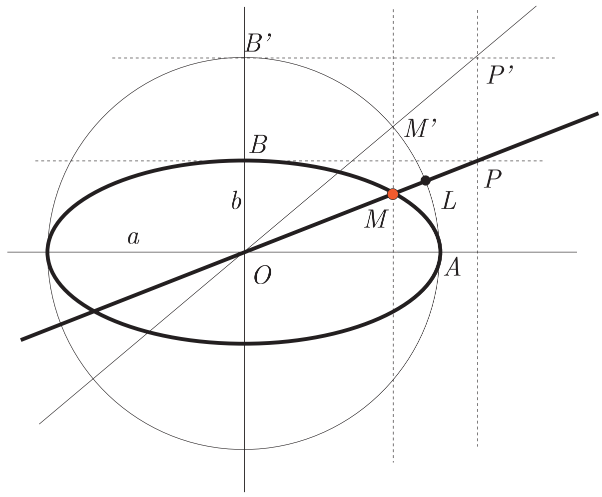
Nota: Si dado el eje y la dirección del centro, se da además dos pares de puntos homólogos, en vez de la razón de homología, para determinar ésta sólo basta sustituir las coordenadas de los puntos homólogos en las ecuaciones anteriores, para determinar el único coeficiente que falta: k.

Las ecuaciones de la afinidad (homología afín), referida a los ejes de una elipse de semiejes a y b, que que transforma su circunferencia principal (de centro en el de la elipse y radio igual al semieje mayor a) es

$$x' = x, \qquad y' = \frac{b}{a}y.$$

Utilicemos este hecho para:

Construir los puntos de intersección de una elipse con una recta que pasa por su centro.
SOLUCIÓN:



Utilizamos el hecho de que la elipse es la imagen de la circunferencia por una afinidad que transforma B' en B.

Tomamos un punto variable L en la circunferencia de centro en el de la elipse O y de radio OA.

Vamos a construir un punto M de la recta OL que pertenece a la elipse. Es suficiente obtener el punto M' de la circunferencia cuya imagen sea M mediante la afinidad descrita.

Para ello, se debe encontrar la antiimagen de la recta OL por la afinidad. Esto se hace considerando los puntos P y P' de la figura (siendo las rectas BP, $B'P'$ y OA paralelas).

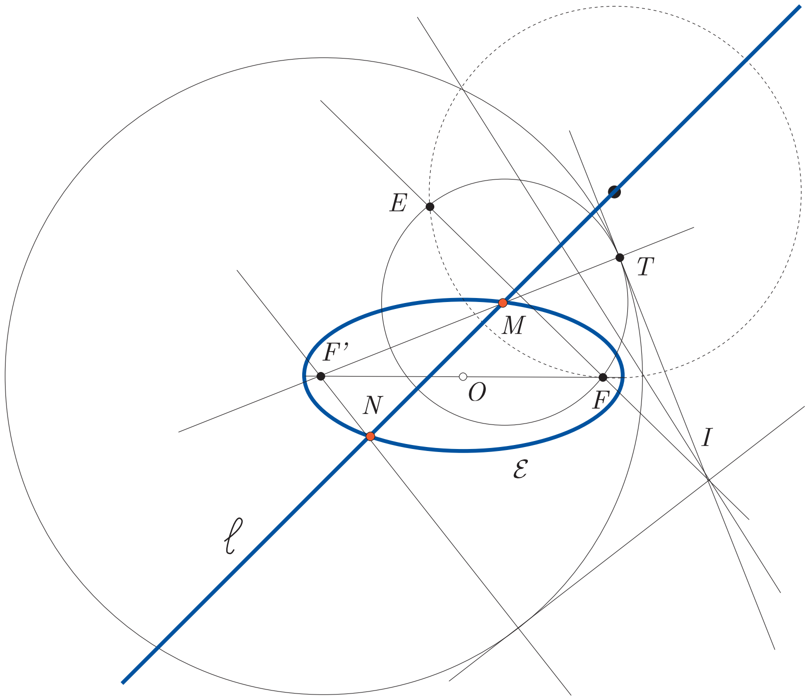
Nota:

La ecuación de la afinidad, referida a los ejes de elipse de semiejes a y b es

$$x' = x, \qquad y' = \frac{b}{a}y.$$

El siguiente problema de construcción también puede ser resulto utilizando una homología afín:

SOLUCIÓN:

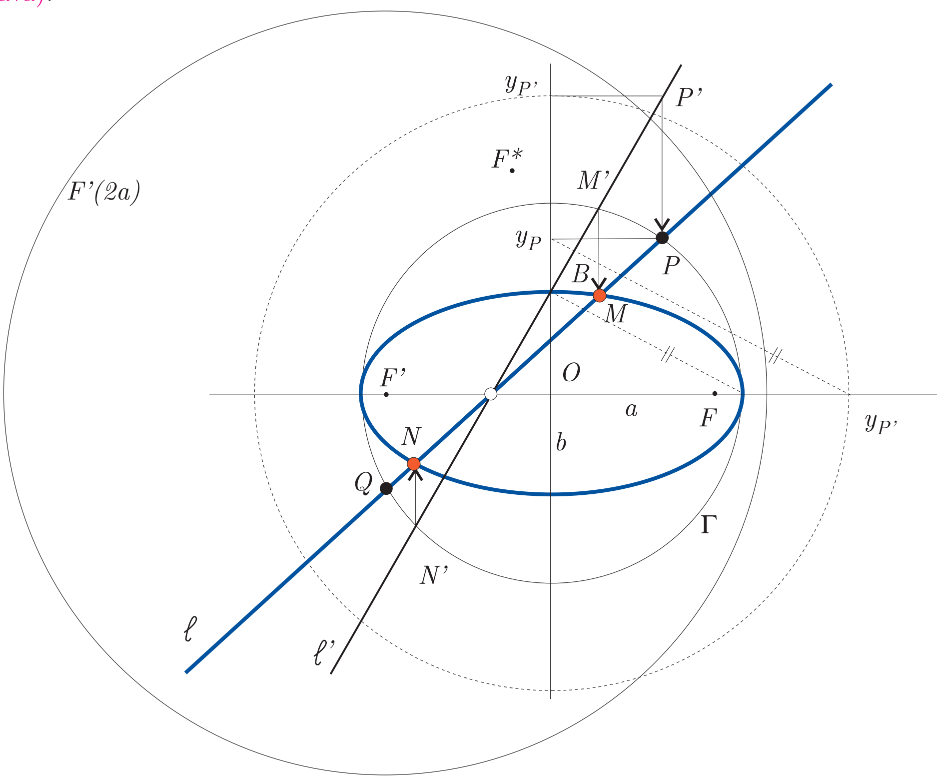


Una elipse, de semieje focal a, es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un foco F y son tangentes a la circunferencia $F'(2a)$ de centro en el otro foco F' y de radio $2a$.

Así, un punto intersección de una recta ℓ con una elipse $\mathcal{E}$, será el centro de una de tales circunferencias, la cual pasa además por el punto E, simétrico de F respecto a ℓ (pues ésta es un diámetro). Construida tal circunferencia (que pasa por dos puntos y es tangente a una circunferencia dada), el problema queda resuelto.

El problema tiene dos soluciones si los puntos F y E son ambos interiores a la circunferencia $F'(2a)$. No tiene solución, si F es interior y E es exterior. Tiene una sola solución, si E pertenece a la circunferencia.

Una solución utilizando la homología afín, que transforma una circunferencia en una elipse (Applet CabriJava):



Dadas la elipse de semiejes a (focal) y b y una recta ℓ, para tratar de hallar la intersección de ambas, trazamos primero la circunferencia principal Γ que tiene su centro en el de la elipse y radio igual a su semieje focal. Determinamos los puntos de corte, P y Q, de Γ y ℓ. Localizamos el punto P', antiimagen de P, mediante la homología afín que lleva Γ en la elipse.

La recta ℓ' que pasa por P' y por el punto de corte de ℓ con el eje focal (doble en la homología) se transforma en ℓ; luego, los puntos de corte de ℓ' y Γ, se transforman en los puntos de corte de ℓ con la elipse.

Para determinar P', basta tener en cuenta que

$$\frac{a}{b} = \frac{y_P}{y_{P'}},$$

siendo y_P e $y_{P'}$ las distancias de P y P' (respectivamente) al eje focal de la elipse.

Es condición necesaria para que ℓ corte a la elipse, que tambien corte a la circunferencia principal Γ y que, si esto ocuure, que la recta ℓ' corte también a Γ. O bien, por lo dicho en la construcción anterior, para que haya una solución, el simétrico F^* del foco F, respecto a la recta ℓ, ha de estar sobre la circunferencia $F'(2a)$ de centro en el otro foco F' y radio $2a$; hay dos soluciones, si F^* está en el interior de $F'(2a)$; y no hay solución si F^* está en el exterior de $F'(2a)$.

Nota: El problema general de determinar puntos de corte de una recta con una cónica determinada por cinco puntos, puede ser atacado determinando una proyectividad sobre la recta a partir de una proyectividad sobre la cónica, y determinando los puntos dobles de la proyectividad sobre la recta.

— *Casos especiales de homologías*

Ya hemos tratado ciertos casos de homologías (armónica–pág.4–, afín–pág.20–). En este apartado vamos a distinguir diferentes tipos particulares de homologías:

1) *Homología involutiva o armónica*: Razón de homología, $k = -1$ y las dos rectas límites se confunden en la paralela media entre el eje y el centro.

2) *Homología especial o elación*: El centro está sobre el eje de homología. Las rectas límites equidistan del centro y el eje.

3) *Homología afín*: Eje propio, rectas limites y centro impropios.

4) *Simetría axial*: $k = -1$, eje propio, y rectas límites y centro impropios. Es una afinidad involutiva y ortogonal.

5) *Homotecia*: Centro propio, eje y rectas límites impropias.

6) *Simetría central*: $k = -1$, centro propio y eje y rectas límites impropias.

7) *Traslación*: $k = 1$ y todos sus elementos impropios: centro, eje y rectas límites.

— *Ejercicios relativos a homologías*

Ej.**1**.- Ecuaciones de homología de centro en $(3, -2)$, eje $5x - y - 5 = 0$ y puntos homólogos $A(1, -4)$ y $A'(-1, -6)$.

Observando las ecuaciones generales (3) de una homología y de acuerdo con los datos dados, se tiene que

$$\frac{x' - 3}{x - 3} = \frac{y' + 2}{y - 2} = \frac{d}{ax + by + c},$$

por lo que al ser el eje $ax + by + (c - d) = 0$ en este caso $5x - y - 5 = 0$, se tiene $a = 5t, b = -t, c - d = -5t$. Como $A(1, -4)$ y $A'(-1, -6)$ son homólogos

$$\frac{-4}{-2} = \frac{d}{5t \cdot 1 - t(-4) + d - 5t} = \frac{d}{4t + d}.$$

Se deduce que $d=-8t$ y $c=-13t$ y las ecuaciones de la homología quedan:

$$\frac{x'-3}{x-3}=\frac{y'+2}{y+2}=\frac{-8}{5x-y-13}.$$

O bien, en coordenadas homogéneas:

$$x'=\frac{d(x-x_0)+x_0(ax+by+c)}{ax+by+c}=\frac{-8(x-3)+3(5x-5-13)}{5x-y-13},$$

$$y'=\frac{d(y-y_0)+y_0(ax+by+c)}{ax+by+c}=\frac{-8(y+2)-2(5x-y-13)}{5x-y-13}.$$

$$\begin{array}{rcl}\lambda x'^0 & = & -13x^0+5x^1-x^2\\ \lambda x'^1 & = & -15x^0+7x^1-3x^2\\ \lambda x'^2 & = & 10x^0-10x^1-6x^2\end{array}$$

Otra forma de llegar a las ecuaciones de la homología pedida:

<u>SOLUCIÓN</u>:

Considerando los pares de puntos homólogos $(1,3,-2)\mapsto(1,3,-2)$, $(1,1,-4)\mapsto(1,-1,-6)$, $(1,1,0)\mapsto(1,1,0)$ y $(1,0,-5)\mapsto(1,0,-5)$ (estos dos ultimos en el eje), podemos determinar los coeficientes de la matriz asiciada a una homografía

$$\begin{array}{l}\lambda x'^0=a_0^0x^0+a_1^0x^1+a_2^0x^2\\ \lambda x'^1=a_0^1x^0+a_1^1x^1+a_2^1x^2\\ \lambda x'^2=a_0^2x^0+a_1^2x^1+a_2^2x^2\end{array}$$

```
Solve[{{{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}.{1,3,-2}==p{1,3,-2},
       {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}.{1,1,-4}==q{1,-1,-6},
       {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}.{1,1,0}==r{1,1,0},
       {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}.{1,0,-5}==t{1,0,-5}},
  {a,b,c,d,e,f,g,h,i,p,q,r}]
```

$$a=\frac{13t}{8},\quad b=-\frac{5t}{8},\quad c=\frac{t}{8},\quad d=\frac{15t}{8},\quad e=-\frac{7t}{8},\quad f=\frac{3t}{8},\quad g=-\frac{5t}{4},\quad h=\frac{5t}{4},\quad i=\frac{3t}{4}.$$

Tomando $t=8$, la matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{rrr}13 & -5 & 1\\ 15 & -7 & 3\\ -10 & 10 & 6\end{array}\right),$$

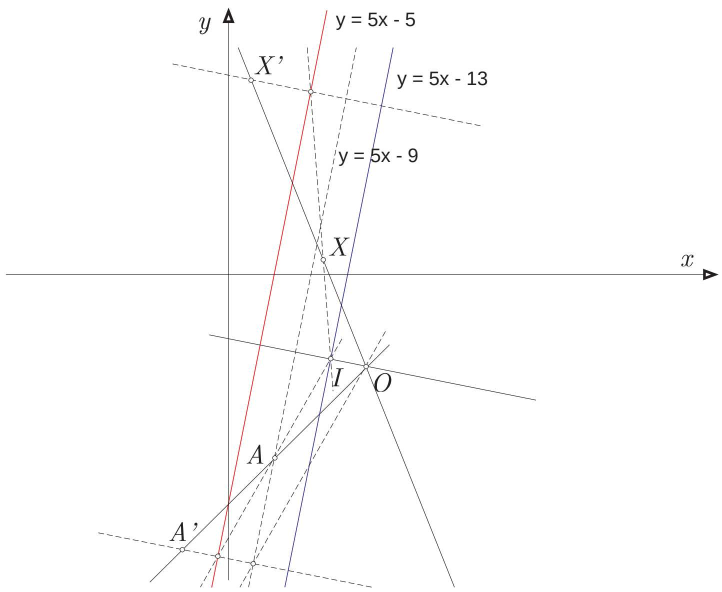
y las ecuaciones de la homología son

$$x'=\frac{15-7x+3y}{13-5x+y},\qquad y'=\frac{-10+10x+6}{13-5x+y}$$

Las rectas límites son:

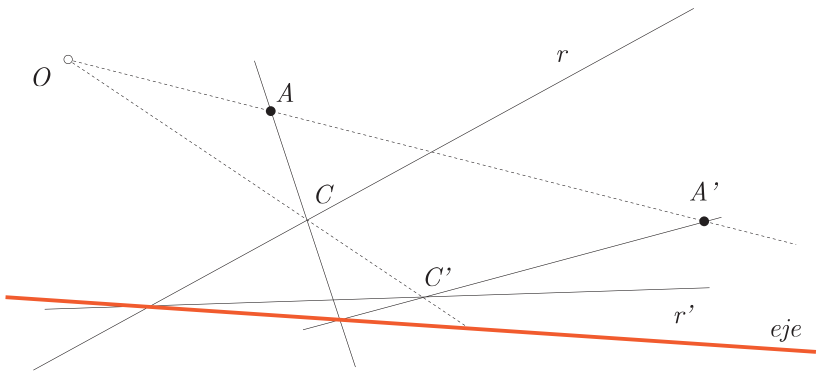
$$5x-y-13=0,\qquad 5x-y-9=0,$$

la segunda se obtiene como la recta que pasa por los puntos $(7/5,-2),(3,6)$ homólogos de los puntos impropios $(0,1,0),(0,0,1)$, respectivamente.



Ej.**2**.- Dados el centro de homología O, el punto A, la recta r y sus elementos homólogos A' y r', se pide determinar el eje de la homología que definen.

SOLUCIÓN:

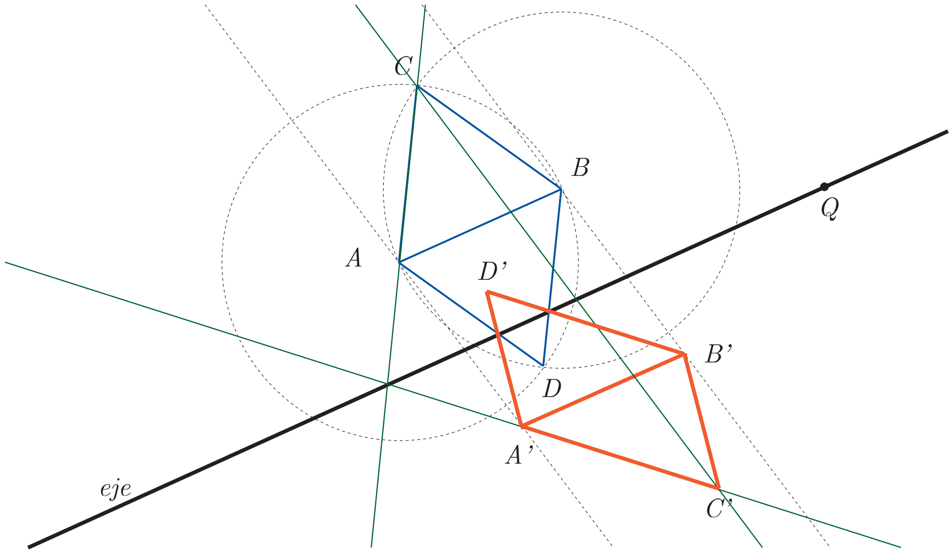


Los puntos homólogos están alineados con el centro O de homología y las rectas homólogas se cortan en el eje de homología. Para determinar éste, ya conocemos un punto: el de intersección de r con r'. Si tomamos un punto arbitrario C en r, su homólogo C' es la intersección de OC con r'. Otro punto del eje es pues $AC \cap A'C'$.

Ej.**3**.- De una homología afín en el plano, se conocen los puntos A, B y sus homólogos A', B' y el punto Q del eje de homología. Sabiendo que AB es paralelo a $A'B'$, se pide:

Construir el eje y los homólogos de los triángulos equiláteros que tengan como uno de sus lados el AB dado.

SOLUCIÓN:



Las rectas homólogas AB y $A'B'$ (que son paralelas), se cortan en el eje. Luego éste es la recta paralela a AB por Q.

Para determinar el homólogo C' de un vértice C de un triángulo equilátero, basta tener en cuenta que las rectas AC y $A'C'$, se han de corta en el eje, y que C' está en la paralela a AA' por C.

Ej.**4**.- Mostrar que
$$x' = \frac{-x}{2y+1}, \qquad y' = \frac{-y}{2y+1},$$
son las ecuaciones de una homología armónica y encontrar su centro y su eje.

Ej.**5**.- Demostrar que
$$x' = \frac{x}{x-y+1} \qquad y' = \frac{y}{x-y+1},$$
es una elación (homología especial), encontrar su centro y su eje.

Ej.**6**.- Encontrar todas las elaciones con centro y eje dados.

Ej.**7**.- Sean σ_1 y σ_2 dos homologías armónicas con distintos centros y distintos ejes que se cortan en la recta que une sus centros. Demostrar que su producto tiene un solo punto fijo y una sola recta fija.

— *Contenido*