Lugares geométricos y envolventes

Angel Montesdeoca

Viernes, 13 de Mayo del 2016

1 Dada la curva $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ en el plano de clase C^2, se considera la familia de rectas obtenidas girando la tangente a la curva un ángulo θ. Hallar la envolvente de la familia. Probar que tal envolvente es la proyección ortogonal sobre dichas rectas de los centros de curvatura de la curva dada.

2 Envolvente de la familia de circunferencias de radio 1 y centro en la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

/ Applet CabriJava

3 Envolvente de la familia de rectas $\lambda^2 + 2(x + y)\lambda + x - y = 0$.

/ Applet CabriJava

4 Envolvente de la familia de circunferencias de centro sobre la circunferencia $x^2 - 2ax + y^2 = 0$, y que pasan por el origen. Dar la expresión de la envolvente en polares.

/ Applet CabriJava

5 Envolvente de la familia de curvas $y^4 - y^2 + (x - \lambda)^2 = 0$.

/ Applet CabriJava

6 Envolvente de las circunferencias que tiene su centro en la parábola $y^2 = 2px$ y pasan por el vértice de dicha parábola.

/ Applet CabriJava

7 Envolvente de las circunferencias $(x - a)^2 + y^2 = 4am$.

/ Applet CabriJava

8 Envolvente de las rectas que determinan sobre los ejes segmentos de longitud constante.

/ Applet CabriJava

9 Probar que la evoluta plana de una curva plana coincide con la envolvente de las normales a la curva.

10 Envolvente de la familia de rectas $x \operatorname{sen} t - y \cos t = h(t)$. Hallar la evoluta de dicha envolvente.

11 Hallar la envolvente de las trayectorias descritas por un proyectil lanzado con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ y un ángulo α, cuando $0 < \alpha < \pi/2$.

12 Hallar la envolvente de las intersecciones de los planos osculadores a la curva

$$\vec{\alpha}(t) = \left(t - t^3/3, t^2, t + t^3/3\right)$$

con el plano OXY.

/ Applet CabriJava

13 Hallar la envolvente de las circunferencias que cortan ortogonalmente a otra de ecuación $x^2 + y^2 + k^2 = 0$ y tienen su centro en la parábola $y^2 = px$.

14 Dado un punto P y una recta r. Se trazan por P rectas variables, que cortan a r en Q. Hallar la envolvente de las rectas que pasan por Q y son perpendiculares a PQ. / Applet CabriJava

15 Envolvente de las parábolas de directriz d, fija, y cuyo foco describe una circunferencia dada. / Applet CabriJava

16 El vértice recto H de una escuadra está obligado a estar sobre una circunferencia, un lado de la escuadra se hace pasar por un punto fijo F_1 fijo en el plano y externo a la circunferencia. Cuando H describe la circunferencia el otro lado de la escuadra envuelve una hipérbola que tiene a F_1 como foco y eje real el diámetro de la circunferencia.

Dicho de otra forma, la circunferencia es la podaria de la hiperbola respecto al foco F_2. (↻) / Applet CabriJava

17 Dados en el plano un punto F y una recta d, Tomamos un punto H variable sobre d. Establecer que la envolvente de las mediatrices de los segmentos FH es una parábola. Esto da un método para construir una parábola por puntos. / Applet CabriJava

18 Se consideran los triángulos que tienen un vértice fijo P y están circunscritos a una circunferencia fija $\mathcal{C}$. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias circunscritas a dichos triángulos. (↻) / Applet CabriJava

19 Se consideran los triángulos que tienen un vértice fijo P y están circunscritos a una circunferencia fija $\mathcal{C}$. Hallar la envolvente de las circunferencias circunscritas a dichos triángulos. (↻) (↻) / Applet CabriJava

20 Demostrar que la envolvente de las circunferencias que pasan por un punto fijo O y tienen su centro en una curva $\mathcal{C}$, es la curva homotética de la podaria de la curva $\mathcal{C}$ respecto al punto O (lugar de los pies de la perpendiculares trazadas desde O a las tangentes a $\mathcal{C}$) mediante una homotecia de centro O y razón 2. / Applet CabriJava

21 Se dan en el plano una circunferencia $\mathcal{C}$ y un punto F. Por cada punto P de $\mathcal{C}$ se traza la perpendicular al segmento PF, encontrar la envolvente de tales perpendiculares. (↻) / Applet CabriJava

22 Dada una parábola $\mathcal{P}$ y la recta r perpendicular al eje por su foco, determinar la envolvente de las circunferencias que tienen el centro en $\mathcal{P}$ y son tangentes a r.

/ Applet CabriJava

23 Se consideran pares de circunferencias pasando por dos puntos fijos A y B y cortándose con un ángulo constante, hallar la envolvente de las tangentes comunes. / Applet CabriJava

24 Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$, encontrar la envolvente de los ejes radicales de $\mathcal{C}$ con las circunferencias tangentes a $\mathcal{C}_1$ y de radio igual al de $\mathcal{C}$. (Cónica, con uno de sus focos en el centro de $\mathcal{C}_1$ y su eje focal pasa por los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$.)

/ Applet CabriJava

25 La envolvente de las polares respecto a un triángulo de los puntos de una recta que no pasa por los vértices es una cónica tangente a los lados del triángulo.

/ Applet CabriJava

26 Dados en una recta r tres puntos A, B y C, se consideran dos circunferencias de radios dados, una pasando por A y B y otra tangente a r en C. Hallar la envolvente de los ejes radicales de ambas circunferencias, cuando A y B son fijos y C varía en r. / Applet CabriJava

27 Dadas dos circunferencias de centros y radios fijos y una circunferencia de radio fijo y centro variable sobre la primera de las anteriores, hallar la envolvente de los ejes radicales de la segunda circunferencia fija y la variable.

/ Applet CabriJava

28 Envolvente de los ejes radicales de la circunferencia inscrita a un triángulo y de las circunferencias de centro en la circunferencia circunscrita y de radio la mitad de la circunferencia inscrita. / Applet CabriJava

29 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, por un punto variable M sobre el lado AB, se trazan la paralela a BC que corta a AC en D, y la paralela a AC que corta a AB en E. La envolvente de las mediatrices de DE es una parábola tangente a las mediatrices de los lados AC y BC y a las bisectrices (interior y exterior) en C. Además por su foco F pasan las circunferencia circunscritas al triángulo $\widehat{CDE}$.

El lugar geométrico de la intersección de las mediatrices de DE con las circunferencias circunscritas a $\widehat{CDE}$ son las bisectrices (interior y exterior) en el vértice C.

La recta que une el vértice C con F es la simediana relativa a dicho vértice (recta simétrica de la mediana respecto a la bisectriz).

Si de forma similar se toma el punto M en los otros dos lados se obtienen otros dos focos de de las correspondientes parábolas, que están en las correspondientes simedianas.

/ Applet CabriJava

30 Sean $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el origen O y radio 1 y el punto $A(1, 0)$ de la misma. Considérese un punto P sobre la circunferencia y sean B el simétrico de A respecto a OP y C el simétrico de P respecto a OB. Determinar el lugar geométrico del punto Q intersección de la recta $r \equiv OP$ con la perpendicular s a ella por C y hallar la envolvente de las rectas s cuando P varia sobre la circunferencia. / Applet CabriJava

31 Se colocan los extremos A y B de un segmento de longitud constante c sobre los ejes rectangulares OX y OY, respectivamente. Por el punto de intersección de las paralelas a los ejes por A y B, se traza la perpendicular a AB, que la corta en P. Hallar el lugar geométrico de P para las posiciones variables del segmento AB. Demostrar que es la envolvente de tales segmentos. (↺) / Applet CabriJava

32 Sobre una circunferencia centros en O se toman dos puntos A y B. Sobre otra circunferencia de igual radio y de centro en O' se toma un punto A' y dos puntos B' y B'' tales que los arcos $AB = A'B' = B''A'$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios P y Q de los segmentos BB' y BB'', respectivamente, al variar A'.

/ Applet CabriJava

33 Dado un punto móvil M sobre la base de un triángulo isósceles $\widehat{ABC}$, se traza por M la paralela a AB que corta a AC en D, y la paralela a AC que corta a AB en E. Demostrar que las mediatrices del segmento DE pasan por un mismo punto, por el cual pasan las circunferencia circunscritas a los triángulo $\widehat{ADE}$. O lo que es lo mismo, hallar la envolvente de las mediatrices del segmento DE. / Applet CabriJava

34 Lugar geométrico de la intersección de las rectas de Wallace-Simson, relativas a dos puntos sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo, que forman un ángulo ω con el circuncentro. / Applet CabriJava

35 Dados dos rectas fijas r y s que se cortan en O y una recta variable ℓ, que corta a r en P y a s en Q, de tal forma que el área el triángulo $\widehat{OPQ}$ es constante, demostrar que la envolvente de las rectas ℓ es una hipérbola de asíntotas r y s. (↺) / Applet CabriJava

36 El lugar geométrico de los vértices de una parábola cuyo foco describe una circunferencia $\mathcal{C}$ y que permanece tangente a dos diámetros perpendiculares fijos de $\mathcal{C}$, es una astroide. / Applet CabriJava

37 Determinar la envolvente de las polares de los puntos de una parábola respecto a una cónica. / Applet CabriJava

38 Desde el punto $A(-a, 0)$, donde $a > 0$, se traza una recta variable que corta al eje OY en B, a ambos lados del punto B y sobre la recta AB se consideran dos puntos M y N, tales que los segmentos MB y NB tienen la misma longitud, igual a r, al girar la recta variable los puntos M y N describen una curva llamada concoide. (↺) (↺) (↺) Hallar su ecuación, primero, en coordenadas polares tomando el punto A por polo y dirigiendo el eje polar en la dirección positiva del eje OX; y, después, en coordenadas cartesianas respecto al sistema dado. / Applet CabriJava

39 Desde el origen de coordenadas se traza una recta ℓ que corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ en el punto B; en dicha recta, a ambos lados del punto B, se toman dos puntos M y N, tales que los segmentos BM y BN tengan la misma longitud, igual a b. Hallar el lugar geométrico de los puntos M y N al girar la recta ℓ alrededor del origen. (↺) (↺) (↺) / Applet CabriJava

40 Sean una circunferencia de centro O y radio r y una recta pasando por O, la trisectriz de Ceva es el lugar geométrico de los puntos M tales que $OP = PQ = QM$ con P sobre la circunferencia, Q sobre la recta y tales que O, P y M están alineados. El ángulo $\widehat{xQM}$ es el triple del ángulo $\widehat{xOM}$, de hay el nombre de trisectriz.

41 Se dan dos puntos O y S, la trisectriz de Maclaurin de polo S $(S(3a, 0))$ y punto doble O es el lugar geométrico de los puntos M tales que $OP = PA = AM$ donde A está definido por $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$ y tal que O, P y M están alineados. El ángulo $\widehat{SAM}$ es el triple del ángulo $\widehat{SOM}$ de donde el nombre de trisectriz. / Applet CabriJava

42 Sea una circunferencia tangente en el origen de coordenadas al eje OX. Tracemos la tangente a la circunferencia paralela al eje OX. Tracemos una recta desde el origen que corta a la circunferencia en un punto A y a la tangente en un B. Lugar geométrico del punto P con la ordenada de A y con la abscisa de B (curva de Agnesi). (↺) / Applet CabriJava

43 Sean dos puntos $Q(q, 0)$ y $R(0, r)$ con la suma de q y r constante (a). Ahora se toman los puntos P sobre la recta RQ, tal que PQ es igual a una constante (b). Establecer que el lugar geométrico de P es la concoide de Dürer de ecuación implícita: $a(a - 2x - 2y)(b^2 - y^2) = (b^2 - 2y^2)(b^2 - x^2 - y^2)$. Hacer la representación gráfica.

44 Dados una recta p y un punto P (llamado polo), que se proyecta perpendicularmente sobre p en O. Tazamos por P rectas r variables. El lugar geométrico de los punto R sobre r para los cuales $OQ = RQ$, donde Q es el punto de corte de r y p, recibe el nombre de estrofoide. Establecer que $y^2 = x^2\dfrac{1+x}{1-x}$ es su ecuación cartesiana, tomando como eje de las "y" la recta p y origen O. Hacer la representación gráfica de la curva. (↺)

45 Dado un rectángulo $ABCD$, en el lado AB, se considera un punto variable M, y sea N la intersección del lado CD con la paralela por M al lado BC. Sea d una recta por MC y P el punto de intersección del lado AB con la perpendicular por N a d. Se pide el lugar geométrico de Q punto de intersección de las rectas CP, y MN. / Applet CabriJava

46 Establecer que el lugar geométrico de los centros de gravedad M de un hilo de peso homogéneo enrollado alrededor de un circunferencia de centro O y de radio a (uno de los extremos situado en A de coordenadas polares $(a, 0)$ y el otro en $M_0(a, 2\theta)$) tiene por ecuación $\rho = \dfrac{a \operatorname{sen} \theta}{\theta}$. Hacer la representación gráfica de la curva (Cocloide).

47 Representar gráficamente la curva $\rho = 1 + b \operatorname{sen} \theta$. O en implícitas: $(x^2 + y^2)^3 = ((b+1)x^2 - (b-1)y^2)^2$.

Para $b = 2$, tenemos:

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia con centro en O. Trazar una recta por O que corta a $\mathcal{C}$ en P. Sea un punto Q sobre el eje de abscisas tal que $OP = PQ$.

La trisectriz de Ceva es el lugar geométrico de los puntos M tales que: M está en OP y $MP = PQ$.

Se verifica además que $\widehat{OQM} = 3\widehat{QOM}$. / Applet CabriJava

48 Dados dos ruedas fijas, se considera una una tira elástica uniforme y siempre tensa que está fijada en un punto de la primera rueda distante del centro r y en otro punto de la segunda rueda distante del centro la misma cantidad r. La primera gira con una velocidad angular ω y la segunda con una velocidad angular $k\omega$. Lugar geométrico de los puntos medios de dichas tiras, cuando las ruedas giran en el mismo sentido y en el contrario.

/ Applet CabriJava

49 Envolvente de la familia de elipses, para $t \in [0, c]$:

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(c-t)^2} = 1.$$

/ Applet CabriJava

50 Un segmento AB de longitud constante ℓ se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre en el eje OX y su extremo B sobre el eje OY. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por un punto fijo P sobre AB tal que la razón $\overline{AP} : \overline{BP} = k$. / Applet CabriJava

51 Consideremos tres puntos O, A, B alineados y A' y B' las proyecciones de A y B, respectivamente, sobre una recta variable que pasa por O. Encontrar el lugar geométrico de los puntos P de intersección de las rectas AB' y $A'B$. / Applet CabriJava

52 Dada una circunferencia fija de radio a y otra variables de radio b, se pide el lugar de los centros de ésta, cuando ambas se cortan según una cuerda de longitud constante $2k$. / Applet CabriJava

53 Se considera una recta a y sobre ella un punto fijo A y otro variable M. Sea P un punto tal que el triángulo $\widehat{APM}$ sea isósceles ($\overline{PA} = \overline{PM}$). Se supone que M y P varian de modo que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{APM}$ permanezca constante e igual a r.

Lugar geométrico del centro K (circuncentro) de la circunferencia circunscrita a $\widehat{APM}$. Lugar geométrico del vértice P. Lugar geométrico del ortocentro H del triángulo $\widehat{APM}$.

/ Applet CabriJava

54 Dadas dos circunferencias, determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan a las dos dadas en puntos diametralmente opuestos. ¿Cuándo coincide con su eje radical? / Applet CabriJava

55 Dada la recta $x = a$, un punto $M(x_1, y_1)$ se proyecta ortogonalmente sobre $x = a$ en D y se traza OM que corta a $x = a$ en C. Una paralela a OX por C corta a OD en N. Hallar la ecuación del lugar geométrico de N cuando M describe la circunferencia $(x - b)^2 + y^2 = b^2$. / Applet CabriJava

56 Sean una cónica $\mathcal{C}$, A y B los puntos de corte de la cónica con un diámetro, T un punto de la cónica, t la tangente en T y P el punto de intersección de t con el diámetro paralelo a AT. Establecer que el lugar geométrico de P, cuando T varía, está en la tangente en B.

/ Applet CabriJava

57 Dada la circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas, se considera un diámetro de extremos A y B. Lugar geométrico de los puntos de intersección de la tangente en B a la circunferencia con la recta AC, siendo $C(1,0)$, (Cisoide de Diocles).

/ Applet CabriJava

58 Considerése una parábola y otra igual que rueda, sin deslizarse, sobre ella, hallar el lugar geométrico de los vértice de dicha parábola móvil (Cisoide de Diocles).

Este lugar geométrico coincide con la intersección de la tangente en un punto B de la circunferencia de centro el foco y que pasa por el vértice de la parábola fija, con la recta que pasa por el dicho vértice y por el punto A diametralmente opuesto a B. (↻) / Applet CabriJava

59 Se llama podaria de una curva $\mathcal{C}$, respecto de un punto O, al lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde O a las tangentes de $\mathcal{C}$.

Hallar la podaria de la parábola $y^2 = 2px$ respecto al origen de coordenadas.

Dicha podaria coincide con el lugar geométrico de los puntos de intersección de cada tangente en un punto B de la circunferencia de centro en el eje de la parábola, que pasa por su foco y por su vértice, con la recta que pasa por el vértice y por el punto A diametralmente opuesto a B (Cisoide de Diocles). (↻) / Applet CabriJava

60 Sean AB y CD diámetros perpendiculares de una circunferencia. Sean E un punto en el arco BC y F un punto en el arco BD, tal que los arcos BE y BF son iguales. Se traza la recta FH perpendicular a CD. Lugar geométrico del punto P de intersección de FH con ED (Cisoide de Diocles). (↻) / Applet CabriJava

61 Se dan una recta r, un punto A en ella y una recta s paralela a r. Se considera la circunferencia con centro en un punto B de s y tangente a r. Desde A se trazan las tangentes a la circunferencia (una es r) que la tocan en E y F. El lugar geométrico, cuando B varía, de los puntos medios de los segmento BE y BF consta de una recta y de la cisoide de Diocles. / Applet CabriJava

62 De una cónica se dan un foco, un punto y una tangente. Lugar geométrico del segundo foco.

/ Applet CabriJava

63 En el plano euclídeo, considérese una cónica no degenerada, $\mathcal{C}$. Hállese el lugar geométrico descrito por los puntos desde los cuales las tangentes a $\mathcal{C}$ forman ángulo recto. Pruébese que si $\mathcal{C}$ es elipse o hipérbola, entonces el lugar buscado es una circunferencia con el mismo centro que $\mathcal{C}$ (de Monge); si $\mathcal{C}$ es una parábola, el lugar es una recta (la directriz de la parábola). (↻)

64 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualquiera a la parábola $y^2 = 4px$. (↻)

65 Lugar geométrico de los puntos de intersección de tangentes a una parábola que forman un ángulo constante. / Applet CabriJava

66 La envolvente de las polares de los puntos de una circunferencia Γ de centro en C, respecto de otra circunferencia Γ_0 de centro en O, es una cónica $\mathcal{C}$, denominada polar recíproca de Γ, respecto a Γ_0. Un foco de $\mathcal{C}$ es O y la directriz correspondiente, es la polar de C. La cónica $\mathcal{C}$ es una elipse, parábola o hipérbola, según que el centro O de Γ_0 sea interior a Γ, esté situado en ella o sea exterior. / Applet CabriJava

67 Dada cónica y un triángulo rectángulo inscrito en ella, sean pares de rectas que pasan por el vértice recto y son simétricas respecto a los catetos. Éstas cortan a la cónica en otros dos puntos, demostrar que las rectas que los unen pasan por el polo de la hipotenusa. / Applet CabriJava

68 El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo, está compuesto por dos elipses de focos en el circuncentro O y en el incentro I (su centro, punto medio de O e I, es el X_{1385} de ETC).

Si en la circunferencia de centro en un punto de la circunferencia circunscrita y de radio igual al de la circunferencia inscrita, se consideran los puntos P y Q, diametralmente opuestos y alineados con O, los puntos de intersección de las mediatrices PI y QI, están en una recta perpendicular al eje focal de las elipses anteriores (dicha recta es la polar trilineal de X_{279} de ETC).

La envolvente de tales mediatrices son las elipses anteriores.

/ Applet CabriJava

69 En el plano referido a un sistema de coordenadas rectangulares se tiene un punto P. Por un punto A variable del eje OX se traza la perpendicular a la recta AP y se toma el punto de encuentro M de esta perpendicular y la perpendicular a OX trazada por el punto medio de OA.

1) Demuéstrese que el lugar geométrico de M es una parábola de eje paralelo a OY.

2) Supesto que P se desplaza en una circunferencia de centro O y radio r, hallar:

– Envolvente de la parábola.

– Lugar geométrico del punto de encuentro de OP con la parábola.

– Lugar geométrico del vértice.

– Lugar geométrico del foco.

/ Applet CabriJava

70 Se dan dos rectas secantes a y b y un punto P que no pertenece a ninguna de ellas. Una recta d que pasa por P corta a a y b en A y B respectivamente. Montrar que el lugar geométrico de la intersección de la paralela a a pasando por B con la perpendicular a a trazada por A es una hipérbola. Determinar las asíntotas de ella. / Applet CabriJava

71 Se considera una circunferencia de radio 1 y dos diámetros perpendiculares. Las tangentes a dicha circunferencia cortan a los diámetros prolongados en dos puntos A y B. Se llevan a partir del centro de la circunferencia y sobre la semirrayos que contiene al punto de contacto segmentos iguales a $\overline{AB}$. Si es el extremo del semirrayo variable, se pide el lugar geométrico de P.

/ Applet CabriJava

72 En el plano afín se consideran las referencias cartesianas $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O; \vec{u}', \vec{v}'\}$. Hallar la condición necesaria y suficiente para que existan otros puntos distintos de O que tengan las mismas coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$. Hallar el lugar geométrico de estos puntos.

73 Sean A, B, C puntos del plano afín. Determinar el conjunto de puntos que tienen las mismas coordenadas respecto de las referencias cartesianas $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ y $\{B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\}$.

74 Dos puntos A y B describen respectivamente dos rectas fijas d y d'. Sea O el punto de intersección de estas rectas. Determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo $\widehat{OAB}$ cuando el vértice opuesto a O del paralelogramo trazado sobre O, A, B describe otra recta d'', dada.

/ Applet CabriJava

75 Los ángulos con los que se ve una cuerda de un circunferencia desde cualquier punto de ésta son todos iguales a la mitad del arco de circunferencia limitado por dicha cuerda.

Recíprocamente, el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento bajo un mismo ángulo, forma parte de una circunferencia, que tiene a dicho segmento como una de sus cuerdas.

76 Dados tres puntos A, B y C en una recta, encontrar el lugar geométrico de los punto P del plano desde los cuales se ven los segmentos AB y BC bajo un mismo ángulo. (↻) / Applet CabriJava

77 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia y de un punto dado interior a ella?

78 Determinar el lugar geométrico del punto de intersección de la normal en un punto P de una parábola con la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une el vértice O de la parábola con su punto P.

79 Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Una recta variable que pasa por A interseca a las dos circunferencias en P y Q. Si R es un punto que divide al segmento PQ en una razón dada, demostrar que el lugar geométrico de los punto R es una circunferencia

80 Por el interior de una circunferencia inmóvil rueda tocándola sin deslizarse otra circunferencia de radio mitad del de la primera. ¿Qué lugar geométrico describe un punto P de circunferencia rodante?

81 Hallar el lugar geométrico de los puntos de intrersección de las tangentes interiores comunes a dos circunferencias que ruedan sobre una recta.

82 Sobre una recta ℓ se consideran dos puntos A y B, determinar el lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la recta PB forma con ℓ un ángulo de amplitud la mitad del que forman las rectas PA y ℓ.

83 Sean A, B y C puntos sobre una circunferencia. Llamemos H al ortocentro del triángulo. Hallar el lugar geométrico de H al mover A sobre la circunferencia.

84 Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O y A un punto exterior a la circunferencia. Sea P un punto sobre $\mathcal{C}$. Se traza la circunferencia $\mathcal{C}'$, de centro A que pasa por P y la recta r que pasa por O y P. La recta r corta a D en dos puntos (uno es P). Sea M el punto medio de estos dos puntos. Hallar el lugar geométrico de M al variar P sobre $\mathcal{C}$.

Dada una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y una circunferencia $\mathcal{C}'$ que pasa por O y corta a C en A y B, sea C (distinto de O) un punto de $\mathcal{C}'$ que está en el interior de la circunferencia $\mathcal{C}$. La recta AC corta nuevamente a la circunferencia $\mathcal{C}$ en D. Demostrar que $CB = CD$.

85 Se dan los lados opuestos AB y CD de un cuadrilátero, los cuales se cortan en un punto O. El lado AB es fijo y el CD gira alrededor del punto O. Determinar el lugar geométrico de P, en el que se cortan los lados AD y BC.

86 Se dan en el plano una circunferecia $\mathcal{C}$ y un punto F, se considera un punto variable P sobre $\mathcal{C}$ y las rectas p perpendicular por P a PF y d paralela, por el centro de la circunferencia, a PF. Hallar el lugar geométrico de la intersección de las rectas p y d, cuando P varía.

87 $\widehat{ABC}$ es un triángulo equilátero. P es un punto variable interior tal que el ángulo $\widehat{APC} = 120°$. La recta CP interseca a AB en M, y la recta AP interseca a BC en N. ¿Cuál el el lugar geométrico del circuncentro del triángulo $\widehat{MBN}$ al variar P?

88 Se dan circunferencia que se cortan en los puntos A y B. Por un punto P varible de una de ellas se trazan las rectas PA y PB, que cortan a la otra circunferencia en otros puntos Q y R, respectivamentes. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo $\widehat{PQR}$.

89 Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y sean A, B y C puntos sobre ella. Sea r la bisectriz de $\widehat{BAC}$, s la perpendicular a r que pasa por B y t la perpendicular a r que pasa por C. Sea P la intersección entre r y s. Sea Q la intersección entre r y t. Sea O el punto medio de PQ. Hallar el lugar geométrico de O a medida que A se mueve en K por el arco mayor determinado por BC.

90 Se tiene una circunferencia $\mathcal{C}$ y un punto P en su exterior. Sea T en $\mathcal{C}$ tal que PT es tangente a la circunferencia. Sea Q un punto en $\mathcal{C}$. La recta PQ interseca a $\mathcal{C}$ en Q y R. La bisectriz del ángulo $\widehat{QTR}$ interseca a RQ en A. Hallar el lugar geométrico de A al moverse Q sobre $\mathcal{C}$.

91 Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O y A un punto exterior a la circunferencia. Sea P un punto sobre $\mathcal{C}$. Se traza la circunferencia $\mathcal{D}$, de centro A que pasa por P y la recta r que pasa por O y P. La recta r corta a $\mathcal{D}$ en dos puntos (uno es P). Sea M el punto medio de estos dos puntos. Hallar el lugar geométrico de M al variar P sobre $\mathcal{C}$.

92 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo del plano afin euclidiano. Se trata de encontrar el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que si A', B', C' designan el simétrico respectivos de P con relación a los lados BC, CA, AB, entonces las rectas AA', BB', CC' sean concurrentes o paralelas. (⟳)

93 Sean: $\mathcal{C}_1$ una circunferencia, AB uno de sus diámetros, t su tangente en B y M un punto de $\mathcal{C}_1$ distinto de A. Se construye una circunferencia $\mathcal{C}_2$ tangente a $\mathcal{C}_1$ en M y a la recta t.

Determinar el punto P de tangencia de t y $\mathcal{C}_2$ y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias al variar M.

Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias $\mathcal{C}_2$.

94 En dos perpendiculares fijas que se cortan en O, se toman sendos puntos móviles M y N tales que $OM + ON$ sea constante, y se construye el cuadrado $MPNQ$ que tiene por vértices opuestos dichos puntos. El lugar geométrico de Q (que no es fijo) es una recta.

95 Dadas dos perpendiculares fijas y un punto C, exterior a ambas, se construyen triángulos $\widehat{ACB}$, rectángulo en C y cuyos vértices A y B están situados en las rectas dadas (uno en cada una). El lugar geométrico que describe la proyección P de C sobre la hipetenusa, es una recta.

96 Dados dos puntos A y B y una recta r perpendicular a la determinada por ellos, se toma un punto cualquiera M de r y se trazan las normales AP y BP a AM y BM, respectivamente, las cuales se cortan en P. El lugar geométrico de P es una recta.

97 Dadas dos circunferencias secantes de centros O y O', se considera una recta cualquiera MAM' que pasa por A uno de sus puntos comunes y las corta en M y M'. El lugar geométrico de los puntos P de intersección de los diámetros OM y OM' es una circunferencia que pasa por O, O' y por B (el otro punto común).

98 Se dan una circunferencia $\mathcal{C}$, una recta a y un punto A en ésta, demostrar que los ejes radicales de la circunferencia $\mathcal{C}$ y las circunferencias tangentes a r en A, pasan por un mismo punto P, situado en r.

Si A está en una circunferencia $\mathcal{C}_1$ y a es su tangente en A, demostrar que el lugar geométrico del punto P, del apartado anterior, es una cónica.

99 Dadas dos circunferencias concéntricas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ y una tercera cualquiera, $\mathcal{C}_3$, determinar el lugar geométrico del centro de una circunferencia ortogonal a $\mathcal{C}_1$ y tal que su eje radical con $\mathcal{C}_3$, resulte tangente a $\mathcal{C}_2$. (Circunferencia concéntrica con $\mathcal{C}_3$).

100 Sobre dos circunferencia de mismo radio y centros en O y O' se llevan arcos iguales $AB = A'B' = \alpha$, a partir de sendos puntos A y A', fijos en ellas. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios P de los segmentos BB', al variar α, cuando los arcos se llevan en igual sentido; y de los puntos medios Q de BB'', cuando los arcos se llevan en sentido opuesto.

101 Dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de radios desiguales, r y r', son tangentes en un punto A. La recta que pasa por sus centros las corta, además, en B y B', respectivamente. Se considera una recta variable que pasa por A que corta en C y C' a las circunferencias. Se pide el lugar geométrico del punto P de intersección de las recta BC' y CB'.

102 Dados una circunferencia Γ y un punto A, se toma un diámetro variable MN y se trazan las rectas MA y NA, que cortan a Γ en M' y N', respectivamente. Determinar el lugar geométrico del segundo punto P de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\widehat{AMN}$ y $\widehat{AM'N'}$.

103 La cubica de Neuberg de un triángulo $\widehat{ABC}$ es el lugar geométrico de los puntos P cuyos simétricos respecto a los lados BC, CA y AB forman un triánglulo perspectivo de $\widehat{ABC}$.

104 Sea P un punto en el plano del triángulo $\widehat{ABC}$. Demostrar que los puntos P_a, P_b y P_c en los que las rectas perpendiculares por P a AP, BP y CP, intersecan a BC, CA y AB, respectivamente, están en una recta $\mathcal{L}_P$, denomimada ortotransversal de P.

Denótese por P' el tripolo de $\mathcal{L}_P$ respecto a $\widehat{ABC}$ (se dice que P' es el ortocorrepondiente de P). Sea r una recta variable que pasa por el ortocentro H de $\widehat{ABC}$ y r' la recta lugar geométrico de los puntos ortocorrespondientes de los de puntos de r. Establecer que el lugar geométrico de los puntos de intersección de r y r' están en la hipébola de Keipert (hipérbola equilátera que pasa por los vértices de $\widehat{ABC}$, por su baricentro G y su ortocentro H).

105 Cuando un punto P recorre la circunferencia circunscrita a un triángulo, el ortopolo de OP (O, centro de dicha circunferencia), recorre la circunferencia de los nueve puntos. (Dada una recta ℓ se consideran sobre ella los pies de las perpendiculares trazadas desde los vértices, por tales pedales se trazan perpendiculares a los lados; éstas se cortan en un punto denominado ortopolo de ℓ respecto al triángulo)

106 Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas y $A(1, 0)$. Se toma un punto P sobre la circunferencia y se considra el simétrico B de A respecto a OP, y el simétrico C de P respecto a OB. Determinar el lugar geométrico del punto Q intersección de la recta OP con la perpendicular a ella por el punto C, cuando P varía sobre la circunferencia.

107 Siendo M el punto medio del segmento de extremos A y B , estudiar el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que PM sea media proporcional entre PA y PB.

108 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se consideran las circunferencias tangentes entre si y tangentes en B y C a los lados AB y AC, respectivamente. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos de tangencia de tales circunferencia son dos circunferencias que pasan ambas por los vértices B y C, además una pasa por el incentro y el excentro intersección de las bisectirces exterior en B y Cconsiderados, y la otra, por los otros dos excentros.

Repitiendo este proceso con los dos pares de vértices restantes, se obtienen un total de seis circunferencias con tales lugares geométricos.

Los centros de las seis circunferencias l.g. están en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\widehat{A'B'C'}$, de vértices en los excentros de $\widehat{ABC}$, que coincide con la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$..

109 Dadas dos circunferencias de radios a y b, que pasan por un punto D, por un punto P de la primera, se trazan las rectas que pasan por los puntos de intersección de las circunferencias, D y E; éstas cortan a la segunda circunferencia en los puntos F y G. Demostrar que la recta que pasa por P y el punto medio M de la cuerda FG, pasa por un punto fijo, cuando P varía. / Applet CabriJava

110 Dado tres puntos A, B, C sobre una recta, hallar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve los segmentos AB y BC, bajo un mismo ángulo. / Applet CabriJava

111 Se consideran en el plano una circunferencia de radio r y centro O y una recta d, que no se cortan. Sean las circunferencias de centro en d y tangentes exteriormente a la circunferencia dada. Si M y N son los puntos de intersección de estas circunferencias con la recta d, demostrar que existen dos puntos A y B en el plano desde los que se ven los segmentos $\overline{MN}$ bajo un ángulo constante. / Applet CabriJava

112 Justificar las siguientes construcciones geométricas del eje radical de dos circunferencias no concéntricas, lugar geométrico de los puntos de igual potencia a las dos circunferencias.

Si las circunferencias se intersecan en dos puntos, entonces el eje radical pasa por estos puntos de intersección.

Si no, se trazan dos circunferencias arbitrarias que corten a cada una de las circunferencias dadas en un par de puntos; se trazan las rectas que pasan por estos pares de puntos; la recta que une los dos puntos de intersección es el eje radical.

Otra forma de trazar el eje radical de dos circunferencia que no se cortan, es trazando dos circunferencias cada una concéntrica con las dadas, que se corten en dos puntos y descritas por los extremos de segmentos, de longitud constante, de tangentes trazadas a las circunferencias dadas. La recta que pasa por los puntos de corte es el eje radical.

113 Sean H el ortocentro de un triángulo $\widehat{ABC}$ y P un punto de la circunferencia circunscrita. La envolvente de las mediatrices de HP es un cónica inscrita en $\widehat{ABC}$, con focos en H y O (circuncentro) y su centro coincide con el de la circunferencia de nueve puntos. / Applet CabriJava

114 Hallar el lugar geométrico del punto medio de una cuerda de longitud constante $2a$ inscrita en la parábola $y = x^2$.

115 Se da la circunferencia $x^2 + y^2 + ax = 0$ y un punto $A(\alpha, \beta)$. Se traza por el origen O una cuerda arbitraria; sea B el otro punto de corte de la cuerda con la circunferencia. Se proyecta B en C, sobre OY. Hallar el lugar geométrico el punto M, intersección de OB y CA.

116 Se considera un rectángulo $ABCD$. Las paralelas a sus lados trazadas por un punto P, cortan a éstos (o a sus prolongaciones) en Q, R y S, T. Hallar el lugar geométrico que deba describir P para que la rectas QS y RT sean perpendiculares.

117 Dada la recta $2x + 2y - 3 = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que el cuadrado de la distancia a la recta dada es igual al producto de distancias del mismo a los ejes.

118 En el trapecio isósceles $ABCD$, de base $\overline{AD} = 2$ y $\overline{BC} = 4$, se toma un punto variable M sobre la recta CD; y se traza por C la paralela a MA, y por D la paralela a MB. Hallar el lugar geométrico de los puntos P de intersección de éstas últimas rectas.

119 Una recta ℓ pasa por el origen y corta a las rectas $x + 1 = 0, x - y + 1 = 0$, en los puntos A y B, respectivamente. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ a medida que la recta ℓ gira en torno al origen.

120 Dada la recta $r \equiv x + y + 1 = 0$ y los puntos $A(0, 1)$ y $B(0, 2)$. Hallar el lugar geométrico del ortocentro (punto de intersección de las alturas) del triángulo $\widehat{PAB}$ cuando el punto P se desplaza sobre la recta r.

121 Un segmento de recta AB de magnitud constante se mueve apoyando sus extremos en dos ejes cartesianos rectangulares. Hallar el lugar geométrico de la proyección del origen sobre ese segmento.

122 Dado el sistema de circunferencias $x^2 + y^2 - 2a\lambda x + \lambda^2 - b^2 = 0$, a y b constantes. Hallar la ecuación de la cónica lugar geométrico de los puntos de corte de las tangentes a estas circunferencias paralelas al eje OX. Según los valores de a y b, de qué cónica se trata.

123 Se da un circunferencia y un diámetro de extremos O y A. Un punto P describe dicha circunferencia. Sean d la recta que pasa por el centro de la circunferencia y perpendicular a OA, $H = d \cap OP$, d' la recta que pasa por H y es perpendicular a OP, $K = d' \cap OA$, d'' la mediatriz del segmento $\overline{KA}$. Hallar el lugar geométrico de $M = d'' \cap OP$.

124 Por el punto fijo $A(-a,0)$ de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, se traza una cuerda cualquiera AB. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de AB.

125 Sea un sistema de ejes cartesianos perpendiculares, se taza, por un punto fijo A del eje OX, una secante que interseca a OY en B y se toma sobre ella y a cada lado de B dos puntos M y N tales que $\overline{BM}=\overline{BN}=\overline{BO}$. Determinar el lugar geométrico de los puntos M y N.

126 Un punto P se mueve sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro en O. Sea B un punto del plano; t la tangente en P a la circunferencia $\mathcal{C}$. La perpendicular a t que pasa por B corta a t en M. Encontrar el lugar geométrico que describe M.

127 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas r del plano OXY que pasan por el punto $A(-1,0)$ con las rectas r' del mismo plano que pasan por $A'(1,0)$ y tales que las pendientes de r y r' sean inversas.

128 En el plano se dan una circunferencia $\mathcal{C}$, de centro O y radio a, y una recta r que dista k del punto O. La tangente en un punto T de la circunferencia encuentra a r en M. Hallar el lugar geométrico del punto P donde la recta que pasa por O y forma con la recta OM un ángulo ω dado (comprendido entre 0 y π), encuentra a la recta TM.

129 Hallar la ecucación del lugar geométrico de los puntos en los que las tangentes a la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ son perpendiculares. Lo mismos para la circunferecia $x^2+y^2=a^2$.

130 En el plano se dan dos puntos A y B y una recta r perpendicular a $\underline{AB}$. Se unen A y B a un punto variable Q de r y se trazan la perpendicular a $\underline{AC}$ por A y a $\underline{BC}$ por B. Lugar geométrico de la intersección de estas perpendiculares.

131 Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cortan en los puntos A y B; por B se traza una recta variable $\mathcal{L}$ que corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en dos puntos P_1 y P_2, respectivamente. Demuéstrese que las mediatrices de los segmentos $\overline{P_1P_2}$ pasan por un punto fijo.

132 A, B y C son tres puntos alineados, con A entre B y C. Sea d la mediatriz de AC. Se toma un punto M sobre d. $\mathcal{C}$ es la circunferencia con centro en M que pasa por A. Las tangentes por B a $\mathcal{C}$ cortan a $\mathcal{C}$ en T y T'. Hallar el lugar geométrico del baricentro el triángulo $\widehat{BTT'}$ al variar M sobre d. / Applet CabriJava

133 Encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos rectas dadas es constante.

134 Dados dos puntos A y B y una perpendicular r a la recta que los une, se toma un punto cualquiera M de r y se trazan las normales AP y BP a AM y BM, respectivamente, las cuales se cortan en P, determinar el lugar geométrico de P.

135 ¿Qué lugar geométrico ha de describir el afijo del complejo z para que los afijos de z, iz, e i estén alineados?

136 Sea H el conjunto de las homotecias con centro en un punto fijo. Determinar el lugar geométrico de los centros de las homotecias de los conjuntos:

1) $\eta_0\eta\eta_0^{-1}$, donde η_0 es una homotecia dada y η pertenece al conjunto H.
2) $\tau\eta\tau^{-1}$, donde τ es una traslación dada y η pertenece al conjunto H.

137 Por el punto medio M de la base BC de un triángulo $\widehat{ABC}$, se traza una recta variable que encuentra a los lados AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Se pide el lugar geométrico de los puntos de encuentro de las recta BE y CD.

138 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P de su plano, una recta variable pasando por P interseca a dos lados de $\widehat{ABC}$ en U y V. El lugar de los puntos W tales que $(UVPW)=-1$ están en el triángulo anticeviano de P respecto a $\widehat{ABC}$.

139 Considérese un punto P variable situado en el eje de las "x" en el plano ordinario y dos puntos fijos $A(2,1)$ y $B(1,2)$. Sean M y N los puntos en el eje de las "y" donde se intersecan las rectas AP y BP, respectivamente. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas AN y BM.

140 En dos planos superpuestos se tiene una correlación en la que son homólogos:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Puntos} & (0,1,0) & (0,1,1) & (1,0,2) & (1,0,0) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Rectas} & (4,1,0) & (4,1,1) & (3,2,1) & (3,2,-1) \end{array}$$

Hallar la ecuación de la correlación, los elementos involutivos, la cónica lugar de puntos (pertenecientes a sus rectas homólogas) y la cónica lugar de rectas (incidente con sus puntos homólogos).

141 Determinar el lugar geométrico de los vértices de las familia de cónicas de ecuación $y^2+2kx(y-1)-k^2(y-1)^2=0$.

142 Por un punto $M(a,0)$ sobre el eje de una parábola $y^2=2px$ se trazan paralelas a las tangentes. ¿Qué lugar describe el punto en que cada una de estas rectas corta a las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por el punto de contacto correspondiente?

143 Establecer que el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a dos puntos fijos A y B es constante, es una circunferencia que tiene centro en la recta AB y corta a ésta en dos puntos P y Q armónicamente separados de A y B.

144 Una proyectividad entre los haces $\lambda x^1+\mu(x^2-x^0)=0$ y $\lambda'(x^1+x^2)+\mu'(x^2-x^0)=0$ está establecida por las ecuaciones $\rho\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$

Encontrar el lugar geométrico de los puntos de intersección de recta correspondientes.

145 Dada la familia uniparamétrica de cónicas: $\mathcal{C}_\alpha\equiv x^2+y^2-2x\cos\alpha-4y\operatorname{sen}\alpha-3\cos^2\alpha=0$. Se pide:

a) Clasificar dichas cónicas. b) Determinar y clasificar el lugar geométrico de los centros de dichas cónicas.

146 Dos de los vértices A_1, A_2 de un triángulo variable están sobre dos rectas dadas p_1 y p_2, cada uno de sus tres lados pasa por uno de tres puntos dados P,Q y R. ¿Cuál es el lugar geométrico del tercer vértice $A_3=A_1Q\cap A_2R$?

147 Se da la familia de cónicas $x^2+2\lambda xy-2y^2+2\lambda x-1=0$. Hallar el lugar geométrico de los polos de la recta $x+y=0$ respecto a ellas.

148 Determinar el lugar geométrico de los polos de la recta $x+y+1=0$ respecto de la familia de cónicas

$$\lambda y^2-2xy+2y+(2-\lambda)=0.$$

149 Se da un triángulo $\widehat{OAB}$ en el plano afín. Se pide:

1. Calcular la ecuación general de las parábolas circunscritas a $\widehat{OAB}$.
2. Calcular el lugar geométrico de los puntos cuya tangente es paralela a la cuerda OA.

150 En el plano afín hállese la ecuación general de las hipérbolas que pasan por los puntos $P(0,0)$ y $Q(2,0)$ y cuyas asíntotas tienen las direcciones de los vectores $\vec{a}=(1,1)$ y $\vec{b}=(1,-1)$. Hállese el lugar geométrico de los centros de dichas hipérbolas.

151 Hallar el lugar geométrico de los polos de las normales a la parábola $y^2=2px$.

152 Dada una parábola y una circunferencia de centro fijo $C(a,b)$ y un radio variable r, se pide el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma polar respecto de las dos curvas.

153 En el vértice situado sobre el eje OX de la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ se ha trazado la tangente. De cada uno de los puntos de esta tangente se ha trazado la perpendicular a su polar correspondiente. Hallar el lugar geométrico de los pies de estas perpendiculares.

154 En un plano se dan: una circunferencia fija $\mathcal{C}$ de centro O y radio R, y una recta r que dista a del punto fijo O. La tangente en un punto fijo T de la circunferencia encuentra a r en M. Hallar el lugar geométrico de los puntos donde la perpendicular a OM en O encuentra a la recta TM cuando T varía. Definir el lugar.

155 Dado el conjunto de circunferencias representadas por la ecuación: $x^2+y^2-2a\lambda x+\lambda^2-b^2=0$, donde a y b son constantes y $\lambda\in\mathbb{R}$ un parámetro, se pide:

Ecuación del lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes a estas circunferencias paralelas al eje OX. Estudiar el lugar resultante.

156 Se considera la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\neq b)$. Se pide calcular el lugar geométrico de los puntos X del plano cuya polar es perpendicular a la recta XP donde P es un punto fijo del plano de coordenadas (α,β). Estudiar el lugar resultante.

157 Dado el triángulo determinado por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que sus proyecciones ortogonales sobre los tres lados determinan un triángulo de área constante igual a k. Estudiar el lugar obtenido.

158 Se da la parábola $y^2 = 2px$ y un punto $A(a, b)$. Por el vértice O de la parábola se traza una cuerda variable OB. Se proyecta el punto B sobre la tangente en el vértice, obteniéndose un punto C, y se une C con A. Se pide:

a) Lugar geométrico de los puntos de encuentro de las rectas OB y AC.

b) Discutir el lugar haciendo variar la posición del punto A del plano.

159 En el plano euclídeo, una parábola gira (sin deformarse) alrededor de su foco; en cada posición, se le traza una tangente paralela a una dirección fija. Hállese el lugar geométrico descrito por los puntos de tangencia.

160 Dada, en el plano euclídeo, una parábola, hállese el lugar geométrico descrito por los puntos tales que las dos tangentes trazadas desde ellos a la parábola forman un ángulo dado.

161 Se considera la familia de rectas dada por $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - (4\lambda + 2) = 0$

1. Probar que existe un punto del plano cuya distancia a todas las rectas de la familia es constante.
2. Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano por los que pasa una sola recta de la familia anterior. ¿Qué figura geométrica es?

162 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualquiera a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

163 Dados de una cónica dos puntos R y S y las tangentes en ellos r y s y siendo A otro punto de la cónica, localizar el otro punto P que está en una recta u que pasa por R. Utilizar que dicha cónica es el lugar geométrico de la intersección de las rectas homólogas en la proyectividad entre los haces de base R y S.

164 Se da una asíntota y un punto P de una hipérbola. Uno de los focos de la cónica describe la perpendicualr trazada desde P a la asíntota dada. Hallar el lugar geométrico del punto Q de intersección de la segunda asíntota con la directriz del foco considerado.

165 Supongamos dada una proyectividad sobre la tangente t a una cónica. Desde cada dos puntos homólogos A y A' trazamos las tangentes a y a' distintas de t. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de a y a'.

166 Supongamos dada una proyectividad sobre el eje de las "x" y la circunferencia tangente a dicho eje en el origen y de radio a. Desde cada dos puntos homólogos A y A' en la proyectividad, trazamos las tangentes a y a' distintas de OX. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de a y a'.

167 Sean a, b, c, d y e los lados de un pentágono dado. Los lados p, q y r de un triángulo variable pasan por $d \cap e, c \cap d$ y $c \cap e$, respectivamente; quedando los vértices $q \cap r$ y $p \cap r$ sobre a y b, respectivamente. Demostrar que el lugar geométrico descrito por el tercer vértice $p \cap q$ del triángulo, contiene a los cinco vértices del péntagono.

168 Dado un cuadrilátero $ABCD$, demostrar que el lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por sus vértices es una cónica que contiene a los seis puntos medios de los segmentos que unen sus vértices y a los tres puntos diagonales de cuadrilátero.

Comprobarlo para el caso particular en que los vértices del cuadrilátero tienen de coordenadas $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 2)$, $D(0, 1)$.

169 Se dan un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P fijo. Por un punto M variable se trazan paralelas a AP, BP y CP que cortan a BC, AC y AB, respectivamente en A_1, B_1 y C_1. Si el área del triángulo $\widehat{A_1B_1C_1}$ está fijada, demostrar que el lugar geométrico que describe M es una cónica.

170 La curva podaria de la parábola respecto al punto simétrico de su foco respecto a la directriz es la trisectriz de Maclaurin. (La curva podaria de una curva dada con respecto a un punto P, es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares desde P a cada recta tangente de la curva dada):

$$y^2 = \frac{(x + 2a)^2(a - x)}{x + 3a}.$$

171 Sea una cónica con centro $\mathcal{C}$, de centro C y un punto P del plano. Desde un punto M de la cónica, se traza la tangente en M a $\mathcal{C}$, luego la perpendicular a esta tangente pasando por P. Esta recta corta a CM en Q.

El lugar geométrico de Q cuando M describe la cónica es una hipérbola equilátera passando por P y C llamada hipérbola de Appolonio asociada a $\mathcal{C}$ y a P.

172 Considérese la cónica homóloga de una circunferencia en una homología armónica de centro en un punto C de una circunferencia y eje d, entonces dicha cónica imagen es tangente a la circunferencia en C.

La imagen del centro O de la circunferenccia O en dicha homología es el punto F, denominado de Frégier y es el punto común a todas las cuerdas de la cónica vistas desde C bajo un ángulo recto.

El lugar geométrico de los puntos de Frégier de una cónica con centro es una cónica homotética en una homotecia con el centro en la cónica. Para el caso de la parábola es una parábola trasladada.

173 Se dan en el plano una circunferencia y un punto P exterior a ella. Se considera un punto A variable sobre la circunferencia y su diametralmente opuesto B, la recta PA corta a la circunferencia en otro punto Q y la recta QB interseca a la recta paralela a AB por P en M. De pide el lugar geométrico del punto M cuando A varía. (↻)

174 Se consideran los pares de parábolas que pasan por tres puntos fijos y cuyos ejes forman un ángulo constante, determinar el lugar geométrico del cuarto punto de corte.

175 Dos vértices de un triángulo rígido en plano se deslizan por dos rectas fijas. ¿Qué lugar geométrico describe el tercer vértice?

176 Establecer que el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el foco de una parábola a sus tangentes, es la tangente en el vértice (podaria de la parábola respecto a su foco). / Applet CabriJava

177 El lugar geométrico de las intersecciones de pares de tangentes perpendiculares a la parábola es la directriz.

178 Dada una parábola tangente a dos rectas perpendiculares fijas y su foco sobre una recta paralela a una de las anteriores. El lugar geométrico de su vértice es una cisoide. / Applet CabriJava

179 1735) Se dan tres puntos fijos A, B y C, y dos rectas fijas p y q que se cortan en D. Se considera el triángulo variable $\widehat{PQR}$ con el vértice P en p y el Q en q, el lado PR pasando por A, el QR por B y el PQ por C. Entonces el lugar geométrico del vértice R es una cónica que pasa por los cinco puntos A, B, C, D, M (punto de intersección de p con BC) y N (punto de intersección de q y AC).

180 Dado un rectángulo $ABCD$, en el lado AB, se considera un punto variable M, y sea N la intersección del lado CD con la paralela por M al lado BC. Sea d una recta por M, que corta a BC en Q. Sea, finalmente, P el punto de intersección del lado AC con la perpendicular por N a $d \equiv MQ$. Se pide el lugar geométrico de R punto de intersección de las rectas PQ, y MN.

181 Dado un rectángulo $ABCD$, por un punto P del plano se trazan paralelas a los lados que los cortan en P, Q y S, T. Lugar geométrico de P para que las rectas QS y RT sean perpendiculares.

182 Dada una recta r y una circunferencia $\mathcal{C}$, se traza la perpendicular por el centro a la recta y sea R uno de los puntos de intersección de esta perpendicular con la circunferencia. Considérese un punto variable M sobre la circunferencia y sea A su proyección sobre r y B la intersección de r con la recta MR, Establecer que el lugar geométrico del punto P intersección de la recta AR con la perpendicular por B a r es una parábola.

183 El lugar geométrico de los polos respecto a un triángulo de las rectas de un haz cuyo vértice no está en los lados, es una cónica circunscrita al triángulo.

184 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las parábolas circunscritas a $\widehat{ABC}$ con sus tangentes paralelas al lado BC.

185 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Sea A' un punto que se mueve en la mediatriz $\mathcal{L}$ del lado BC. Sea B' el punto sobre la mediatriz del lado CA tal que el triángulo $\widehat{CB'A}$ es semejante al $\widehat{BA'C}$, y sea C' el punto sobre la mediatriz del lado AB tal que el triángulo $\widehat{AC'B}$ es semejante al $\widehat{CB'A}$. Las tres rectas AA', BB', CC' concurren en un punto, P. Cuando A' recorre $\mathcal{L}$, el punto P recorre la hipérbola de Kiepert del triángulo $\widehat{ABC}$, circunscrita y que pasa por su baricentro y ortocentro. / Applet CabriJava

186 Dada una recta r en el plano del triángulo $\widehat{ABC}$, que no coincide con los lados BC, CA, AB, y dado un punto P que recorre r, el lugar geométrico del conjugado isogonal de P es una cónica Γ (denominada transfomada isogonal de r) que pasa por los tres vértices A, B, C.

Si r no intersecta a la circunferencia circunscrita su transformada isogonal es una elipse.

Si r es tangente a la circunfercia circunscrita, es una parábola.

Y si r corta a dicha circunferencia, es una hipérboal, que es equilátera si r pasa por el circuncentro.

/ Applet CabriJava

187 Demostrar que el lugar geométrico de los polos de la recta del infinito respecto a las cónicas tangentes a cuatro rectas, es una recta que pasa por los puntos medios de las diagonales. / Applet CabriJava

188 Establecer que el lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los cuatro vértices de un cuadrivértice es una cónica que pasa por los puntos diagonales y por los punto medios de los lados. / Applet CabriJava

189 El lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices A, B y C de un triángulo y por su ortocentro $H = X_4$, es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo, cuyo centro es X_5. / Applet CabriJava

190 El centro de la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices A, B y C de un triángulo y por su incentro $I = X_1$ es el punto X_{1125} (complemento del X_{10} o centroide del $\{ABCX_1\}$).

Si P y U están alineados con el baricentro $G = X_2$, entonces P es el complemento de U si G triseca al segmento PU y está más cerca de P que de U.

El centroide de cuatro punto A, B, C, P es el complemento del complemento de P con respecto al triángulo $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

191 El centro de la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices de un triángulo y por su circuncentro X_3 es el punto X_{140} de ETC (punto medio de X_3 y el centro de la circunferencia de nueve puntos, X_5). / Applet CabriJava

192 El centro de la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices de un triángulo y por su punto de Gergone (X_7 en ETC) es el X_{124}.

Notas:

El punto de Gergone es la interseccion de las rectas que unen los vértices con los puntos de tangencia con el triángulo de la circunferencia inscrita.

X_{124} es el complemento del Mittenpunkt X_9.

X_{124} es el X_9 del triángulo medial.

X_{124} es el baricentro de $\{X_1, X_4, X_7, X_{40}\}$.

X_{40} es el punto de Bevan: punto de concurrencia de las perpendiculares desde los excentros a los respectivos lados. / Applet CabriJava

193 Sean dados un haz de cónicas determinado por cuatro puntos distintos y una recta que no pasa por ninguno de ellos. Probar que el lugar geométrico de los polos de la recta respecto de las cónicas del haz es una cónica, la cual pasa por los once puntos siguientes:

a) los tres puntos diagonales del cuadrivértice base del haz.

b) los dos puntos de contacto de las cónicas que son tangentes a la recta dada.

c) los seis puntos conjugados armónicos respecto a los puntos base del haz de aquellos en que los seis lados del cuadrivértice que determinan cortan a la recta dada.

/ Applet CabriJava

194 Sean una cónica $\mathcal{C}$, A y B los puntos de corte de la cónica con un diámetro, T un punto de la cónica, t la tangente en T y P el punto de intersección de t con el diámetro paralelo a AT. Establecer que el lugar geométrico de P, cuando T varía, está en la tangente en B.

/ Applet CabriJava

195 Lugar geométrico de los puntos del plano tales que su triángulo podal u órtico, respecto a un triángulo dado, es rectángulo.

/ Applet CabriJava

196 Lugar geomértrico del ortocentro del triángulo $\widehat{ABC}$, con los vértices A y B en una circunferencia de centro en C, cuando A varía. / Applet CabriJava

197 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo, P, Q y R puntos en los lados BC, AC y AB, respectivamente. El lugar geométrico de los puntos de concurrencia L de las cevianas para las cuales la cónica tritangente en P, Q y R es una parábola, es una elipse (denominada elipse de Steiner) circunscrita a $\widehat{ABC}$, cuya tangente en cada vértice es paralela al lado opuesto y cuyo centro es el baricentro de $\widehat{ABC}$.

/ Applet CabriJava

198 Sean C y D dos puntos fijos en el diámetro AB de una circunferencia de centro O y GE una semicuerda paralela a dicho diámetro. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas DG y CE. / Applet CabriJava

199 Una circunferencia fija tiene por diámetro el segmento que une el origen de coordenadas O y el punto $A(2a, 0)$. Desde O se traza una recta cualquiera que encuentra a la circunferencia en D y a la tangente a la circunferencia en A en E. Lugar geométrico del punto P tomado sobre OE, tal que $\overline{PD} = \overline{DE}$ en longitud y dirección. / Applet CabriJava

200 Lugar geométrico de los centros de gravedad de los triángulos determinados por dos ejes fijos y con un tercer lado de longitud constante. / Applet CabriJava

201 Se da un triángulo $\widehat{OAB}$, rectángulo en O. Lugar de los puntos M tales que el ángulo $\angle OMA$ sea igual al ángulo $\angle OMB$. / Applet CabriJava

202 Se dan una recta b y un punto A en el plano. Por un punto cualquiera M de b se traza la perpendicular p a b. Lugar geométrico de los puntos P de p tales que $\overline{RP} = \overline{RQ}$. / Applet CabriJava

203 Lugar de los puntos desde donde se pueden trazar dos tangentes ortogonales a la curva de ecuaciones paramétricas $x = 3t^2$, $y = 2t^3$. / Applet CabriJava

204 Lugar geométrico de los puntos desde los que las tangentes a la parábola $y^2 = 2px$ forman un ángulo de 45°.

205 Se dan en el plano dos puntos fijos A y B y otro punto M variable que recorre una recta r. Se trazan por A y B perpendiculares respectivas a las rectas AM y BM. Lugar geométrico del punto de encuentro de estas rectas. / Applet CabriJava

206 Lugar geométrico de las imágenes del punto $(1, 1)$ por todos los giros en el plano euclídeo ordinario de ángulo $\theta = \pi/2$ y centro sobre la recta $x + y = 1$. / Applet CabriJava

207 Lugar geométrico de los polos de la recta $x + y + 1 = 0$ con respectos a todas las cónicas del haz: $x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$.

208 Desde un punto cualquiera de la directriz de la parábola $y^2 = 2px$, se traza la perpendicular a su polar correspondiente. Lugar geométrico del punto de intersección de estas dos rectas.

/ Applet CabriJava

209 Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una parábola que pasan por su foco.

/ Applet CabriJava

210 Sobre una recta se fijan tres puntos A, B y C. Los puntos A y B se deslizan sobre dos rectas perpendiculares fijas. Lugar geométrico del punto C. / Applet CabriJava

211 Se dan en el plano una recta r y dos puntos A y B no contenidos en ella. Lugar geométrico de los puntos P, tales que las rectas AP y BP determinan en r segmentos de longitud constante.

/ Applet CabriJava

212 En un triángulo $\widehat{ABC}$, se toma el punto M, que divide al segmento AC en la razón t, es decir, el baricentro se A y C afectados de las masas $1 - t$ y t, respectivamente, para un valor de t, comprendido entre cero y uno. Del mismo modo, se toman N tal que divide a BC en la misma razón t, y P, que divide a MN en la razón t.

El lugar geométrico de P cuando t recorre $[0, 1]$ es una parábola (curva de Bézier con tres puntos de control), tangente en A a AC, en B a BC y en P a MN. Además se tiene las siguientes igualdades de razones simples: cónicas

$$(A\,M\,C) = (M\,P\,N) = (C\,N\,B).$$

/ Applet CabriJava

213 Un punto M se mueve sobre una circunferencia fija y Q es su proyección sobre una recta fija. Lugar geométrico del punto P, proyección de Q sobre el diámetro OM. / Applet CabriJava

214 Se consideran dos circunferencia tangentes $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de igual radio y M un punto en $\mathcal{C}_1$. Hallar el lugar geométrico de P, punto de intersección de la paralela por M a la recta que determinan los centros de las circunferencias, con la polar de M respecto a $\mathcal{C}_2$. (↻) / Applet CabriJava

215 Dada una circunferencia, consideremos una cuerda BC y la mediatriz a esta cuerda, que corta a la circunferencia en los puntos A y A'. Se pide el lugar geométrico de los baricentros y ortocentros de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA'}$, cuando C varía sobre la circunferencia. Probar que estos lugares geométricos se obtiene uno de otro mediante una homotecia de centro el de la curcunferencia y razón 3. / Applet CabriJava

216 Lugar geométrico de los incentros de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia, con un vértice fijo. / Applet CabriJava

217 Lugar geométrico de los centros de las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia, con un vértice fijo. / Applet CabriJava

218 Lugar geométrico de los puntos de Gergonne (punto de intersección de las rectas que une cada vértice con el punto de contacto de la circunferencia inscrita con lado opuesto) de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia, con un vértice fijo. / Applet CabriJava

219 Lugar geométrico de los puntos de Lemoine (punto de intersección de las simedianas, simétricas de las medianas respecto a cada bisectrices que parten del mismo vértice) de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia, con un vértice fijo.

/ Applet CabriJava

220 Lugar geométrico de los puntos de Nagel (punto de concurrencia de las rectas que pasan por cada vértice y por el punto del lado opuesto, de contacto con la correspondiente circunferencia exinscrita) de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia, con un vértice fijo.

/ Applet CabriJava

221 Lugar geométrico de los Mittenpunkt (punto de concurrencia de las simedianas del triángulo con vértices en los centros de las circunferencia exinscritas) de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia con un vértice fijo.

/ Applet CabriJava

222 Lugar geométrico de los incentros de los triángulos mediales, de los triángulos isósceles inscritos en un circunferencia con un vértice fijo (centro de Spieker).

/ Applet CabriJava

223 Dada una recta r y dos puntos A y B en ella, determinar la envolvente de las hipérbolas equiláteras tangentes a r y cuyas asíntotas pasan por A y B. / Applet CabriJava

224 Dadas dos rectas perpendiculares, que se cortan en O, y un punto A en una de ellas, se toman dos puntos M, N de la otra, tales que sea $OM \cdot ON = c^2$; se trazan las perpendiculares por M y N a las rectas AM y AN. Lugar geométrico de los puntos P de intersección de estas perpendiculares. / Applet CabriJava

225 Lugar geométrico de los vértices y focos de las parábolas que tienen una misma cuerda fija y tal que la distancia entre la recta que contiene a dicha cuerda y la tangente a cada parábola, paralela a ella, sea igual al radio de la circunfeencia osculatriz a cada parábola en el punto de tangencia. / Applet CabriJava

226 Un segmento fijo de longitud h es la altura, relativa a la hipotenusa, de un triángulo rectángulo variable. Lugar geométrico de los puntos de intersección de uno de los catetos con la circunferencia de centro en el vértice opuesto a dicho cateto y radio m.

227 Envolvente de las rectas que determinan sobre una circunferencia dada, cuerdas de longitud constante. / Applet CabriJava

228 In the plane, given two concentric circles with the center A. Let B be an arbitrary point on some of these circles, and C on the other one. For every triangle ABC, consider two equal circles mutually tangent at the point K, such that one of these circles is tangent to the line AB at point B and the other one is tangent to the line AC at point C. Determine the locus of points K.

(http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=1245868#1245868) / Applet CabriJava

229 El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas sobre una esfera es una curva esférica.