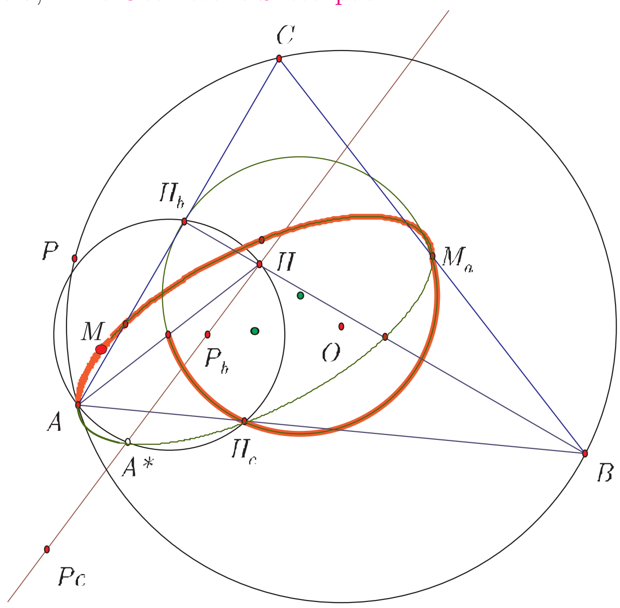
Intersección de una circunferencia con una recta

Angel Montesdeoca

Existe una ambigüedad a la hora de determinar, mediante ciertos paquetes de Geometría Interactiva, el segundo punto de intersección de una circunferencia con una recta, que pasa por un punto de aquella.

Veamos el siguiente ejemplo de construcciones geométricas, usando paquetes de Geometría Interactiva. (Ver un applet de Geometra, "The Geometer's Sketchpad"



En un triángulo $\widehat{ABC}$ se considera la circunferencia de los nueve puntos o de Euler y la elipse con uno de sus diámetros la mediana por A y que pasa por los puntos medios de las alturas desde B y C. Ambas de verde claro en la figura.

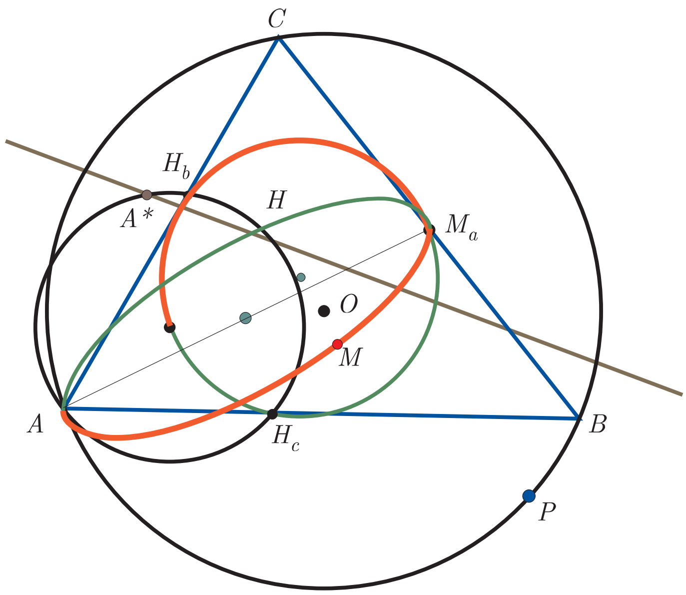
Dado un punto P, en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, consideramos su recta de Steiner (que pasa por los puntos simétricos de P, respecto a los lados de $\widehat{ABC}$); ella pasa además por el ortocentro H de $\widehat{ABC}$.

La recta de Steiner de P corta a la circunferencia de diámetro AH (además de en H) en otro punto A^*. Pues bien, cuando P varía en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, hay momentos en que el punto A^* queda parado en H.

Cualquier construcción posterior, que involucre al punto A^*, podrá presentar problema. Por ejemplo, si determinamos el lugar geométrico que describe el punto medio del segmento PA^*, nos saldrá parte de la circunferencia de Euler y de la elipse, citadas antes.

Más abajo, damos unas alternativas para tomar siempre A^* distinto del ortocentro H.

Con Cabri, se tiene la misma situación (Ver un applet de CabriJava):



La primera alternativa a la construcción, válida tanto para Cabri o Geometra, consiste en determinar la posición de P, en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, para que A^* se pare en H y lo vuelva a abandonar.

Esto ocurre cuando la recta de Steiner es tangente a la circunferencia de diámetro AH y cuando P coincide con A.

Para llegar a que se presente esta situación, hay que proceder a construir la recta de Steiner como sigue: Determinamos P_b el simétrico de P respecto a AC y el simétrico P_c de P respecto a AB. Ambos determinan la recta de Steiner (¡¡no determinarla con el punto simétrico de P respecto a BC!!). De esta forma el sentido del vector P_bP_c, cambia de sentido cuando P atraviesa A. El punto A es una de las posiciones de P que andamos buscando.

La otra posición Q de P para la que A^* se para en H (cuando la recta de Steiner es tangente en H a la circunferencia de diámetro AH), se determina hallando el simétrico Q' de H respecto a la mediatriz de BC, y, luego, el simétrico Q de Q' respecto al lado BC.

Ahora consideramos, los dos arcos determinado por los puntos A y Q en la circunferencia circunscrita. Para cada P tomado en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, deberemos distinguir cuando él está en uno u otro de estos arcos.

Si utilizamos Cabri, basta tomar la semirrecta OP (O es el circuncentro de $\widehat{ABC}$) y hallar la intersección con cada uno de los arcos. Nos dará dos puntos P_1 y P_2 diferenciados de P. Esto no ocurre con Geometra; con este paquete podríamos tomar una circunferencia concéntrica con la circunscrita a $\widehat{ABC}$ y tomar la semirrecta que parte de O y pase por un punto de la circunferencia tomada. La intersección de esta semirrecta con los arcos antes descritos determinan los puntos P_1 y P_2.

Ahora sólo nos queda determinar el correspondiente punto A^* de intersección de cada recta de Steiner de P_1 y P_2 con la circunferencia de diámetro AH y, luego, el punto medio A' de PA^*. El cual describe, al variar P, solamente la elipse, no la circunferencia de Euler.

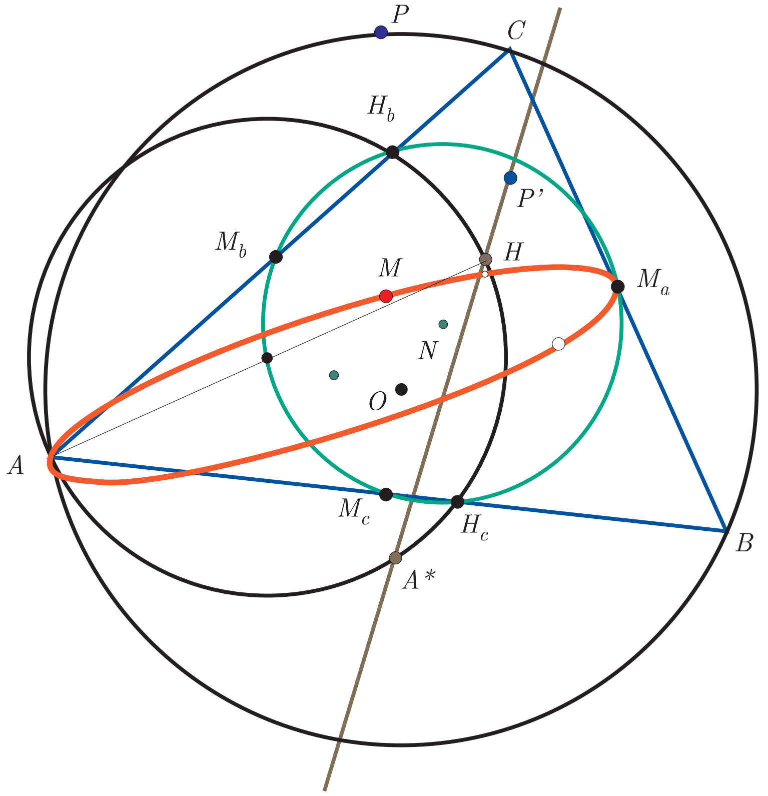
Ver un applet de CabriJava (el applet JavaSketchpad, no soporta arcos).

Segunda alternativa (más fácil), sólo con Cabri: Este paquete de Geometría Interactiva proporciona un macro (circuns.mac) que permite trazar la circunferencia que pasa por tres puntos X, Y y Z. Si construimos tal circunferencia empezando con el punto X, cuando trazamos una recta variable que pase por X, el otro punto de X' de intersección de la recta con la circunferencia no se para en X cuando la recta pasa por la posición de la tangente en X a la circunferencia (¡¡ESTO NO OCURRE CUANDO TOMAMOS RECTAS POR Y O POR Z!!).

Para el caso que nos ocupa, procedemos de la forma siguiente:

Como sabemos que la recta de Steiner de un punto P, en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, para por el ortocentro H de $\widehat{ABC}$, la determinamos por H y el simétrico P' de P, respecto al lado AC.

Usamos el macro ”circuns.mac” para construir la circunferencia de diámetro AH, tomando los puntos H, A y H_b, en este orden, (H_b es el pie de la altura desde B). Cuando P varía, su recta de Steiner gira entorno a H y cortará a la circunferencia de diámetro AH en un punto A^*, que no se parará en H cuando sea tangente a esta circunferencia. Así, el lugar geométrico del punto medio de PA^*, que buscamos, no presenta ambigüedad: será la elipse con un diámetro la mediana AM_a y que pasa por los puntos medios de las alturas desde B y C. Ver un applet de CabriJava



Tercera alternativa expresada por Ignacio Larrosa Cañestro.

Para evitar la confusión entre los dos puntos en que una recta corta a una circunferencia (o en que se cortan dos circunferencias) cuando estos se confunden al variar la figura, puede determinarse el segundo punto como el simétrico del primero respecto al diámetro perpendicular a la recta (o el diámetro común).

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Interseccion_Circunferencia_Recta.html