Superficies de revolución

Angel Montesdeoca

Lunes 12 de Mayo del 2008

1 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,z) \longmapsto f(x,z)$ una función diferenciable sobre el plano XOZ, con valores reales, y supongamos que

$$\mathcal{C} = \{(x,z)/f(x,z) = 0\}$$

es una curva en XOZ, es decir $f'_x(x_0,z_0) \neq 0$ ó $f'_z(x_0,z_0) \neq 0$, $\forall (x_0,z_0) \in \mathcal{C}$.

a) Si $\mathcal{C}$ no corta al eje OZ, probar que $F(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ es la ecuación implícita de una superficie $\mathcal{M}$.

b) Demostrar que $\mathcal{M}$ es la superficie generada al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje OZ.

c) Probar que $\mathcal{M}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/f(x,z) = 0\}$ es una superficie.

2 Toro de revolución.- Si la curva $f(x,z) = 0$, en el plano XOZ, es la circunferencia de centro en $(2,0,0)$ y radio 1, obtener las ecuaciones paramétricas e implícita de la superficie de revolución generada por dicha circunferencia, al girar alrededor del eje OZ. Deducir la ecuación implícita, a partir de las ecuaciones paramétricas.

Considerar la curva $\mathcal{C}$ sección plana producida por el plano $2x + 3y - 6 = 0$ al cortar el toro anterior. Calcular la curvatura de dicha sección en el punto $(3,0,0)$ y comprobar la fórmula del teorema de Meusnier, teniendo en cuenta que la sección normal del toro en la direccíón de la curva $\mathcal{C}$ en $(3,0,0)$ es la circunferencia de radio 1.

Comprobar que las circunferencias de intersección del toro con los planos que contienen al eje OZ, son geodésicas.