Sobre triángulos inscritos o circunscritos y semejantes a uno triángulo dado

Angel Montesdeoca

Se toma un triángulo $\widehat{ABC}$ fijo y se analiza el lugar geométrico que describe la imagen de un punto mediante las semejanzas que transforman $\widehat{ABC}$ en los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ inscritos o circunscritos. También se tratan las envolventes de sus circunferencias circunscritas e inscritas a los triángulos $\widehat{A'B'C'}$.

⊛ *Lugares geométricos asociados a triángulos variables inscritos y semejantes a un triángulo dado*

Vamos a establecer que:

> Si $\widehat{A'B'C'}$ es un triángulo variable inscrito en $\widehat{ABC}$ y ambos semejantes, el lugar geométrico que describe la imagen de un punto mediante las semejanzas que transforman el triángulo $\widehat{ABC}$ en cada uno de los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ es una recta.

Tomemos un punto $A'(0:1:t)$ sobre el lado BC de un triángulo dado $\widehat{ABC}$, que tomamos como referencia para un sistema de coordenadas baricéntricas.

Sea $B'(u:0:1)$ y giramos [(1)] la recta $A'B'$, alrededor de A', un ángulo de amplitud A, obteniéndose la recta de ecuación:

$$\left(b^2ut^2+(-b^2+(b^2+c^2-a^2)u)t+a^2-b^2+c^2u\right)x+$$
$$\left((a^2-c^2)ut^2-(a^2+c^2u)t\right)y+\left((c^2-a^2)ut+a^2+c^2u\right)z=0.$$

Giramos la recta $A'B'$, alrededor de B', un ángulo de amplitud $-B$, obteniéndose la recta:

$$\left(b^2ut-b^2+c^2-c^2u\right)x+\left((a^2+(a^2+b^2)u)ut-a^2-(a^2-b^2+c^2)u-c^2u^2\right)y$$

(1) Usando las expresiones de giros en coordenadas baricentrias que aparecen cualquiera de las referencias siguientes:
Jean-Pierre Ehrmann. http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/11730 "The first line of the matrix M of the rotation is

M[1,1] = u+(v+w)cos(alpha)+(v cotB-w cotC)sin(alpha)
M[1,2] = u(1-cos(alpha))-(u cotB+w(cotB+cotC))sin(alpha)
M[1,3] = u(1-cos(alpha))+(u cotC+v(cotB+cotC))sin(alpha).

Cyclically,we get the other lines".
Angel Montesdeoca.- Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas.
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf §13.3

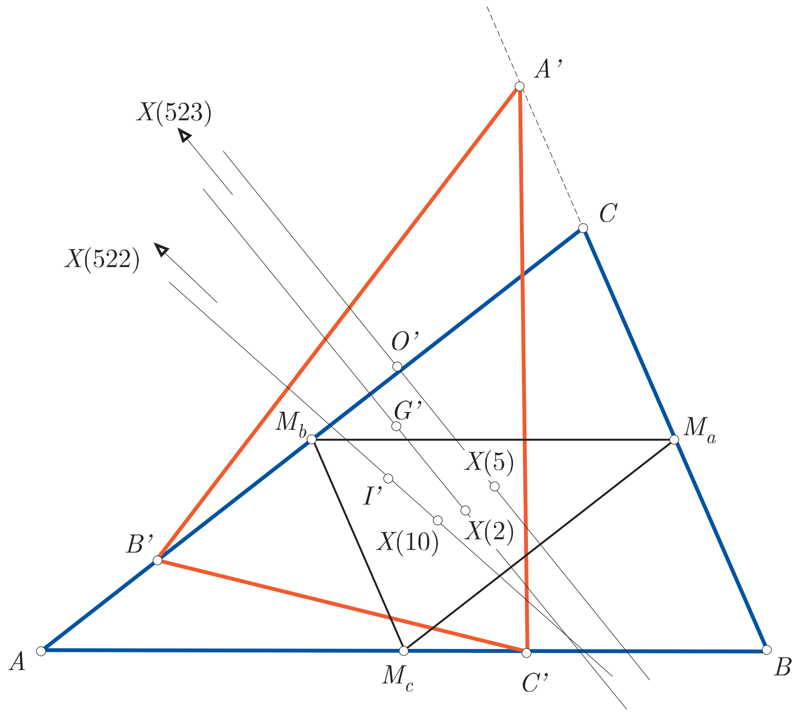
$$-\left(b^2u^2t + (c^2 - b^2 + c^2u)u\right) z = 0.$$

Para que estas dos rectas se corten en el lado AC se ha de verificar que (única solución real):

$$u = \frac{c^2t + b^2 - a^2}{(b^2 - a^2)t + c^2}.$$

Y el triángulo inscrito $\widehat{A'B'C'}$ en $\widehat{ABC}$ y semejante a éste, con un vértice en $A'(0 : 1 : t)$, tiene los otros vértices en:

$$B'\left(c^2t + b^2 - a^2 : 0 : (b^2 - a^2)t + c^2\right), \quad C'\left(c^2 - a^2)t + b^2 : b^2t + c^2 - a^2 : 0\right).$$



Applet-Cabri

Las coordenadas de un punto, respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, y la de su imagen en la semejanza, respecto al triángulo $\widehat{A'B'C'}$, son las mismas. La relación entre las coordenadas baricéntricas de un punto $(x' : y' : z')$, respecto a $\widehat{A'B'C'}$, y las $(x : y : z)$ de dicho punto respecto a $\widehat{ABC}$ son:

$$\begin{aligned} x &= (a^2 - b^2 - c^2t)y' + (-b^2 + a^2t - c^2t)z' \\ y &= (a^2 - b^2 - c^2)x' + (a^2 - c^2 - b^2t)z' \\ z &= (a^2 - b^2 - c^2)tx' + (-c^2 + a^2t - b^2t)y' \end{aligned} \tag{1}$$

Así, si $(x' : y' : z')$ son las coordenadas de un punto respecto a cada $\widehat{A'B'C'}$, tal punto recorre la recta de ecuaciones paramétricas (1), respecto a $\widehat{ABC}$.

Eliminando t, se obtiene la ecuación implícita de tal recta:

$$\Big(a^2(x'^2+x'y'+x'z'+y'z')-b^2x'(x'+y')-c^2x'(x'+z')\Big)x-$$
$$\Big(a^2y'(x'+y')-b^2(x'y'+y'^2+x'z'+y'z')+c^2y'(y'+z')\Big)y+$$
$$\Big(a^2z'(x'+z')+b^2z'(y'+z')-c^2(z'^2+x'y'+x'z'+y'z')\Big)z=0. \tag{2}$$

◪

Dos puntos particulares de esta recta, que se obtienen para $t=1$ y $t=-1$, son los que corresponden al punto del triángulo medial y a su punto del infinito, respectivamente:

$$(y'+z', x'+z', x'+y'),$$

$$\big(a^2(z'-y')+(b^2-c^2)(y'+z') : b^2(x'-z')+(c^2-a^2)(z'+x') : c^2(y'-x')+(a^2-b^2)(x'+y')\big)\,.$$

Este último, en notación de Conway ($2S_A=b^2+c^2-a^2$, ...), se pone de esta otra forma:

$$(S_By'-S_Cz' : S_Cz'-S_Ax' : S_Ax'-S_By')\,.$$

<u>Algunos casos particulares</u> relativos a centros[(2)] de un triángulo:

• La recta lugar geométrico de los baricentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es:

$$(2a^2-b^2-c^2)x+(2b^2-c^2-a^2)y+(2c^2-a^2-b^2)z=0,$$

que es la tripolar del centro X_{671}; recta que pasa por el baricentro y tiene la dirección del punto del infinito X_{523}, conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert; además contiene al punto X_{1649}, que corresponde al baricentro de $\widehat{A'B'C'}$ con:

$$A'\big(0 : a^6-b^6-c^6-5a^4b^2-3b^4c^2+5a^2b^4+a^4c^2+a^2b^2c^2-a^2c^4+3b^2c^4 :$$

---

(2) Un centro del triángulo $\widehat{ABC}$ es un punto cuyas coordenadas baricéntricas están definidas mediante una función de las variables a, b y c (que son las longitudes de los lados), de modo que se expresen en la forma:

$$\Big(f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)\Big),$$

donde f es homogénea en a, b, c, es decir, existe un número ρ real, no negativo, tal que

$$f(\rho a, \rho b, \rho c) = t^\rho f(a,b,c), \text{ para todo } (a,b,c) \text{ en el dominio de } f;$$

y simétrica en b y c, es decir: $\quad f(a,b,c)=f(a,c,b)$.

Por tanto, las coordenadas del mismo centro en el triángulo $\widehat{A'B'C'}$, semejante a $\widehat{ABC}$, (de lados $a'=\rho_t a$, $b'=\rho_t b$, $c'=\rho_t c$), tienen las mismas coordenadas baricéntricas, respecto a éste:

$$\Big(f(\rho_t a, \rho_t b, \rho_t c) : f(\rho_t b, \rho_t c, \rho_t a) : f(\rho_t c, \rho_t a, \rho_t b)\Big) = \Big(f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)\Big),$$

siendo ρ_t la razón de semejanza entre ambos triángulos.

En la página web mantenida por Clark Kimberling, Encyclopedia of Triangle Centers (ETC):
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html,
se encuentra recopilados actualmente 3597 centros, que son denotados por X_n, siendo n el número de orden.

$$a^6 - b^6 - c^6 + a^4b^2 - 5a^4c^2 - a^2b^4 + a^2b^2c^2 + 5a^2c^4 + 3b^4c^2 - 3b^2c^4\big).$$

• La recta lugar geométrico de los incentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es la tripolar del isotómico conjugado del centro X_{3218}. Tal recta sólo contiene a los centros (que figuran actualmente en ETC) X_{10} (incentro del triángulo medial) y al punto del infinito X_{522}, según la información dada en ETC.

• La recta lugar geométrico de los circuncentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es la tripolar del centro X_{94}, que contiene a X_5 (circuncentro del triángulo medial) y al X_{523} (conjugado isogonal de la parábola de Kiepert, X_{110}).

• El lugar geométrico de los ortocentros [(3)] de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es el circuncentro de $\widehat{ABC}$.

• La recta lugar geométrico de los simedianos de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es la tripolar del isotómico conjugado del centro X_{23}, determinada por los centros X_{141} y X_{525}.

• La recta lugar geométrico de los puntos de Gergonne de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es la recta que pasa por X_9 (punto de Gergonne del triángulo medial) y por el conjugado isogonal (de coordenadas [(4)] $(a(b-c)(b+c-a)^2 : \cdots : \cdots))$ del X_{934}.

• La recta lugar geométrico de los puntos de Nagel de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ e inscritos en él, es la tripolar del centro X_{88}, determinada por los centros X_1 y X_{513}.

• Algunos casos más: Recta lugar geométrico del punto $P \mapsto$ es la tripolar de Q ($1/X_n$ denota el conjugado isotómico de X_n).
$X_{23} \mapsto X_{76}$, $X_{67} \mapsto X_{23}$, $X_{69} \mapsto X_{111}$, $X_{76} \mapsto X_{694}$, $X_{80} \mapsto X_{3218}$, $X_{98} \mapsto X_{297}$, $X_{99} \mapsto X_{2501}$,
$X_{100} \mapsto 1/X_{1332}$, $X_{101} \mapsto 1/X_{1331}$, $X_{103} \mapsto 1/X_{1815}$, $X_{105} \mapsto 1/X_{1814}$, $X_{106} \mapsto 1/X_{1797}$,
$X_{107} \mapsto X_{525}$, $X_{108} \mapsto 1/X_{651}$, $X_{109} \mapsto 1/X_{1813}$, $X_{111} \mapsto 1/X_{895}$, $X_{112} \mapsto X_{850}$,
$X_{115} \mapsto 1/X_{3448}$, $X_{468} \mapsto 1/X_{2996}$, ...

---

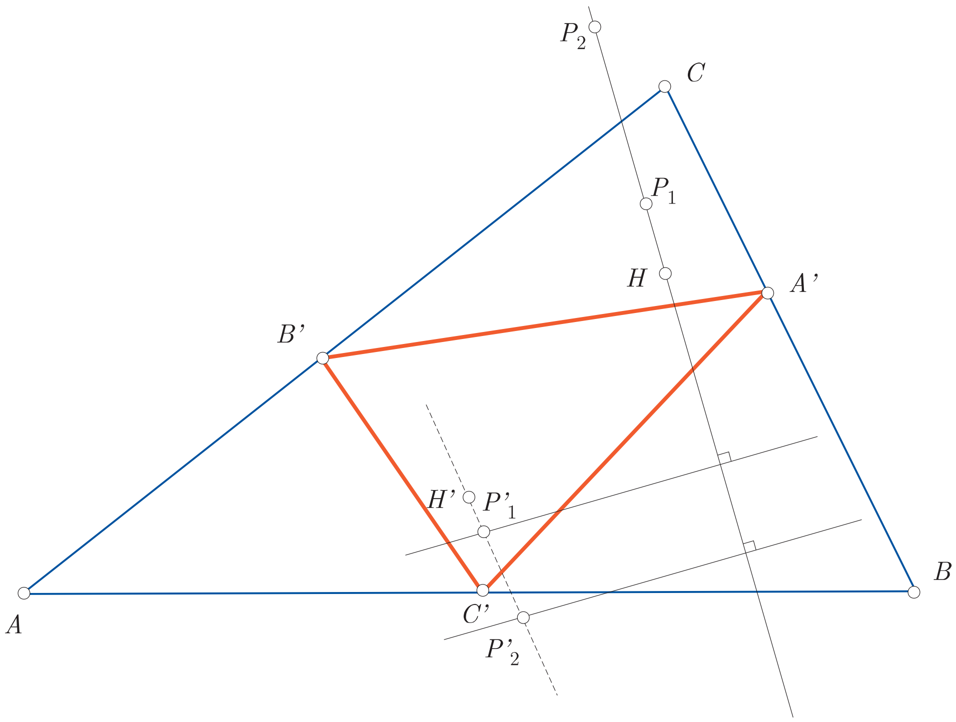
(3) El único centro para el cual la recta lugar geométrico se reduce a un punto es el ortocentro, y el lugar es el circuncentro. El lugar (2) se reduce a un sólo punto cuando los coeficientes de t, en cada una de las componentes, son iguales, es decir:

$$a^2y' - b^2y' - b^2z' = -c^2y' + a^2z' - c^2z',\ a^2xx - b^2x' - c^2x' + a^2z' - c^2z = -b^2z',\ -c^2yy = a^2xx - b^2x' - c^2x' + a^2y' - b^2y'.$$

La única solución es el ortocentro: $\big(a^4 - (b^2-c^2)^2 : b^4 - (c^2-a^2)^2 : c^4 - (a^2-b^2)^2\big)$.

(4) Este centro no figura actualmente en la Enciclopedia de Kimberling.

> Si las rectas lugares geométricos que describen dos puntos con las mismas coordenadas, $P_1(u_1 : v_1 : w_1)$ y $P_2(u_2 : v_2 : w_2)$, respecto a los triángulos variables inscritos en $\widehat{ABC}$ y semejantes a éste, son paralelas, entonces el ortocentro H está en la recta P_1P_2 y ésta es perpendicular a ellas.
>
> Todos los puntos, al considerarlos con las mismas coordenadas respecto a los triángulos inscritos y semejantes, de una recta ℓ que pasa por el ortocentro generan rectas que son perpendiculares a ℓ.



Las rectas recorridas por un par de puntos P_1 y P_2, que tienen, cada uno de ellos, las mismas coordenadas $(u_i : v_i : w_i)$, $i = 1, 2$, respecto a $\widehat{ABC}$ y a todos los triángulos semejantes a éste e inscritos, tienen puntos del infinito de coordenadas, respectivamente para $i = 1, 2$:

$$(S_Bv_i - S_Cw_i : S_Cw_i - S_Au_i : S_Au_i - S_Bv_i)\,.$$

Si estos dos puntos coinciden:

$$\frac{v_1S_B - w_1S_C}{v_2S_B - w_2S_C} = \frac{-u_1S_A + w_1S_C}{-u_2S_A + w_2S_C} = \frac{u_1S_A - v_1S_B}{u_2S_A - w_2S_B}.$$

De donde se obtiene la relación:

$$(v_1S_B - w_1S_C)(-u_2S_A + w_2S_C) - (v_2S_B - w_2S_C)(-u_1S_A + w_3S_C) =$$

$$S_BS_C(v_1w_2 - w_1v_2) - S_CS_A(u_1w_2 - w_1u_2) + S_AS_B(u_1v_2 - v_1u_2) = 0,$$

que coincide con el valor del determinante formado por las coordenadas del ortocentro $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$ y la de los puntos $(u_1 : v_1 : w_1)$ y $(u_2 : v_2 : w_2)$. Con lo que H está en la recta determinada por los dos últimos puntos.

El punto del infinito $(S_Bv_1 - S_Cw_1 : S_Cw_1 - S_Au_1 : S_Au_1 - S_Bv_1)$ y el de la recta P_1P_2, $(u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2)$, determinan dos direcciones perpendiculares, pues:

$$S_A(u_1 - u_2)(S_Bv_1 - S_Cw_1) + S_B(v_1 - v_2)(S_Cw_1 - S_Au_1) + S_C(w_1 - w_2)(S_Au_1 - S_Bv_1) = 0.$$

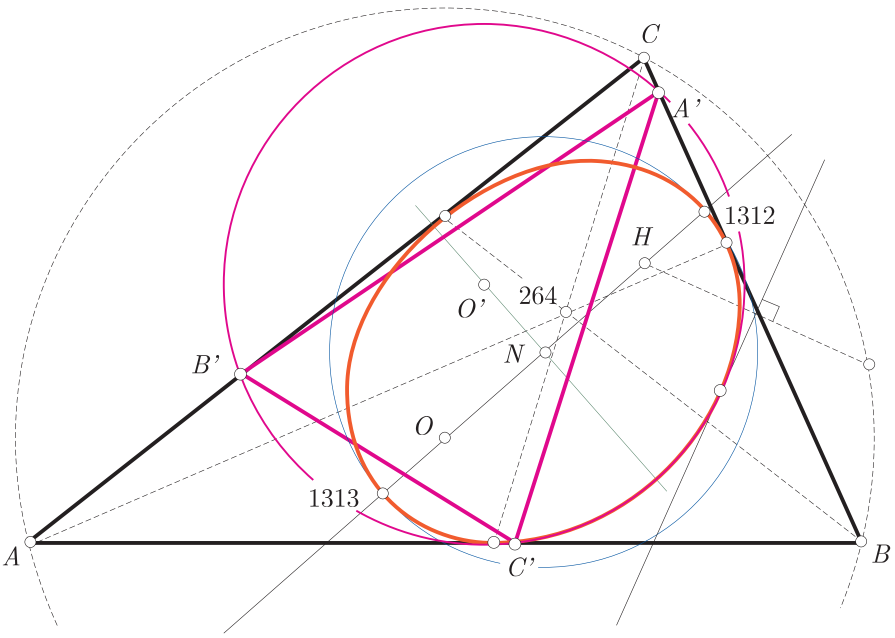
Sea ahora $(u : v : w)$ un punto situado en una recta ℓ que pasa por H; un punto genérico de esta recta tiene por coordenadas:

$$\left(S^2u\lambda + S_BS_C(u + v + w)\mu : S^2v\lambda + S_CS_A(u + v + w)\mu : S^2w\lambda + S_AS_B(u + v + w)\mu\right).$$

La recta que recorre el punto que tiene estas mismas coordenadas respecto a todos los triángulos inscritos y semejantes a $\widehat{ABC}$, tiene como punto del infinito el mismo que el de la recta generada por los puntos que tienen las coordenadas $(u : v : w)$ respecto a todos los triángulos inscritos y semejantes, esto es:

$$(S_Bv - S_Cw : S_Cw - S_Au : S_Au - S_Bv).$$

Si $\widehat{A'B'C'}$ es un triángulo variable inscrito en $\widehat{ABC}$ y ambos semejantes, la envolvente de las circunferencias circunscritas a $\widehat{A'B'C'}$ es la cónica de MacBeath.



Applet-Cabri

La ecuación de la circunferencia circunscrita a $\widehat{A'B'C'}$ es:

$$2S_A(1+t)^2(a^2yz+b^2xz+c^2xy)+(x+y+z)\Big($$

$$((a^2-c^2)c^2+2(a^2S_A-b^2c^2)t+(a^2-b^2)b^2t^2)x+(-2b^2S_Bt+2(a^2-c^2)S_Bt^2)y+2(a^2-b^2-c^2t)S_Cz\Big)=0.$$

Para determinar la envolvente de estas circunferencias, se ha de eliminar el parámetro t entre esta ecuación y la siguiente:

$$2S_A(1+t)(a^2yz+b^2xz+c^2xy)+$$
$$(x+y+z)(((a^2S_A-b^2c^2)+(a^2-b^2)b^2t)x+(-b^2S_B+2(a^2-c^2)S_Bt)y-c^2S_Cz)=0.$$

Obteniéndose la cónica inscrita en $\widehat{ABC}$ de focos en el circuncentro y ortocentro:

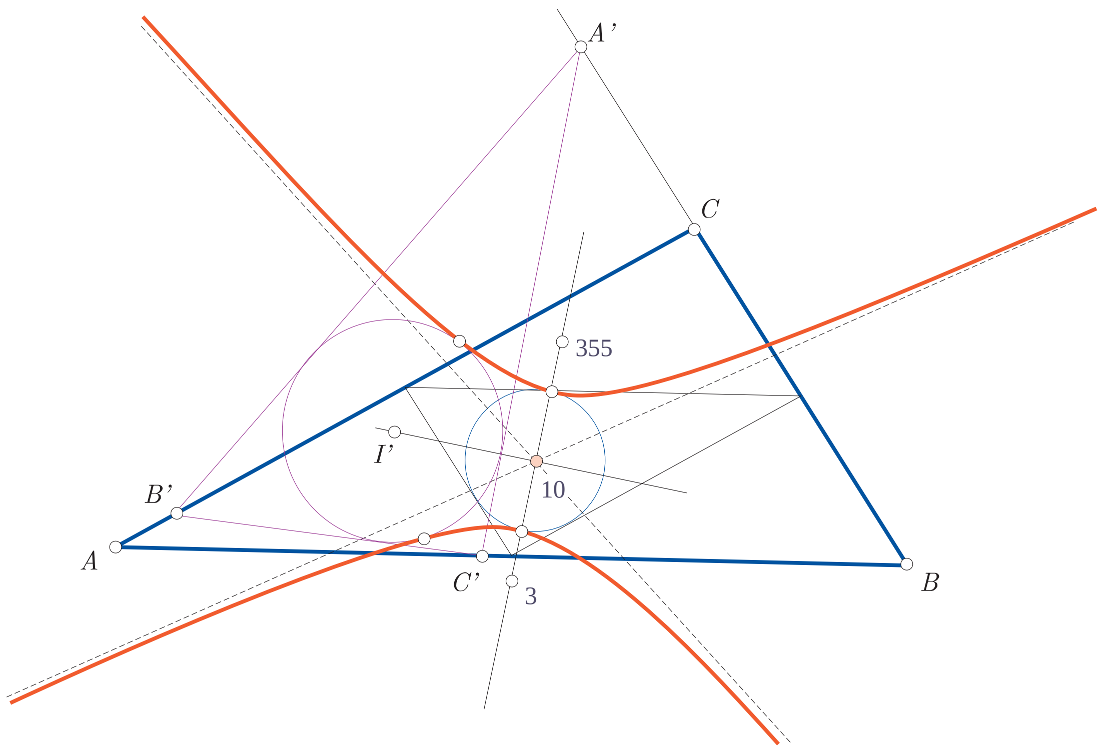
$$a^4S_A^2x^2+b^4S_B^2y^2+c^4S_C^2z^2-2b^2c^2S_BS_Cyz-2a^2c^2S_AS_Czx-2a^2b^2S_AS_Bxy=0.$$

Esta cónica (conocida como cónica de MacBeath) es también el lugar geométrico de las mediatrices de los segmentos de extremos en el ortocentro y en un punto variable de la circunferencia circunscrita. ◪

> Si $\widehat{A'B'C'}$ es un triángulo variable inscrito en $\widehat{ABC}$ y ambos semejantes, la envolvente de las circunferencias inscritas a $\widehat{A'B'C'}$ es la cónica de focos en el circuncentro (X_3) y en el centro de Fuhrmann (X_{355}) y su circunferencia principal es la circunferencia inscrita al triángulo medial.

La ecuación de la circunferencia inscrita a $\widehat{A'B'C'}$, en coordenadas baricéntricas respecto a este triángulo, es ($s=(a+b+c)/2$ el semiperímetro de $\widehat{ABC}$):

$$a^2y'z'+b^2z'x'+c^2x'y'+(x'+y'+z')((s-a)^2x'+(s-b)y'+(s-c)z')=0.$$



Applet-Cabri

Usando las transformaciones (1) se obtiene la ecuación de esta circunferencia respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, cuya envolvente es la cónica de ecuación:

$$\underset{\substack{abc\\xyz}}{\mathfrak{S}}\Big(4(s+a)(s-c)(s-b)(a^2-4a(s-a)-(b-c)^2)x^2+$$

$$2(s-a)(7a^4-2a^3(b+c)-4a^2(b-c)^2+2a(b-c)^2(b+c)-(b-c)^2(3b+c)(b+3c))yz\Big)=0,$$

que tiene focos en el circuncentro (X_3) y en el centro de de Fuhrmann (X_{355}), su centro es el centro de Spieker (X_{10}) y su circunferencia principal [(5)] es la circunferencia inscrita al triángulo medial.

El perspector de esta cónica (centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y el formado por las polares de los vértices de éste) es [(6)]:

$$\left(\frac{s-a}{2a(s-a)+S_A}:\frac{s-b}{2b(s-b)+S_B}:\frac{s-c}{2c(s-c)+S_C}\right)=\left(\frac{b+c-a}{3a^2-2a(b+c)-b^2-c^2}:\cdots:\cdots\right).$$

$\triangle$
∇

[(5)] La circunferencia principal de una elipse o hipérbola es la circunferencia lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de un foco sobre las tangentes; su centro es el centro de la cónica y es tangente a ella en los vértices del eje focal.

[(6)] Este centro de un triángulo presenta un hecho curioso, pues si lo evaluamos en el triángulo de lados $a=6, b=9$ y $c=13$, que toma Kimberling en su Enciclopedia (ETC), resulta ser el vértice C.

⊛ ***Lugares geométricos asociados a triángulos variables circunscritos y semejantes en un triángulo dado***

Si $\widehat{A'B'C'}$ es un triángulo semejante a $\widehat{ABC}$ y circunscrito a éste, sus lados $A'C'$ y $A'B'$ pasan, respectivamente, por B y C, y como su ángulo en A' ha de ser igual al de $\widehat{ABC}$ en A, A' está en la circunferencia que pasa por B y C y por el simétrico de A respecto a BC, de ecuación:

$$\Gamma_a: \; a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2S_A(x+y+z)x = 0.$$

Así mismo, los vértices B' y C' han de estar, respectivamente, en las circunferencias:

$$\Gamma_b: \; a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2S_B(x+y+z)y = 0, \quad \Gamma_c: \; a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2S_C(x+y+z)z = 0.$$

Para determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ circunscrito y semejante a $\widehat{ABC}$, tomemos una recta que pasa por A, que queda determinada por uno de sus puntos $P(a^2t(t-1) : b^2(1-t) : c^2t)$ sobre la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$.

La recta AP vuelve a cortar a la circunferencia Γ_b en el punto:

$$B'\left((1-t)(2b^2S_B(t-1) + c^2(a^2-2S_B)t) : b^2(t-1)(c^2 + 2S_B(t-1)) : c^2t(2S_B(1-t) - c^2)\right).$$

Y AP vuelve a corta a la circunferencia Γ_c en el punto:

$$C'\left(t(a^2b^2(t-1) + 2S_C(b^2(1-t) + c^2t)) : b^2(1-t)(b^2 - 2S_Ct) : c^2t(b^2 - 2S_Ct)\right).$$

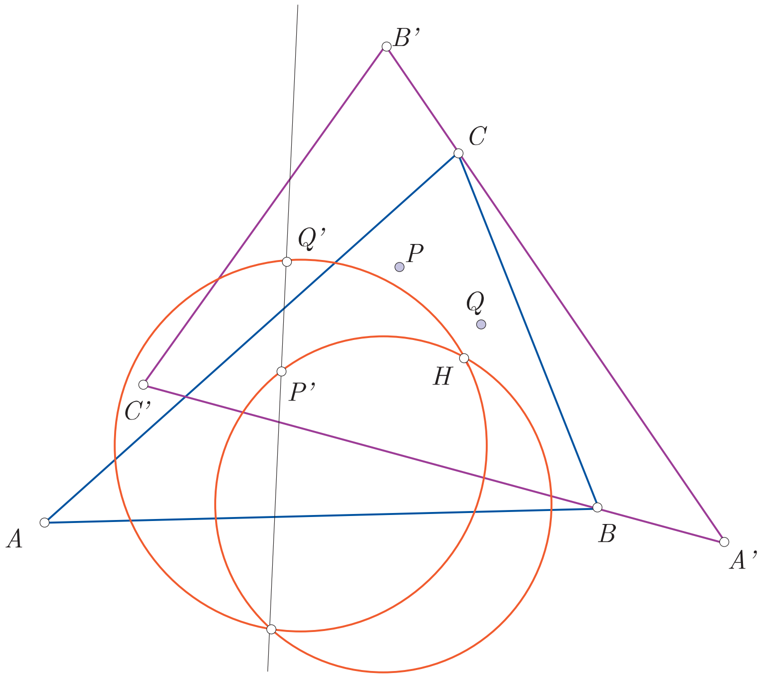
El vértice A' es el punto de intersección de las rectas $B'C$ y $C'B$:

$$A'\big((2b^2S_B(t-1) + c^2(a^2-2S_B)t)(a^2b^2(t-1) + 2S_C(b^2(1-t) + c^2t)) :$$
$$b^2(2S_B(1-t) - c^2)(a^2b^2(t-1) + 2S_C(b^2(1-t) + c^2t)) : c^2(2b^2S_B(t-1) + c^2(a^2-2S_B)t)(b^2 - 2S_Ct)\big).$$

La relación entre las coordenadas baricéntricas de un punto $(x' : y' : z')$, respecto a $\widehat{A'B'C'}$, y las $(x : y : z)$ de dicho punto respecto a $\widehat{ABC}$ son:

$$\begin{aligned}
x &= (b^2(b^2-c^2) + (a^2c^2 - (b^2-c^2)^2)t)(2b^2S_B - (a^2b^2 - (b^2-c^2)^2)t)x' + \\
&\quad a^2b^2(t-1)(-2b^2S_B + (a^2b^2 - (b^2-c^2)^2)t)y' + \\
&\quad a^2c^2t(b^2(b^2-c^2) + (a^2c^2 - (b^2-c^2)^2)t)z' \\
y &= b^2(-b^2(b^2-c^2) - a^2c^2t + (b^2-c^2)^2t)(a^2 - b^2 - 2S_Bt)x' + \\
&\quad a^2b^4(t-1)(a^2 - b^2 - 2S_Bt)y' + a^2b^2c^2(t-1)(-b^2 + 2S_Ct)z' \\
z &= c^2(2b^2S_B - a^2b^2t + (b^2-c^2)^2t)(b^2 - 2S_Ct)x' + \\
&\quad a^2b^2c^2t(-a^2 + b^2 + 2S_Bt)y' + a^2c^4t(b^2 - 2S_Ct)z'
\end{aligned} \tag{3}$$

Si $\widehat{A'B'C'}$ es un triángulo variable circunscrito en $\widehat{ABC}$ y ambos semejantes, el lugar geométrico que describe un punto de $\widehat{A'B'C'}$, con las mismas coordenadas baricéntricas en cada uno de ellos, es una circunferencia, que pasa por el ortocentro.



Applet-Cabri

Un punto que tiene las mismas coordenadas $(u : v : w)$ respecto a los triángulos $\widehat{A'B'C'}$, tiene coordenadas, respecto a $\widehat{ABC}$, dadas por (3), que son las ecuaciones paramétricas de una cónica, cuya ecuación implícita [(7)] es:

$$2S_A ux^2 + 2S_B vy^2 + 2S_C wz^2$$
$$-(a^2u + (b^2 - c^2)(v - w))yz - (b^2v + (c^2 - a^2)(w - u))zx - (c^2w + (a^2 - b^2)(u - v))xy = 0.$$

Se trata de una circunferencia[(8)] cuya ecuación se puede poner en la forma:

---

(7) Yiu, Paul.- Introduction to Geometry of the Triangle, §10.4, pag.117 http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps.

(8) The conic $fx^2 + gy^2 + hz^2 + 2pyz + 2qzx + 2rxy = 0$ with matrix $\begin{pmatrix} f & r & q \\ r & g & p \\ q & p & h \end{pmatrix}$ is a circle when

$$\frac{g + h - 2p}{a^2} = \frac{h + f - 2q}{b^2} = \frac{f + g - 2r}{c^2} = k.$$

Nikolaos Dergiades, http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/19716.

La ecuación de la circunferencia es:

$$k(a^2yz + b^2zx + c^2xy) - (x + y + z)(fx + gy + hz) = 0.$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2\frac{x+y+z}{u+v+w}(S_Aux + S_Bvy + S_Cwz) = 0.$$

Esta circunferencia[9] contiene al ortocentro $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$. ◪

CASOS PARTICULARES

• El lugar geométrico de los incentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ y circunscritos a él, es la circunferencia de Fuhrmann, de diámetro el segmento de extremos en el ortocentro y el punto de Nagel.

• El lugar geométrico de los baricentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ y circunscritos a él, es la circunferencia ortobaricéntrica, de diámetro GH.

• El lugar geométrico de los circuncentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ y circunscritos a él, se reduce al ortocentro.

• El lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ y circunscritos a él, es la circunferencia de diámetro el segmento de extremos en el ortocentro y el punto de De Longschamps.

• El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ y circunscritos a él, es la circunferencia de diámetro OH.

• El lugar geométrico de los simedianos de los triángulos semejantes a $\widehat{ABC}$ y circunscritos a él, es la circunferencia de diámetro el segmento de extremos en el ortocentro y en su conjugado isotómico.

> Sean P' y Q' las imágenes de dos puntos P yQ, mediante las semejanzas que transforman el triángulo $\widehat{ABC}$ en cada uno de los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ circunscritos, entonces la recta $P'Q'$ pasa por el otro punto (distinto del ortocentro) de las circunferencias generadas por P' y Q'.

Si $P(u : v : w)$ y $Q(p : q : r)$, las coordenadas de los puntos P' y Q' están dadas las relaciones (3) y la recta que éstos determinan es:

$$(b^2(t-1) - c^2t)(b^2(pv-uq) + c^2(pw-ur)) + a^2(b^2(1-t)(pv-uq) + c^2(pw-ur)t)x+$$
$$(b^2-c^2)(b^2(t-1) - c^2t)(pv-uq) + a^2(b^2(1-t)(pv-uq) + c^2(vr-qw)t)y+$$
$$-b^4(t-1)(pw-ur) + c^2(a^2-c^2)(pw-ur)t + b^2(c^2(2t-1)(pw-ur) - a^2(t-1)(qw-vr))z = 0.$$

Para que esta rectas pasen por un mismo punto, esta ecuación, considerada como un polinomio en t, ha de ser idénticamente nula. Si igualamos a cero el término independiente y el coeficiente de t, y resolviendo las ecuaciones que resultan en las variables x, y, z se obtiene el punto:

$$\big((b^2-c^2)(vr-qw)(p(v+w) - u(q+r)) - a^2(p^2vw + u^2qr - up(qw+vr) + (vr-qw)^2) : \cdots : \cdots\big).$$

En este caso, $(g+h-2p)/a^2 = (h+f-2q)/b^2 = (f+g-2r)/c^2 = u+v+w$.

[9] A central circle with circle function (barycentric) a^2S_Au, if $(u : v : w)$ is a triangle center.
http://mathworld.wolfram.com/CentralCircle.html

Obteniéndose las dos componentes restantes, por permutación cíclica de la primera. Este punto pertenece a las circunferencias que P' y Q' generan:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2\frac{x+y+z}{u+v+w}(S_Aux + S_Bvy + S_Cwz) = 0,$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2\frac{x+y+z}{p+q+r}(S_Apx + S_Bqy + S_Crz) = 0.$$

$\blacksquare$

Nota:

Sea P$(u : v : w)$ y si Q está en la recta GP, las circunferencias que generan las imágenes P' y Q' de P y Q se cortan (además de en el ortocentro) en el punto, que no depende del punto Q:

$$\big((b^2-c^2)(2u-v-w)(v-w) + a^2(u^2-u(v+w)+(v-w)^2+vw) : (c^2-a^2)(2v-w-u)(w-u) + b^2(v^2-v(w+$$

En particular, si P y Q están en la recta de Euler, las circunferencias que generan P' y Q' tienen sus centros en dicha recta y son tangentes en el ortocentro.

> Si $\widehat{A'B'C'}$ es un triángulo variable circunscrito en $\widehat{ABC}$ y ambos semejantes, la envolvente de las circunferencias inscritas a $\widehat{A'B'C'}$ es una cuártica circunscrita a $\widehat{ABC}$, con un punto doble en el ortocentro.

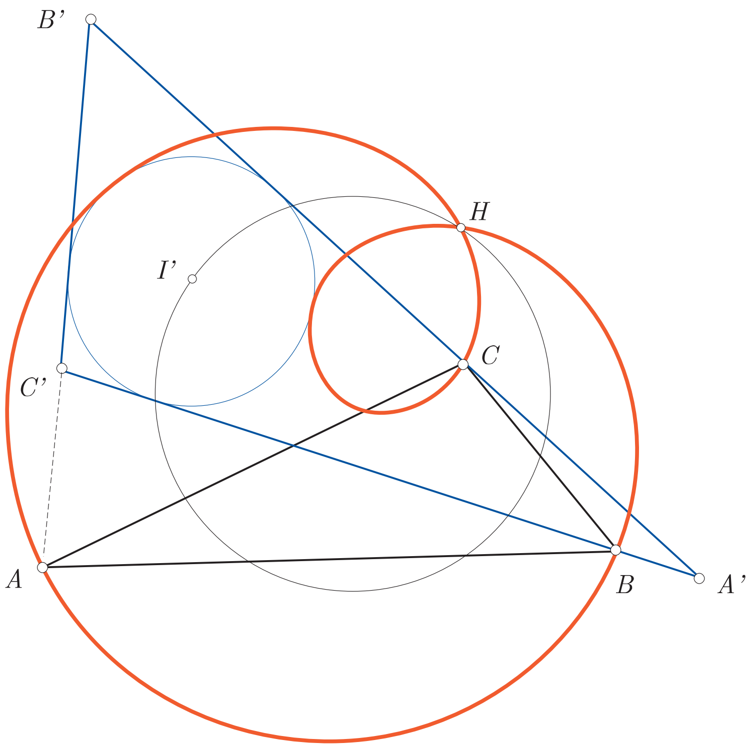
La ecuación de la circunferencia inscrita a $\widehat{A'B'C'}$, en coordenadas baricéntricas respecto a este triángulo, es ($s = (a+b+c)/2$ el semiperímetro de $\widehat{ABC}$):

$$a^2y'z' + b^2z'x' + c^2x'y' + (x'+y'+z')((s-a)^2x' + (s-b)y' + (s-c)z') = 0.$$

Usando las transformaciones (3) se obtiene la ecuación de esta circunferencia respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, cuya envolvente es la cuártica de ecuación:

$$\underset{\substack{abc\\xyz}}{\mathfrak{S}} \Big((3a^5 - a^4(b+c) - 4a^3(b^2+c^2) - 2a^2(b^3-2bc(b+c)+c^3) + a((b^2+c^2)^2+2b^2c^2) - 3bc(b^3+c^3) - 2b^2c^2(b+c) + 3(b^5+c^5))x^2 +$$
$$(a^2-b^2+c^2)(a^3+a^2(b-c)-(b-c)(b+c)^2+a(b^2-c^2))y^2 +$$
$$(a^2+b^2-c^2)(a^3-a^2(b-c)+(b-c)(b+c)^2-a(b^2-c^2))z^2 +$$
$$(a^5 - a^4(b+c) - 2a^2(b-c)^2(b+c) + 2(b-c)^2(b+c)^3 - 2a(b^2-c^2)^2)yz\Big)yz = 0.$$

Esta cuártica que pasa por los vértices de $\widehat{ABC}$ y tiene un punto doble en el ortocentro.



OBSERVACIÓN:

Podemos considerar triángulos $\widehat{A'B'C'}$ circunscritos a $\widehat{ABC}$ no necesariamente semejantes a éste. Los vértices A', B' y C' de ellos estarán en circunferencias circunscritas a $\widehat{SBC}$, $\widehat{SCA}$ y $\widehat{SAB}$, respectivamente, para S un punto fijo (ver http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/19263). En particular, si S es el punto de Fermat de $\widehat{ABC}$, los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ son todos equiláteros (ver la página web de Philippe Chevanne: http://mathafou.free.fr/pbw/pb431.html.

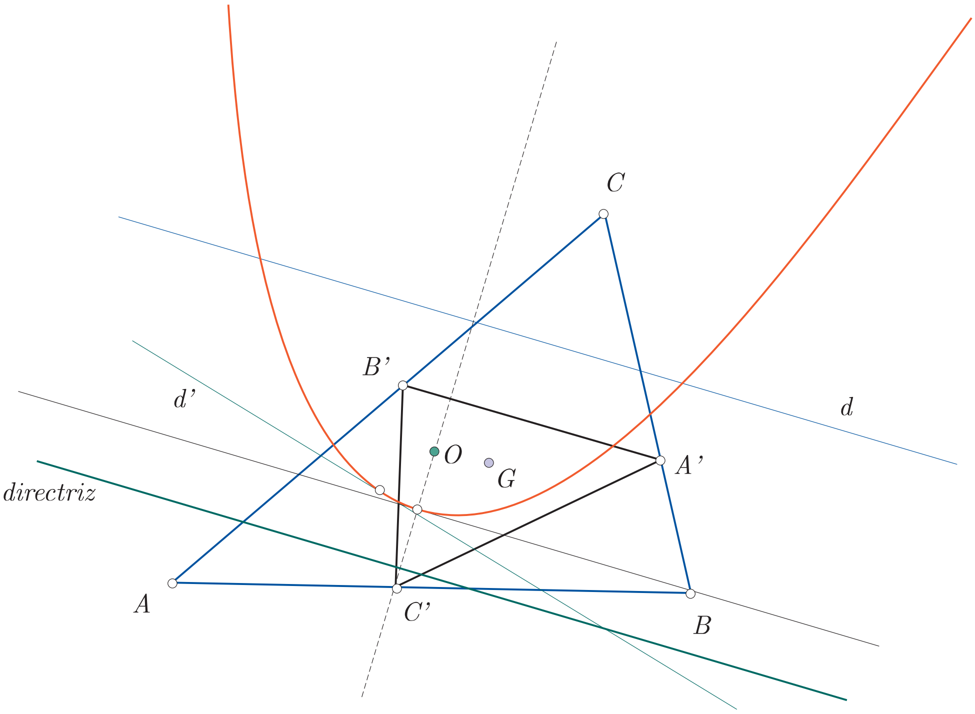
La envolvente de las circunferencias inscritas a los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ es también una cuártica circunscrita a $\widehat{ABC}$ con un punto doble en S.

△
▽

⊛ ***Otro resultado***

Las rectas imágenes de una recta dada d, en las semejanzas que transforman el triángulo $\widehat{ABC}$ en cada triángulo inscrito $\widehat{A'B'C'}$, envuelven la parábola de foco el circuncentro de $\widehat{ABC}$ y tangente en el vértice la recta imagen de d en la semejanza que envía $\widehat{ABC}$ a su triángulo medial (es decir, la homotecia de centro el baricentro y razón $-1/2$).

(Vicente Inglada García-Serrano.- Métodos para la resolución de los problemas geométricos. Editorial Dossat, Madrid 1948. Pág 244)



Applet-Cabri