Inversión en el plano

Radio de la circunferencia $\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+D=0}$

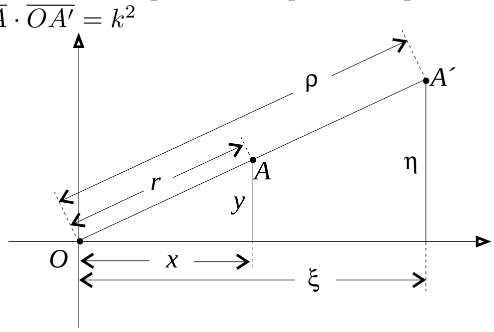
Circunferencia de centro (a,b) y radio r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Comparando: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ con $x^2+y^2+Ax+By+D=0$, resulta $D=a^2+b^2-r^2$ con lo que queda la siguiente relación para el radio:

$$r^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-D$$

Inversión en el plano, de centro en el origen O y razón k^2

Es la correspondencia que a un punto A le asocia un punto A', en línea recta con O y A, y tal que $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=k^2$



$$\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{r}{\rho}=\frac{r\rho}{\rho^2}=\frac{r^2}{r\rho}=\frac{k^2}{\xi^2+\eta^2}=\frac{x^2+y^2}{k^2}$$

$$x=\frac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2},\ y=\frac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2};\quad \xi=\frac{k^2x}{x^2+y^2},\ \eta=\frac{k^2y}{x^2+y^2}.$$

Inversas de rectas y circunferencias

• A una recta que pasa por el centro de inversión le corresponde, obviamente, ella misma.

• A una recta que no pasa por el centro de inversión (sea éste O, el origen de coordenadas), le corresponde una circunferencia que pasa por O. Ya que la ecuación $Mx+Ny+P=0$ de tal recta se transforma en:

$$\frac{k^2M\xi}{\xi^2+\eta^2}+\frac{k^2N\eta}{\xi^2+\eta^2}+1=0 \quad \text{o sea} \quad \xi^2+\eta^2+k^2M\xi+k^2N\eta=0,$$

que es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen y con centro en $(-k^2M/2,-k^2N/2)$, por lo que el diámetro que pasa por O es perpendicular a la recta dada.

• En consecuencia, a una circunferencia que pasa por el centro de inversión O, le corresponde una recta perpendicular al diámetro que pasa por O.

• Una circunferencia que no pasa por O, de ecuación $x^2+y^2+Ax+By+D=0$, que podemos escribir en la forma

$$1+\frac{Ax}{x^2+y^2}+\frac{By}{x^2+y^2}+\frac{D}{x^2+y^2}=0,$$

se transforma en la circunferencia

$$1+\frac{A}{k^2}\xi+\frac{B}{k^2}\eta+\frac{D}{k^4}(\xi^2+\eta^2)=0, \qquad \text{o sea} \qquad \xi^2+\eta^2+\frac{k^2A}{D}\xi+\frac{k^2B}{D}\eta+\frac{k^4}{D}=0.$$

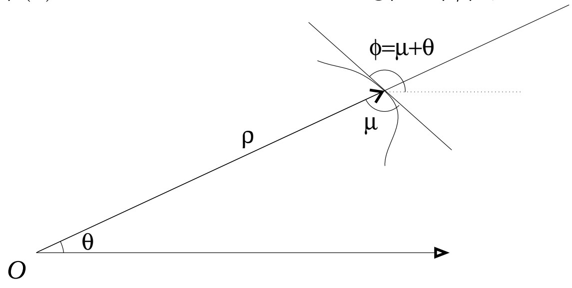
Ésta coincide con la primera (queda invariante), si $D/k^2=k^2/D$ o sea si $D=\pm k^2$.

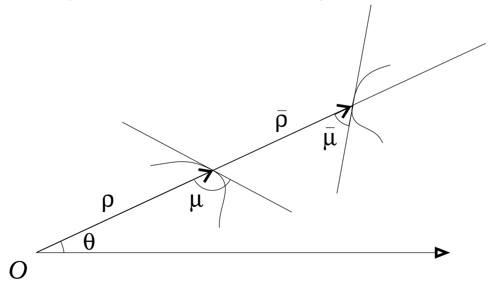
La relación entre radio de la circunferencia de partida $r^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-D$ y el de la circunferencia inversa $\rho^2=\frac{k^4A^2}{4D^2}+\frac{k^4B^2}{4D^2}-\frac{k^4}{D}$ es

$$\rho=\frac{k^2}{D}r. \tag{1}$$

La inversión conserva el ángulo entre curvas

Establezcamos primero una fórmula relativa a la tangente a una curva dada en coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta)$. Se trata de la fórmula: $\operatorname{tag}\mu = \rho/\rho'$, donde μ es el ángulo que forma la tangente con el radio vector.





$$\operatorname{tag}\phi = \frac{y'}{x'} = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{tag}\theta + \dfrac{\rho}{\rho'}}{1 - \dfrac{\rho}{\rho'}\operatorname{tag}\theta}$$

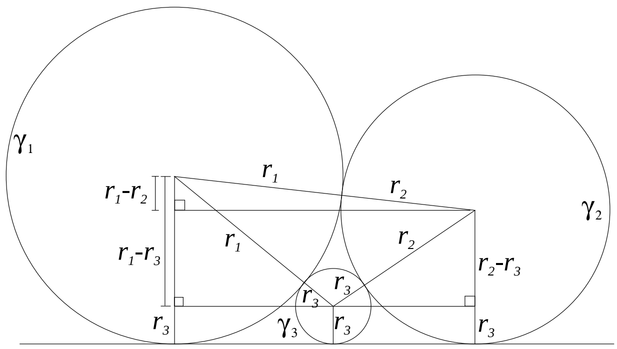
y usando la expresión trigonométrica siguiente, se obtiene la fórmula anunciada,

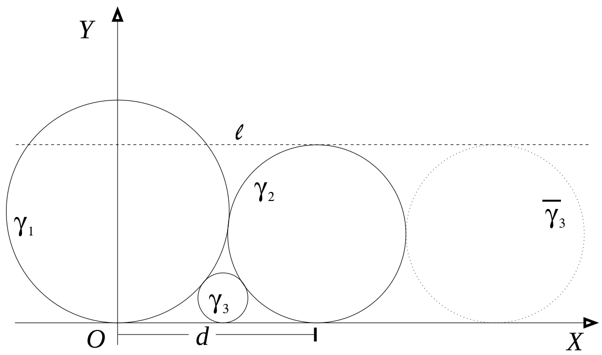
$$\operatorname{tag}(\theta+\mu) = \frac{\operatorname{tag}\theta + \operatorname{tag}\mu}{1 - \operatorname{tag}\mu\operatorname{tag}\theta}$$

En una inversión un punto (θ, ρ) se transforma en el punto $(\theta, \overline{\rho})$, tal que $\rho\overline{\rho} = k^2$. Si la curva $\rho = \rho(\theta)$ se transforma en la curva $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\theta)$, resulta que $\rho'\overline{\rho} + \rho\overline{\rho}' = 0$, de donde $\rho/\rho' = -\overline{\rho}/\overline{\rho}'$, con lo que $\operatorname{tag}\mu = -\operatorname{tag}\overline{\mu} = \operatorname{tag}(\pi - \overline{\mu})$, o sea $\mu = \pi - \mu'$. Para otra curva será, análogamente, $\nu = \pi - \overline{\nu}$ y, restando de la relación anterior, resulta que $\mu - \nu = \overline{\nu} - \overline{\mu}$; luego el *ángulo que forman dos curvas y sus inversas son iguales y de sentido contrario.*

Aplicaciones de inversiones

1 *Tres circunferencias tangentes a una recta, dos de ellas tangentes entre sí y la tercera, entre ellas, tangente a las dos primeras. ¿Qué relación existe entre los radios de las tres circunferencias?*





Aplicando el teorema de Pitágoras a los tres triángulos rectángulos de la figura anterior izquierda, se obtiene la siguiente expresión

$$\sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = \sqrt{(r_1+r_3)^2 - (r_1-r_3)^2} + \sqrt{(r_2+r_3)^2 - (r_2-r_3)^2} \Rightarrow \sqrt{4r_1r_2} = \sqrt{4r_1r_3} + \sqrt{4r_2r_3}.$$

Con lo que la relación entre los radios de las tres circunferencias es

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

Podemos comprobar la validez de la fórmula (1), considerando una inversión de centro en el origen de coordenadas y que deja invariante la circunferencia γ_2. La inversa de la circunferencia γ_1 es la recta ℓ, paralela al eje OX y tangente a γ_2, y la inversa de la circunferencia γ_3 (tangente a γ_1, γ_2 y al el OX) es la circunferencia $\overline{\gamma}_3$ (tangente a ℓ, γ_2 y al eje OX), como se muestra en la figura de la derecha.

El radio de $\overline{\gamma}_3$ es el mismo que el de γ_2, o sea r_2, y su centro está en el punto $(d + 2r_2, r_2)$, donde d, según los cálculo hecho anteriormente, vale $2\sqrt{r_1 r_2}$; luego la ecuación de la circunferencia $\overline{\gamma}_3$ es

$$(x - d - 2r_2)^2 + (y - r_2)^2 = r_2^2, \qquad x^2 + y^2 - 2(d + 2r_2)x - 2r_2 y + (d + 2r_2)^2 = 0$$

Así el término independiente es $D = (d+2r_2)^2$ y como la razón de inversión es $k^2 = d^2$, resulta de la fórmula (1) que

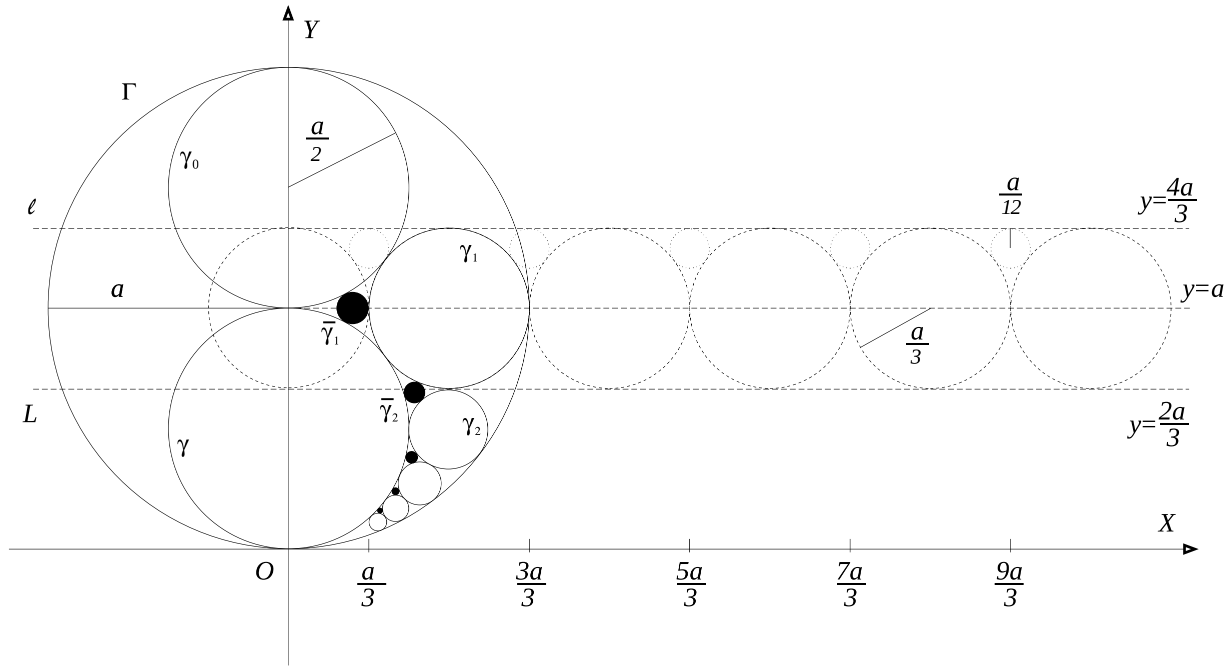
$$r_3 = \frac{k^2}{D} r_2 = \frac{d^2 r_2}{(d + 2r_2)^2} = \frac{4r_1 r_2 r_2}{(2\sqrt{r_1 r_2} + 2r_2)^2},$$

de donde se obtiene la relación entre los radios de tres circunferencias, ya conocida:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{2\sqrt{r_1 r_2} + 2r_2}{2r_2\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

2 *En la sucesión de circunferencias negras de la figura, establecer la expresión siguiente, para el radio de la circunferencia n-ésima,*

$$\overline{r}_n = \frac{a}{(2n-1)^2 + 14}.$$



Dada la circunferencia Γ de radio a y centro en $(0, a)$, se consideran las dos circunferencias γ y γ_0 de radio $a/2$ y centros respectivamente en los puntos $(0, a/2)$ y $(0, 3a/2)$ (que son tangentes interiormente a la primera y tangentes entre sí), existe una única circunferencia γ_1, tangente a las tres anteriores y que, por la simetría del problema, tiene centro en la recta $y = a$. La circunferencia $\overline{\gamma}_1$, primera de la sucesión de circunferencias negras, es tangente a las tres $\gamma, \gamma_0, \gamma_1$. La siguiente circunferencia de la sucesión $\overline{\gamma}_2$, es tangente a $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ (siendo γ_2, la circunferencia tangente a Γ, γ, γ_1). Y así sucesivamente.

Se considera la inversión de centro el origen de coordenadas y que deja invariante a la circunferencia γ_1. Esta inversión transforma las circunferencias Γ y γ, que pasan por el centro de inversión, en sendas rectas paralelas (L y ℓ, respectivamente), perpendiculares al diámetro que coincide con el eje OY, y tangentes a la circunferencia γ_1

(ya que la inversión conserva la tangencia); con lo las ecuaciones de dichas rectas son respectivamente $y = 2a/3$ e $y = 4a/3$. La circunferencia γ_0, tangente a Γ, γ, γ_1, se transformará en una circunferencia tangente a las rectas L y ℓ y a la circunferencia γ_1, por tanto tiene el mismo radio que ésta y centro en el punto $(0, a)$; se observa además que dicho radio es $a/3$. Por las misma consideraciones, se deduce que la inversa de la circunferencia γ_2 (tangente a Γ, γ, γ_1) se transforma en una circunferencia tangente a las rectas L y ℓ y a la circunferencia γ_1. Su radio será, por tanto, $a/3$ y su centro es el punto $(4a/3, a)$. Continuando con este proceso las circunferencia γ_n se transforman en circunferencias tangentes cada una a la siguiente y tangentes a las rectas L, ℓ.

Determinemos ahora las circunferencias inversas de las circunferencias negras $\overline{\gamma}_n$. La $\overline{\gamma}_1$ es tangente a $\gamma, \gamma_0, \gamma_1$, luego su inversa debe ser una circunferencia tangente a ℓ, a la circunferencia inversa de γ_0 y a γ_1. La $\overline{\gamma}_2$ es tangente a $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$, luego su inversa debe ser una circunferencia tangente a ℓ, a γ_1 y a la circunferencia inversa de γ_2. Obteniéndose así una sucesión de circunferencias de mismos radios y centro de la n–ésima (inversa de $\overline{\gamma}_n$) en el punto $((2n-1)a/3, 5a/4)$. El radio r de estas circunferencias verifica, por el Problema 1, que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{3}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{3}}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{12},$$

de donde se deduce claramente las coordenadas de sus centros, puestas arriba.

Las ecuación de una de estas circunferencias, inversa de la $\overline{\gamma}_n$, es pues

$$\left(x - \frac{(2n-1)a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5a}{4}\right)^2 = \left(\frac{a}{12}\right)^2,$$

que desarrollando resulta que, el término independiente es

$$D = \frac{25a^2}{15} + \frac{(2n-1)^2 a^2}{9} - \frac{a^2}{12^2} = \frac{(2n-1)^2 + 14}{9} a^2$$

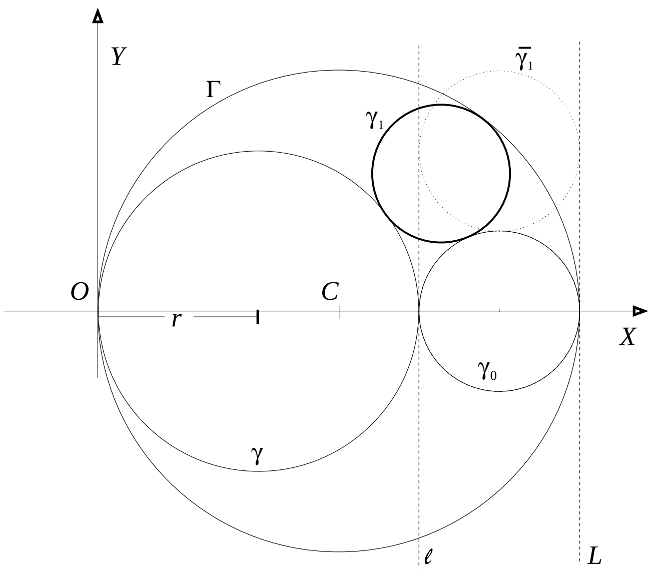
Como el inverso del punto (a, a), de tangencia de las circunferencias Γ y γ_1, es el punto $(2a/3, 2a/3)$, de tangencia de L con γ_1, se tiene que la potencia de inversión es

$$k^2 = \frac{4a^2}{3}.$$

Utilizando ahora (1), obtenemos con radio de las circunferencia $\overline{\gamma}_n$

$$\overline{r}_n = \frac{k^2}{D} r = \frac{4a^2}{3} \frac{9}{((2n-1)^2 + 14)a^2} \frac{a}{12} = \frac{a}{(2n-1)^2 + 14}.$$

3 *Dada una circunferencia Γ y dos circunferencias γ y γ_0 inscritas a la anterior, tangentes entre sí y con centros en un mismos diámetro de Γ. Determinar el radio la circunferencia tangente a las tres circunferencias citadas (trazo grueso en la figura).*



Denotemos por R, r y r_0 los radios respectivos de Γ, γ y γ_0, con $R = r + r_0$. Consideramos la inversión de centro en O y que deja invariante a γ_0. Las inversas de las circunferencias que pasan por O, Γ y γ, son las rectas paralelas L y ℓ, respectivamente, tangentes a γ_0 (la inversión conserva la tangencia) y perpendiculares al diámetro OC. La circunferencia a determinar γ_1, se transforma en otra circunferencia $\overline{\gamma}_1$, tangente a las rectas L y ℓ y a la circunferencia γ_0. Por lo que tiene el mismo radio que ésta, o sea r_0, y su centro estará en el punto $(2r + r_0, 2r_0)$, así su ecuación es:

$$(x - 2r - r_0)^2 + (y - 2r_0)^2 = r_0^2,$$

que tiene como término independiente a

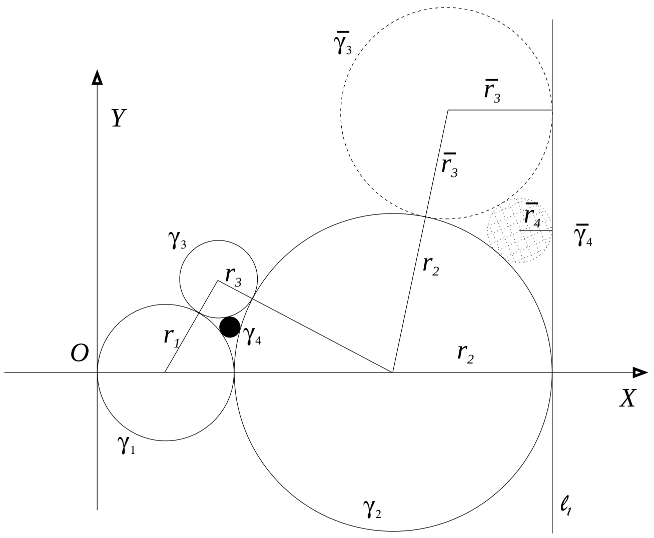
$$D = (2r - r_0)^2 + 4r_0^2 - r_0^2 = 4r^2 + 4rr_0 + 4r_0^2.$$

Como la inversión en cuestión tiene como razón $k^2 = 2(r + r_0) \cdot 2r$, utilizando la fórmula (1), se obtiene como radio de γ_1,

$$r_1 = \frac{k^2}{D} r_0 = \frac{(r + r_0) r r_0}{4(r^2 + r r_0 + r_0^2)}.$$

Nota: Aplicando este razonamiento al Problema 2, y teniendo que en aquel caso $r = r_0$, se obtiene que el radio de la γ_1 es $2r/3$, que coincide con $a/3$, obtenido allí.

4 *Dadas tres circunferencias mutuamente tangentes encontrar el radio de la circunferencia tangente a las tres anteriores.*



Sean las circunferencias γ_1, γ_2 y γ_3 de radios r_1, r_2 y r_3, respectivamente. Consideremos un sistema coordenado rectangular en el que el eje OX pasa por los centros de las circunferencia γ_1 y γ_2 y el eje OY es tangente a γ_1 en el punto diametralmente opuesto al de contacto con γ_2. Supongamos que γ_3 es tangente a γ_1 y γ_2 por la parte positiva de las ordenadas.
La inversión de centro O y que deja invariante a la circunferencia γ_2, transforma la circunferencia γ_1 en la recta ℓ_1, perpendicular al eje OX y tangente a la circunferencia γ_2 en el punto diametralmente opuesto al de contacto con γ_1; la circunferencia γ_3 (con centro a determinar) se transforma en una circunferencia $\overline{\gamma}_3$ tangente a ℓ_1 y a γ_2, cuyo radio vamos a determinar, en función de los radios de las tres dadas.

Si $\overline{r}_3$ es el radio de la circunferencia $\overline{\gamma}_3$, el centro de ésta estará en el punto

$$(2(r_1 + r_2) - \overline{r}_3, \sqrt{(r_2 + \overline{r}_3)^2 - (r_2 - \overline{r}_3)^2}) = (2(r_1 + r_2) - \overline{r}_3, 2\sqrt{r_2 \overline{r}_3}).$$

Luego su ecuación será:

$$(x - 2(r_1 + r_2) + \overline{r}_3)^2 + (y - 2\sqrt{r_2 \overline{r}_3})^2 = \overline{r}_3^2$$

Siendo $\overline{D} = 4(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - r_1 \overline{r}_3)$ el término independiente, el radio de $\overline{\gamma}_3$ se obtiene despejando de la fórmula (1), $r_3 = k^2 \overline{r}_3 / \overline{D}$, resultando

$$\overline{r}_3 = \frac{(r_1 + r_2)^2 r_3}{r_1(r_1 + r_2 + r_3)}$$

El radio $\overline{r}_4$ de la circunferencia $\overline{\gamma}_4$, inversa de la circunferencia pedida γ_4, viene dado, según el Problema 1, por

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{r}_4}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{r}_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

El centro de $\overline{\gamma}_4$ estará en el punto

$$(2(r_1 + r_2) - \overline{r}_4, \sqrt{(r_2 + \overline{r}_4)^2 - (r_2 - \overline{r}_4)^2}) = (2(r_1 + r_2) - \overline{r}_4, 2\sqrt{r_2 \overline{r}_4}).$$

Con estos datos, podemos determinar la ecuación de la circunferencia $\overline{\gamma}_4$ y por consiguiente también el radio de la circunferencia inversa γ_4 que nos piden.

En el siguiente diagrama se muestra como se puede determinar la inversa de una circunferencia en todos los casos posibles. Las circunferencias de inversión son las de trazo discontinuo.