TriangulosCabri (Ricardo Barroso)

Angel Montesdeoca

Domingo, 1 de Octubre del 2017

Enunciados y soluciones en un sólo PDF (5.002.610 bytes)

1 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos, respectivamente, por $O(R)$ y $O_0(R_0)$ sus circunferencias circunscrita y de Apolonio (tangente internamente a cada una de las circunferencias exinscritas); sean, además, I el incentro, S el punto de Spieker (centro de la circunferencia inscrita al triángulo medial de $\widehat{ABC}$) y P el centro exterior de semejanza de $O(R)$ y $O_0(R_0)$. Demostrar que P, S e I son colineales y $\dfrac{PI}{PS} = \dfrac{R}{R_0}$. / Applet CabriJava

2 Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y los puntos cualesquiera O, A', B', C' en su plano, entonces, denotando por $\wedge$ el producto exterior, se tiene:

AA', BB', CC' son concurrentes si y sólo si existen tres vectores (no todos nulos) $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ paralelos a AA', BB', CC', respectivamente, tales que $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$ y $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathbf{v}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$.

3 Construir un triángulo rectángulo conociendo los pies de las tres bisectrices. / Applet CabriJava

4 Inscribir en una circunferencia dada, de centro O y radio R, un triángulo isósceles del que se conoce la suma de la base y de la altura. / Applet CabriJava

5 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo no rectángulo en A y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La paralelas a AC y AB por por V cortan a AB y AC en D y E, respectivamente. La perpendicular a AB por V corta en G a AC. La perpendicular a AC por V corta en F a AB. Además consideramos los puntos de intersección $J = GD \cap VF$ y $K = EF \cap VG$.

a) Demostrar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto si y sólo si AV es una de las bisectrices del ángulo A.

DE es paralela a FG.
FG es paralela a JK.
DG, EF y AV son concurrentes.
El triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles.

b) V es el ortocentro de $\widehat{AFG}$. / Applet CabriJava

6 Construir un triángulo conocidos un lado, el ángulo opuesto y el radio de la circunferencia inscrita. / Applet CabriJava

7 Sea un circunferencia Γ de centro O. Sobre ella se toman dos puntos fijos A y B que son los dos vértices de la base de un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en Γ. Si un punto P recorre la circunferencia Γ, hallar el lugar geométrico

1) del ortocentro H_p del triángulo $\widehat{ABP}$.

2) del ortocentro H'_p del triángulo $\widehat{A'B'C'}$, siendo A', B' y C' las intersecciones de la circunferencia Γ con las bisectrices internas de los ángulos en A, B y P, respectivamente. / Applet CabriJava

8 Sea una circunferencia Γ de centro O. Sobre ella, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en Γ. Sea un punto Q variable sobre Γ:

1.- Hallar el lugar geométrico del baricentro G_Q del triángulo $\widehat{BCQ}$.

2.- Se trazan, en $\widehat{BCQ}$ la altura desde el vértice B, que corta al lado CQ en el punto D, y la altura desde el vértice C que corta al lado QB en el punto E. Determinamos un punto P, en la recta DE, tal que $PE/PD = k$. Hallar el lugar geométrico de P. / Applet CabriJava

9 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, inscrito en una circunferencia Γ de centro O, y H su ortocentro. El lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulo inscritos en Γ, con ortocentro H, es la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

10 En un triángulo acutángulo $\widehat{ABC}$ el ángulo A vale 60° . Demostrar que una de las bisectrices del ángulo formado por las dos alturas trazadas desde los vértices B y C pasa por el circuncentro del triángulo. / Applet CabriJava

11 Construir un triángulo del que se conocen los radios de sus circunferencias circunscrita e incrita y además la altura relativa a uno de sus vértices. / Applet CabriJava

12 Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ del que se conoce el lado a y se verifique que $\widehat{BAM_a} = \hat{C} = \frac{2}{7}\hat{B}$, siendo M_a el punto medio del lado BC. / Applet CabriJava

13 Si el lado a de un triángulo $\widehat{ABC}$ es igual al cociente de la suma de los cuadrados de los otros dos lados por la suma de estos lados, es decir,

$$a = \frac{b^2 + c^2}{b + c},$$

el segmento KI, que une el punto de Lemoine (simediano) al centro del círculo inscrito (incentro), es paralelo a aquel lado e igual a

$$\frac{abc(b - c)}{2s(b^2 + c^2)},$$

siendo s el semiperímetro. / Applet CabriJava

14 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos por H_a, H_b y H_c los pies de las alturas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Entonces, los pies B_a, C_a, Y_a, Z_a de las perpendiculares desde H_a a AC, AB, BH_b, CH_c están alineados.

Procediendo cíclicamente, ocurre que C_b, A_b, Z_b, X_b, por una parte, y A_c, B_c, X_c, Y_c, por otra, también están alineados.

Las tres rectas así obtenidas, determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el simediano de éste. / Applet CabriJava

15 Consideramos un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto cualquiera P. Sea $\widehat{P_aP_bP_c}$ el triángulo ceviano de P y los baricentros $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ de los triángulos $\widehat{PBP_a}$, $\widehat{PCP_a}$, $\widehat{PCP_b}$, $\widehat{PAP_b}$, $\widehat{PAP_c}$, $\widehat{PBP_c}$.

1) Demostrar que los seis baricentros de estos triángulos están en una misma cónica si el punto P está sobre una de las medianas.

2) Construir con regla y compás dos puntos sobre la mediana correspondiente al vértice A para los que la cónica resulta ser una parábola. / Applet CabriJava

16 $\widehat{ABC}$ es un triángulo en el que $BC = 2AB$. Sean D el punto medio de BC, y E el punto medio de BD. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo $\widehat{CAE}$. / Applet CabriJava

17 Construir un triángulo rectángulo conociendo la altura desde el ángulo recto y el perímetro. / Applet CabriJava

18 Dados los radios r_a, r_b, r_c de las circunferencias exinscritas al triángulo $\widehat{ABC}$, determinar las longitudes de los lados a, b, c del mismo en función exclusivamente de los radios anteriores. / Applet CabriJava

19 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo e I su incentro. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola. Demostrar que la polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el exincentro I_a correspondiente a A, y que si $\widehat{P_aP_bP_c}$ es el triángulo ceviano de P entonces P_b, P_c e I siempre están alineados. / Applet CabriJava

20 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar las rectas DEF con D sobre la recta BC, E sobre la recta CA, y F sobre la recta AB tal que $BD = CE = AF$.

21 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y P un punto de su plano; llamamos A_P a la proyección ortogonal de P sobre BC, B_P a la proyección ortogonal de P sobre CA y C_P a la proyección ortogonal de P sobre AB. Sea $\mathcal{D}$ el lugar geométrico de los puntos P tales que las rectas AA_P, BB_P, CC_P son concurrentes; se pide:

1. Caracterizar el lugar $\mathcal{D}$ como una curva algebraica de orden n y determinar n.
2. Demostrar que el lugar $\mathcal{D}$ tiene al circuncentro O como centro de simetría.
3. Demostrar que los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$ el incentro I, los ex-incentros I_a, I_b, I_c, el circuncentro O y el ortocentro H pertenecen al lugar $\mathcal{D}$.
4. Hallar una ecuación del lugar.
5. Demostrar que si P es un punto del lugar $\mathcal{D}$, entonces P^* el conjugado isogonal de P también es de la curva.
6. Demostrar que si P es un punto del lugar $\mathcal{D}$, todas las rectas PP^* pasan por un punto fijo que se determinará.
7. ¿Cómo cambia el lugar $\mathcal{D}$ en el caso de que $\widehat{ABC}$ sea un triángulo isósceles?

22 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, $\widehat{M_aM_bM_c}$ su triángulo medial y $\widehat{M'_aM'_bM'_c}$ el triángulo medial de éste. Si G es el baricentro de $\widehat{ABC}$, consideremos la homología h_A de centro en A, eje la paralela por G a BC y tal que M_a es el homólogo de M'_a. Análogamente se definen, cíclicamente, las homologías h_B y h_C.

Tomemos un punto arbitrario X en el plano y definimos los puntos $U = h_A(X)$, $Y = h_B(U)$, $Z = h_C(U)$, X' el punto de intersección de la recta GX con la paralela por U a BC, Y' el punto de intersección de la recta GY con la paralela por U a CA y Z' el punto de intersección de la recta GZ con la paralela por U a AB.

Establecer que los siete puntos U, X, Y, Z, X', Y' y Z' están en una misma cónica Γ_a.

Demostrar que para cualquier triángulo $\widehat{A'B'C'}$ tal que A' divide BC en la misma proporción que B' a CA y C' a AB, es perspectivo con $\widehat{X'Y'Z'}$ y su centro de perspectividad está en en la cónica Γ_a. / Applet CabriJava

23 Sean Δ el área de un triángulo, r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita y $\overline{\Delta}$ el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita, entonces $r\Delta = 2R\overline{\Delta}$.

24 Si los puntos que dividen cada lado de un triángulo en tres partes iguales se unen al correspondiente vértice opuesto, se forma un hexágono cuya área es la décima parte del área del triángulo.

Las tres diagonales son segmentos de las medianas del triángulo original.

El hexágono da lugar a dos triángulos de lados paralelos al original. / Applet CabriJava

25 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea D el pie de la altura desde A, P un punto arbitrario en AD, E el punto de intersección del lado AC con la recta BP y F el punto de intersección del lado AB con la recta CP, entonces las rectas DE y DF son simétricas respecto a AD.

Sean los puntos $G = PC \cap ED$ y $H = PB \cap FD$; y, construimos los puntos E' y F' donde cortan BG y CH a los lados AC y AB, respectivamente. Sean $P' = CF' \cap BE$, $P^* = EF' \cap E'F$. Probar que los puntos P' y P^* están sobre AD. ¿Es cierto para cualquier ceviana? / Applet CabriJava

26 Construir un triángulo dado un ángulo, el radio de la circunferencia inscrita y el perímetro. / Applet CabriJava

27 En un triángulo $\widehat{ABC}$ sean B_1 y C_1 los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ con CA y AB, respectivamente.

Sean V_a la intersección de B_1C_1 con BC y W_a la intersección de las bisectrices de los ángulos $\widehat{V_aC_1B}$ y $\widehat{V_aB_1C}$, demostrar que A, V_a y W_a están alineados. / Applet CabriJava

28 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto X sobre la recta BC,

(a) Inscribir una parábola en los lados del triángulo de manera que X sea el punto de tangencia con la recta BC.

(b) Demostrar que si Y, Z son los puntos de tangencia con los lados CA, AB y X', Y', Z' son los simétricos de X, Y, Z respecto de los puntos medios de BC, CA, AB, entonces las rectas AX', BY', CZ' son paralelas al eje de la parábola.

(c) Las rectas isogonales de AX', BY', CZ', es decir las rectas simétricas de estas rectas respecto de las bisectrices interiores AI, BI y CI, son concurrentes en el foco de la parábola. / Applet CabriJava

29 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto y D, E y F los puntos en que las cevianas de P cortan a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean los puntos $D' = AP \cap EF, E' = BP \cap FD$ y $F' = CP \cap DE$, $E_a = AE' \cap BC$, $F_a = AF' \cap BC$. Probar que:

$$\frac{CF_a}{F_aD} - \frac{CD}{DB} = \frac{BE_a}{E_aD} - \frac{BD}{DC} = 1.$$

/ Applet CabriJava

30 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto de su plano, M_a el punto medio de BC y X un punto del segmento MC.

(a) Hallar el foco de las posibles hipérbolas que pasan por A y P, cuya directriz es la recta BC y cuya excentricidad es la razón $BX : XC$.

(b) Determinar la posición del punto P para que el problema tenga dos soluciones, una o ninguna. / Applet CabriJava

31 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ de lados a, b y c, se traza la circunferencia inscrita; a ésta se le tira la tangente paralela al lado BC que determina un segundo triángulo $\widehat{AB_1C_1}$; con éste se reitera el trazado anterior, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de la sucesión infinita de los circunferencias inscritas.

32 Dada una circunferencia Γ y un punto A (exterior) hallar la polar recíproca del lugar geométrico de los centros de los circunferencias circunscritas a los infinitos triángulos autopolares de vértice A, con respecto a la homológica de la circunferencia Γ, en la homología de centro A, eje la polar de A (resp. a Γ) y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de A, no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto A respecto a la homológica de la circunferencia. / Applet CabriJava

33 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo rectángulo en A. Tracemos sobre el interior de la hipotenusa $BQ = BA$ y $CP = CA$. Demostrar que $PQ^2 = 2BP \cdot QC$.

34 Dadas tres circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3 de un haz con puntos base A y B, entonces la razón simple de los puntos en que las circunferencias cortan a una recta arbitraria, que pasa por uno de los puntos base, es constante.

35 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Sea N el punto de contacto de la circunferencia inscrita con AC. Sea MN el diámetro perpendicular a AC en la circunferencia inscrita. Sea L la intersección de BM con AC. Demostrar que $AN = LC$.

36 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar el punto en el lado BC de forma que la recta que une los pies de las perpendiculares a los otros lados de desde él sea paralela a BC. / Applet CabriJava

37 En un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ con $\hat{A} = 60°$ y $\hat{B} = 30°$, sean D, E y F los puntos de trisección cercanos a A, B y C sobre os lados AB, BC y CA, respectivamente. Extendemos CD, AE yBF hasta intersecar a la circunferencia circunscrita en P, Q y R. Demostrar que $\widehat{PQR}$ es un triángulo equilátero.

38 Dados $\widehat{ABC}$ un triángulo y $\widehat{MNP}$ un triángulo inscrito en $\widehat{ABC}$, con M en BC, N en CA y P en AB, construir un tercer triángulo $\widehat{A'B'C'}$ inscrito en $\widehat{MNP}$, con A' en NP, B' en PM, C' en MN, $A'B'$ paralelo a AB, $B'C'$ paralelo a BC, y $C'A'$ paralelo a CA ($\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ homotéticos). / Applet CabriJava

39 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, sean X, Y, Z los simétricos de los puntos P respecto a los lados del triángulo dado. Entonces las circunferencias circunscritas a $\widehat{XYC}$, $\widehat{YZA}$, $\widehat{ZXB}$ y $\widehat{ABC}$, se cortan en un punto común. / Applet CabriJava

40 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y un punto D sobre el lado BC.

Por D trazamos paralelas a AC y a AB que cortan a AB y CA en los puntos C_a y B_a, respectivamente. Por B_a y C_a se trazan paralelas al lado BC, cortando éstas a la ceviana AD, en los puntos B'_a y C'_a, respectivamente. Por B_a y C_a se trazan paralelas a la ceviana AD que cortan cada una al lado BC, en los puntos D_{ab} y D_{ac}, respectivamente.

a) Probar que las rectas $B_aC_a, D_{ab}C'_a$ y $D_{ac}B'_a$ concurren en un punto X.

b) Si $Y_a = DC_a \cap D_{ac}B'_a$ y $Z_a = DB_a \cap D_{ab}C'_a$, entonces los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XY_aZ_a}$ son homotéticos. Hallar el centro, X^*, y la razón de homotecia.

c) Lugar geométrico descrito por cada uno de los puntos X, Y_a y Z_a, cuando D varía sobre BC. / Applet CabriJava

41 En un triángulo $\widehat{ABC}$ cuyo ángulo en C es de $30°$, se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo. / Applet CabriJava

42 Si denominamos antisimediana al segmento conjugado isotómico de la simediana, es decir, el segmento cuyo pie es simétrico del pie de la simediana respecto del punto medio del lado, probar o refutar la siguiente proposición: "Existen triángulos no isósceles con dos antisimedianas de la misma longitud ".

43 Las alturas de un triángulo $\widehat{ABC}$ se cortan en un punto H. Determínese el valor del ángulo $\widehat{BCA}$ sabiendo que $AB = CH$.

44 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz interior y una mediana (cada una de las cevianas anteriores parten de un vértice distinto) son iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_a = v_b = m_c$. Demostrar que las longitudes de los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ cumplen la siguiente relación:

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

45 Construir sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo $\widehat{ABC}$, exteriormente, los cuadrados $BCDE, ACFG, BAHK$, y construir los paralelogramos $FCDQ, EBKP$. Demostrar que APQ es un triángulo rectángulo isósceles. / Applet CabriJava

46 Se tienen cuatro puntos A, B, C y D sobre una circunferencia Γ.

Sea K_a el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{BCD}$, K_b el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ACD}$, K_c el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ABD}$ y K_d el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ABC}$.

Sea σ la transformación proyectiva del plano, definida por: $\sigma(A) = K_a, \sigma(B) = K_b, \sigma(C) = K_c, \sigma(D) = K_d$. Determinar los puntos fijos y las rectas dobles en tal transformación.

47 Dos circunferencias que no se intersecan son tangentes a un ángulo $\widehat{XOY} = \alpha$. Construir un triángulo isósceles $\widehat{PQR}$ con el vértice P sobre OX y la base QR sobre OY, tal que cada uno de sus lados iguales sea tangente a cada una de las circunferencias.

48 Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos. / Applet CabriJava

49 Sea dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos respectivamente con O, I, H, G, K el circuncentro, el incentro, el ortocentro, el baricentro y el punto de Lemoine. Sean M el punto medio de AC y N el punto de intersección de la recta AB con la mediatriz de AC y sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{BNC}$. Probar que:

(1) el punto O pertenece a la circunferencia Γ

(2) el punto I pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $A = 60°$

(3) el punto H pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $(A = 60°)$ ó $(A = 120°)$ ó $(B = 90°)$ ó $(C = 90°)$

(4) el punto G pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 = 0$

(5) el punto K pertenece a la circunferencia Γ si y sólo si: $2a^2 = b^2 + c^2$.

50 ¿Serán necesariamente iguales dos triángulos acutángulos e isósceles, que tengan el mismo radio de la circunferencia inscrita y también iguales los dos pares de lados "laterales"? / Applet CabriJava

51 Se tienen tres circunferencias, Γ_1, Γ_2 y Γ_3; trazar los ejes radicales de otras circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con cada uno de las otras tres primeras circunferencias y demostrar que de las intersecciones resultan dos triángulos homológicos. Hallar el centro y el eje de homología. / Applet CabriJava

52 Hallar el ángulo $\widehat{ACB}$ (su valor numérico) sabiendo que $\widehat{ABC}$ es un triángulo isósceles con $AC = BC$ y que los segmentos AB, AD, DE, EF, FC son iguales, con D y F sobre BC, con el orden $CFDB$, y E sobre CA, con E interior. / Applet CabriJava

53 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar D sobre la recta BC, E sobre AC y F sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2, \quad BA^2 + AE^2 = BC^2 + CE^2, \quad CA^2 + AF^2 = CB^2 + BF^2.$$

Demostrar que las cevianas AD, BE y CF concurren.

54 Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ circunscrito a una cónica $\mathcal{C}$, t una tangente arbitraria a $\mathcal{C}$ y P_a el punto de contacto de BC con $\mathcal{C}$.

Consideremos las distancias $d_b = d(B, t), d_c = d(C, t), d_a = d(A, t)$ y $d_1 = d(P_a, t)$. Se cumple que:

$$\frac{d_b d_c}{d_a d_1}$$

es constante. / Applet CabriJava

55 Sea Γ la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$; por el vértice A se traza una recta que corta al lado BC en M. Consideremos las circunferencias Γ_1 y Γ_2 con centros en Ω_1 y Ω_2 y radios ρ_1 y ρ_2 que son tangentes internamente cada una de ellas a Γ, al lado BC y a recta AM. Si 2θ el ángulo $\widehat{AMC}$ y r e I son el radio y centro de la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$, probar que:

(1) La recta que une a Ω_1 y Ω_2 contiene también a I.

(2) El punto I divide al segmento en $\Omega_1\Omega_2$ en la razón $\operatorname{tag}^2\theta : 1$.

(3) $r = \rho_1 \cos^2\theta + \rho_2 \operatorname{sen}^2\theta$. / Applet CabriJava

56 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, hallar dos triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B.

Hallar los lados de los dos triángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{GHI}$ en función de a, b y c, lados de $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

57 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo no equilátero, $a = BC, b = CA$ y $c = AB$. Hallar el lugar geométrico $\mathcal{E}$ de los puntos M tales que $(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$. Demostrar que $\mathcal{E}$ contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de $\widehat{ABC}$. Deducir un tercer punto de este conjunto.

58 Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.

59 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo de altura AA'. Demostrar que existe un punto P sobre AA' tal que las cevianas BB' y CC' que pasan por P cumplen $AB' = AC'$.

60 Construir un triángulo ABC del que se conocen su perímetro $(2s)$, la altura (h_a) desde el vértice A y tal que la altura (h_b) desde el vértice B sea máxima.

61 ¿Cuál es la envolvente de las rectas que bisecan a un triángulo?

62 Sean ABC un triángulo, ABF el triángulo equilátero hacia fuera de ABC y BCG el triángulo equilátero hacia dentro de ABC.

G está en la recta AF si y sólo si $\hat{A} = 60°$.

63 Dados un triángulo ABC, un punto U y una cónica inscrita (C). Las otras tangentes desde los vértices del triángulo ceviano DEF de U cortan a las rectas EF, FD y DE en puntos alineados.

64 Construir un triángulo ABC conociendo la diferencia de los lados adyacentes al vértice A y los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita relativa al vértice A.

65 Construir un triángulo ABC conociendo la suma de los lados adyacentes al vértice A y los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita relativa al vértice A.

66 En un triángulo ABC cuyas medianas BM y CN son perpendiculares, cada uno de sus tres lados son también el lado de un cuadrado exterior al triángulo. Estos cuadrados están coloreados respectivamente, de azul, rosa y amarillo, dependiendo de si su base es BC, CA o AB. ¿Cuántos cuadrados azules se necesitan para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos?

67 Construir un triángulo ABC conocidos r_b, r_c y $k = b - c$, siendo r_b y r_c los radios de las circunferencias exinscritas correspondientes a los ángulos B y C, respectivamente.

68 Construir un triángulo ABC conocidos r_b, r_c y $k = b + c$, siendo r_b y r_c los radios de las circunferencias exinscritas correspondientes a los ángulos B y C, respectivamente.

69 Sea ABC un triángulo, la circunferencia inscrita es tangente a los lados AB y AC en los puntos E y F, respectivamente. La recta EF corta a las bisectrices interiores en los vértices B y C en A_b y A_c, respectivamente.

Los puntos A_b y A_c están sobre la circunferencia de diámetro BC y la medida del arco A_bA_c es igual a la medida del ángulo en el vértice A.