Algunas propiedades deducidas de semejanzas asociadas a los vértices de un triángulo

Angel Montesdeoca

Para un punto P, sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, consideramos triángulos que tienen dos de sus vértices en los del triángulo dado y son semejantes al formado por P y dos de los vértices de $\widehat{ABC}$. Estudiamos diversas configuraciones asociadas a estos triángulos, en las que están involucrados ciertos centros y cónicas asociadas a $\widehat{ABC}$.

△
▽

⊛ *Semejanzas directas asociadas a los vértices de un triángulo*

Las seis posibles semejanzas directas (no involutivas y sin puntos fijos en los vértices), definidas tomando como puntos homólogos entre los vértices de $\widehat{ABC}$ son las que tienen las siguientes parejas de pares homólogos:

$$A \mapsto B \text{ y } B \mapsto C; \qquad A \mapsto B \text{ y } C \mapsto A; \qquad A \mapsto C \text{ y } B \mapsto A;$$
$$A \mapsto C \text{ y } C \mapsto B; \qquad B \mapsto A \text{ y } C \mapsto B; \qquad B \mapsto C \text{ y } C \mapsto A.$$

Las ecuaciones de la semejanza directa definida por $B \mapsto C$ y $C \mapsto A$ son, en coordenadas baricéntricas respecto a $\widehat{ABC}$:

$$\lambda x' = (c^2 - b^2)x + a^2 z, \quad \lambda y' = b^2 x, \quad \lambda z' = (a^2 - c^2)x + a^2 y.$$

Esto surge del hecho de que el punto homólogo del punto $X(x : y : z)$ en tal semejanza se obtiene intersecando la recta que resulta de girar CA, alrededor de C, un ángulo igual al que forman las rectas BC y BX, con la que nos da al girar CA, alrededor de A, un ángulo igual al que determinan CB y CX (AM. §13.3, pag. 50) [1]. Las rectas giradas tienen de coeficientes, respectivamente:

$$\left(b^2 x : (b^2 - c^2)x - a^2 z : 0\right), \qquad \left(0 : (c^2 - a^2)x + a^2 y : b^2 x\right).$$

△
▽

[1] A. Monteseoca.- Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas.

⊛ *Algunos resultados referentes a semejanzas directas asociadas a los vértices de un triángulo*

En los enunciados que aparecen a continuación pueden omitirse algunos entes o nomenclaturas, por abreviar, que ya estén citados en alguna parte anterior de este documento.

> Sea P un punto en la circunferencia circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, consideremos los triángulos directamente semejantes $\widehat{CAB_a} \sim \widehat{BCP}$, $\widehat{ABC_b} \sim \widehat{CAP}$ y $\widehat{BCA_c} \sim \widehat{ABP}$. Entonces los puntos B_a, C_b y A_c están alineados y, si $U(u:v:w)$ son las coordenadas baricéntricas del conjugado isogonal de P $(u+v+w=0)$, el punto del infinito de la recta que los contiene es:
>
> $$U'(a^2u+c^2v+b^2w : c^2u+b^2v+a^2w : b^2u+a^2v+c^2w).$$
>
> La transformación $U \mapsto U'$ es la involución que la hipérbola de Kiepert induce en la recta del infinito. La transformación $P \mapsto P'$ (P' conjugado isogonal de U') es la simetría respecto al eje de Brocard.

La imagen del punto $P(a^2vw : b^2wu : c^2uv)$, $u+v+w=0$, sobre la circunferencia circunscrita, mediante la semejanza directa que transforma $B \mapsto C$ y $C \mapsto A$, es:

$$B_a\left(-v\left(c^2v+b^2w\right) : b^2vw : w\left(b^2u+\left(a^2-c^2\right)v\right)\right).$$

Razonando de la misma manera, se obtienen las ecuaciones las restantes semejanzas consideradas arriba. Así, para la semejanza dada por $B \mapsto A$ y $C \mapsto B$, las ecuaciones son:

$$\lambda x' = a^2z, \quad \lambda y' = c^2x+(c^2-b^2)z, \quad \lambda z' = c^2y+(b^2-a^2)z,$$

el punto homólogo de P es:

$$C_a\left(w\left(c^2v+b^2w\right) : v\left(uc^2+\left(a^2-b^2\right)w\right) : c^2vw\right).$$

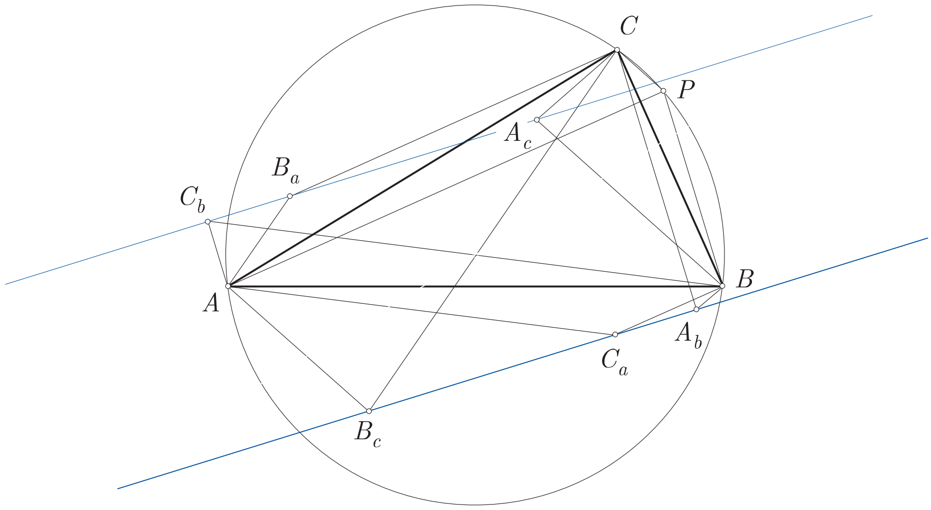
Procediendo cíclicamente, se obtienen las coordenadas de los puntos, para las correspondientes semejanzas, homólogos de P:

$$C_b\left(u\left(c^2v+\left(b^2-a^2\right)w\right) : -w\left(c^2u+a^2w\right) : c^2uw\right),$$

$$A_b\left(a^2uw : -u\left(c^2u+a^2w\right) : w\left(\left(b^2-c^2\right)u+va^2\right)\right),$$

$$A_c\left(a^2uv : v\left(\left(c^2-b^2\right)u+a^2w\right) : -u\left(b^2u+a^2v\right)\right),$$

$$B_c\left(u\left(\left(c^2-a^2\right)v+b^2w\right) : b^2uv : -v\left(b^2u+a^2v\right)\right).$$



Siendo el determinante formado por las coordenadas de los puntos B_a, C_b y A_c igual a:

$$-\left(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2\right)uvw(u+v+w)\left(a^2vw+c^2uv+b^2uw\right),$$

ellos están alineados, al ser $u+v+w=0$. El punto del infinito de la recta que determinan es:

$$U'(a^2u+c^2v+b^2w : c^2u+b^2v+a^2w : b^2u+a^2v+c^2w).$$

En los triángulos $\widehat{ABC_a}\sim\widehat{BCP}$, $\widehat{BCA_b}\sim\widehat{CAP}$ y $\widehat{CAB_c}\sim\widehat{ABP}$, los vértices A_b, B_c y C_a también están alineados, en una recta paralela a la determinada por los tres puntos B_a, C_b y A_c.

La correspondencia:

$$U(u:v:w)\longmapsto U'(a^2u+c^2v+b^2w : c^2u+b^2v+a^2w : b^2u+a^2v+c^2w),$$

es una involución sobre la recta del infinito ($U'\mapsto U$). De hecho, la involución $U\mapsto U'$ es la que la hipérbola de Kiepert (isogonal conjugada del eje de Brocard), hipérbola equilátera circunscrita al triángulo de referencia y que pasa por el baricentro, de ecuación

$$(b^2-c^2)yz+(c^2-a^2)zx+(a^2-b^2)xy=0,$$

induce sobre la recta del infinito; pues la polar de $U(u:v:w)$ respecto a la hipérbola de Kiepert es:

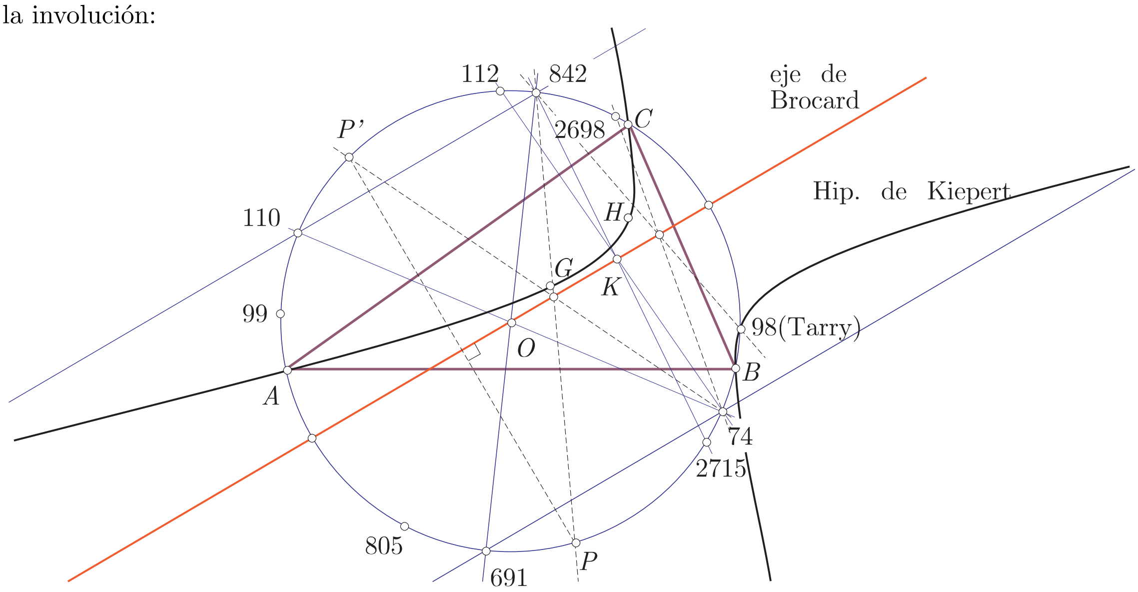
$$\left((a^2-b^2)v+(c^2-a^2)w\right)x+\left((a^2-b^2)u+(b^2-c^2)w\right)y+\left((c^2-a^2)u+(b^2-c^2)v\right)z=0.$$

La cual corta a la recta del infinito, $x+y+z=0$, en el punto U'.

Por tanto, la correspondencia $P\mapsto P'$ (P' conjugado isogonal de U') es una involución sobre la circunferencia circunscrita, que en realidad es la simetría respecto al eje de Brocard, OK, que es el eje de perspectividad de la involución [2].

[2] Esto es una caso particular de la situación general siguiente:

Podemos hacer una comprobación de este hecho, tomando pares de puntos (centros de ETC) homólogos en la involución:



$$X_{74}\left(\frac{a^2}{a^2S_A-2S_BS_C}:\cdots\right)\ \mapsto\ X_{842}\left(\frac{a^2}{a^2(a^2S_A+b^2c^2)-2(a^2S_BS_C+b^2S_AS_B+c^2S_AS_C)}:\cdots\right),$$

las rectas que unen estos puntos con cualquier otro par de puntos homólogos, se cortan en el eje de perspectividad. Así, por ejemplo, sean los dos pares de puntos homólogos siguientes:

$$X_{110}\left(\frac{a^2}{b^2-c^2}:\cdots\right)\quad\longmapsto\quad X_{691}\left(\frac{a^2}{(b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)}:\cdots\right).$$

$$X_{112}\left(\frac{a^2}{(b^2-c^2)S_A}:\cdots\right)\quad\longmapsto\quad X_{2715}\left(\frac{a^2}{b^4S_B-c^4S_C}:\cdots\right).$$

≪Dados un triángulo $\widehat{ABC}$, una recta ℓ (no tangente a la circunferencia circunscrita Γ) y la cónica circunscrita, $\mathcal{C}_\ell$, conjugada isogonal de ℓ. Si P es un punto de Γ, sean d el diámetro de $\mathcal{C}_\ell$ con punto impropio el conjugado isogonal de P, d' su diámetro conjugado y P' el conjugado isogonal del punto del infinito de d'. Entonces, la correspondencia $\sigma : P \longmapsto P'$ es una involución sobre Γ, con eje de perspectividad ℓ. Además, si ℓ pasa por el circuncentro, σ es la simetría respecto a ℓ≫.

En efecto, la correspondencia entre diámetros conjugados de una cónica (elipse o hipérbola) es una involución con elementos dobles las asíntotas, en el caso de la hipérbola. La correspondencia que a un diámetro d le asigna el punto P, en la circunferencia circunscrita, conjugado isogonal de su punto del infinito, es una proyectividad; ya que P se obtiene, trazando una paralela a d por un vértice (sea A), luego la recta simétrica de ésta, respecto a la bisectriz en A, y finalmente, P es el otro punto en que la última recta trazada vuelve a cortar a Γ. Tenemos así, que $\sigma : P \longmapsto P'$ es un involución sobre Γ y las rectas que unen puntos homólogos pasa por un punto (polo de la involución), cuya polar es el eje de perspectividad de la involución. Éste contiene a los puntos dobles (reales o imaginarios) de la involución, que son los puntos de contacto con Γ de las tangentes trazadas desde el polo. Estos puntos de tangencia son los correspondientes conjugados isogonales de los puntos del infinito de la cónica circunscrita; es decir que están en la recta ℓ, la cual coincide, por tanto, con el eje de perspectividad de la involución.

En el caso de que ℓ contenga al circuncentro, el polo de la involución está en el infinito, ya que es la intersección de las tangentes en puntos antipodales. Así, $\sigma : P \longmapsto P'$ es la simetría respecto a ℓ.

El punto $X_{74}X_{110} \cap X_{842}X_{691}$, pertenece al eje de perspectividad; que se trata del circuncentro O, pues X_{74} y X_{110} son antipodales y también los son X_{691} y X_{842}. También pertenece a dicho eje el simediano $K = X_{74}X_{112} \cap X_{842}X_{2715}$.

Por otra parte, las rectas $X_{74}X_{691}$ y $X_{110}X_{842}$ son paralelas, simétricas respecto a O y se cortan en el eje de perspectividad, por lo que X_{74} y X_{842} son simétricos respecto al eje de Brocard. Así, las rectas $X_{842}P$ y $X_{74}P'$, que se cortan en el eje de perspectividad, son simétricas respecto a éste, es decir, P y P' son simétricos, respecto al eje de Brocard. ◪

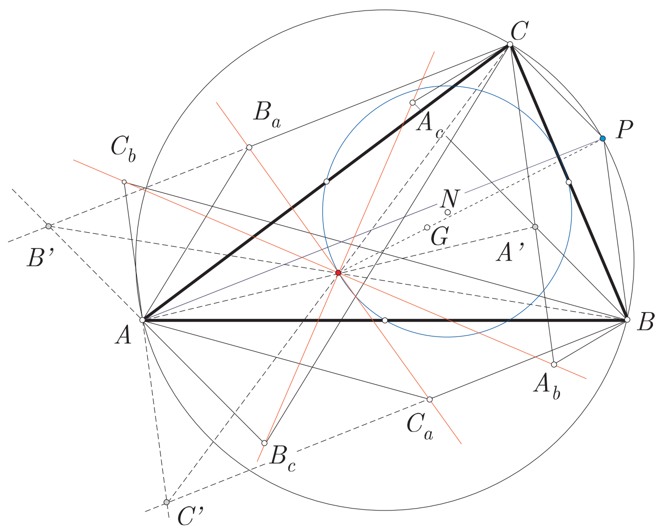
> Los puntos medios de los segmentos B_aC_a, C_bA_b y A_cB_c coinciden, en el punto imagen (en la circunferencia de Euler) de P mediante la homotecia de centro en el baricentro y razón $-1/2$.

El punto medio de cualquiera de los tres segmentos B_aC_a, C_bA_b y A_cB_c es el punto:

$$\left(u(c^2v + b^2w) : v(a^2w + c^2u) : w(b^2u + a^2v)\right),$$

que es el complemento de P, y está en la circunferencia de Euler (al estar P en la circunferencia circunscrita). □

■



> Cada terna de rectas AP, BC_a y CB_a; BP, CA_b y AC_b, y CP, AB_c y BA_c son paralelas entre sí. Si $A' = BA_c \cap CA_b, B' = CB_a \cap AB_c$ y $C' = AC_b \cap BA_c$, entonces los puntos medios de los segmentos AA', BB' y CC' coinciden, en el punto imagen (en la circunferencia de Euler) de P mediante la homotecia de centro en el baricentro y razón $-1/2$.

El punto del infinito de cada una de las tres rectas AP, BC_a y CB_a es $(c^2v + b^2w : -b^2w : -c^2v)$. Las dos restantes ternas de rectas tienen como puntos del infinito $(-a^2w : c^2u + a^2w : -c^2u)$ y $(-a^2v : -b^2u : b^2u + a^2v)$.

Por otro lado, se tiene que:

$$A'\left(-a^2vw : v(a^2w+c^2u) : w(b^2u+a^2v)\right),$$
$$B'\left(u(c^2v+b^2w) : -b^2wu : w(b^2u+a^2v)\right),$$
$$C'\left(u(c^2v+b^2w) : v(a^2w+c^2u) : -c^2uv)\right).$$

Las sumas de las coordenadas de cada uno de estos puntos es $a^2vw+b^2wu+c^2uv$. Por lo que poniendo $A(a^2vw+b^2wu+c^2uv : 0 : 0)$ el punto del segmento AA' es: coinciden en:

$$\left(u(c^2v+b^2w) : v(a^2w+c^2u) : w(b^2u+a^2v)\right).$$

Este punto coincide con el punto medio de los segmentos BB' y CC'. ◪

Los seis puntos $A'_b = BA_c \cap AB_a$, $B'_c = CB_a \cap BC_b$, $C'_a = AC_b \cap CA_c$, $A'_c = CA_b \cap AC_a$, $B'_a = AB_c \cap BA_b$, $C'_b = BC_a \cap CB_c$, están en la circunferencia circunscrita. Los triángulos $\overset{\triangle}{A'_cB'_aC'_b}$ son congruentes para cualquier P (en la circunferencia circunscrita) y simétricos a $\overset{\triangle}{A'_bB'_cC'_a}$ con respecto a la recta OP.

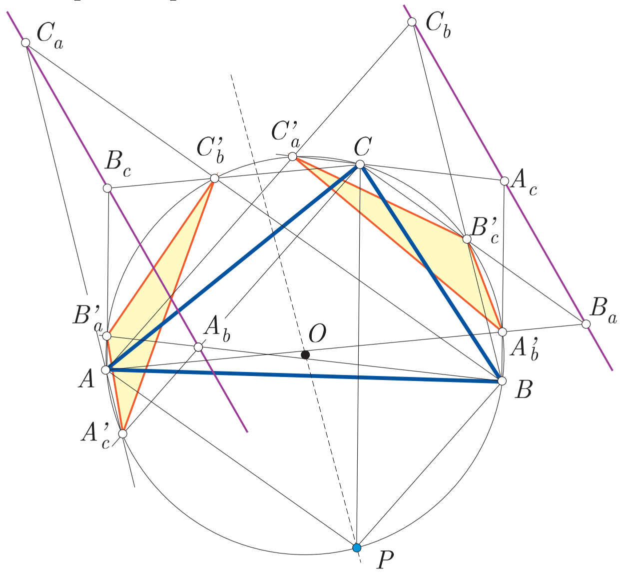
(Applet CabriJava)

Las coordenadas de los puntos A'_b y A'_c son:

$$A'_b\left(a^2v(b^2u+(a^2-c^2)v) : -b^2v(b^2u+a^2v) : -b^4u^2+b^2(c^2-2a^2)uv+a^2(c^2-a^2)v^2\right),$$
$$A'_c\left(-a^2w(c^2u+(a^2-b^2)w) : c^4u^2+(2a^2-b^2)c^2uw+a^2(a^2-b^2)w^2 : c^2w(c^2u+a^2w)\right).$$

Las coordenadas de los puntos B'_c y C'_a se obtienen permutando cíclicamente las de A'_b. Las de los puntos B'_a y C'_b se deducen de las de A'_c permutando cíclicamente dos veces.

Sustituyendo las coordenadas de estos seis puntos en la ecuación de la circunferencia circunscrita, $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$, se comprueba que están sobre ella.



Que todos los triángulos $\widehat{A'_cB'_aC'_b}$ son congruentes es porque:

$$\overline{B'_aC'_b} = \frac{|b^2-c^2|}{a}, \qquad \overline{C'_bA'_c} = \frac{|c^2-a^2|}{b}, \qquad \overline{A'_cB'_a} = \frac{|a^2-b^2|}{c}.$$

También con congruentes los triángulos $\widehat{A'_bB'_cC'_a}$:

$$\overline{B'_cC'_a} = \frac{|b^2-c^2|}{a}, \qquad \overline{C'_aA'_b} = \frac{|c^2-a^2|}{b}, \qquad \overline{A'_bB'_c} = \frac{|a^2-b^2|}{c}.$$

Otras distancias, entre pares de vértices de estos triángulos, son:

$$\overline{B'_cC'_b} = \overline{BC} = a, \qquad \overline{C'_aA'_c} = \overline{CA} = b, \qquad \overline{A'_bB'_a} = \overline{AB} = c,$$

$$\overline{A'_bA'_c} = \frac{2S_A}{bc} = 2a\cos A, \qquad \overline{B'_aB'_c} = \frac{2S_B}{ac} = 2b\cos B, \qquad \overline{C'_aC'_b} = \frac{2S_C}{ab} = 2c\cos C.$$

Nos falta establecer que los $\widehat{A'_cB'_aC'_b}$ y $\widehat{A'_bB'_cC'_a}$ son simétricos respecto al diámetro OP. Pero esto surge de que el punto del infinito del diámetro perpendicular a OP es:

$$\left(a^2(c^2v^2-b^2w^2) : b^2(a^2w^2-c^2u^2) : c^2(b^2u^2-a^2v^2)\right).$$

Y de que el determinante formado por estas coordenadas y las de los puntos A'_b y A'_c es:

$$a^2b^2c^2(u+v+w)(-b^2c^2u^2-c^2(a^2-c^2)uv-b^2(a^2-b^2)uw+2a^2S_Avw)(-c^2u^2v+b^2u^2w-a^2v^2w+a^2vw^2),$$

que es nulo, al ser $u+v+w=0$; con lo que A'_b y A'_c son los extremos de una cuerda perpendicular a OP. Análogamente, se establece que $B'_cB'_a$ y $C'_aC'_b$ son cuerdas de la circunferencia circunscritas perpendiculares al diámetro OP. ◪

> Los puntos P para los cuales las rectas $B_aC_bA_c$ y $A_bB_cC_a$ son paralelas a los lados de $\widehat{ABC}$, son los otros puntos en los que las paralelas por los vértices a la dirección del conjugado isogonal del punto de Steiner, vuelven a cortar a la circunferencia circunscrita.

La recta $B_aC_bA_c$ es paralela al lado BC, cuando sus puntos del infinito:

$$U'(a^2u+c^2v+b^2w : c^2u+b^2v+a^2w : b^2u+a^2v+c^2w) \quad \text{y} \quad (0:1:-1),$$

coinciden; lo cual ocurre para $U(b^2-c^2 : a^2-b^2 : c^2-a^2)$.

La recta $B_aC_bA_c$ es paralela al lado CA o al AB, cuando U coincide, respectivamente, con $(a^2-b^2 : c^2-a^2 : b^2-c^2)$ ó $(c^2-a^2 : b^2-c^2 : a^2-b^2)$.

Luego los puntos, sobre la circunferencia circunscrita, buscados son:

$$U_a\left(\frac{a^2}{b^2-c^2} : \frac{b^2}{a^2-b^2} : \frac{c^2}{c^2-a^2}\right),\ U_b\left(\frac{a^2}{a^2-b^2} : \frac{b^2}{c^2-a^2} : \frac{c^2}{b^2-c^2}\right),\ U_c\left(\frac{a^2}{c^2-a^2} : \frac{b^2}{b^2-c^2} : \frac{c^2}{a^2-b^2}\right).$$

Es decir, el triángulo circunceviano del punto X_{512}, conjugado isogonal del punto de Steiner, X_{99}.

Cuando $P = U_a$, se tiene que $U_b = C'_b = BC_a \cap CB_c$ y $U_c = B'_c = BC_b \cap CB_a$. Si $P = U_b$, entonces $U_a = C'_a = AC_b \cap CA_c$ y $U_c = A'_c = CA_b \cap AC_a$. Y, finalmete, si $P = U_c$, ocurre que $U_a = B'_a = AB_c \cap BA_b$ y $U_b = A'_b = BA_c \cap AB_a$. ◪

> Las rectas AP, BB_a y CC_a son concurrentes cuando P coinciden con uno de los tres puntos siguientes (en la circunferencia circunscrita Γ): los puntos donde las bisectrices (interior y exterior) en A y la paralela a BC por A, vuelven a corta a Γ.

El valor del determinante formado por los coeficientes de las rectas AP, BB_a y CC_a es:

$$(c^4uv^3 + a^2c^2v^3w - b^2c^2v^3w - b^4uw^3 - a^2b^2vw^3 + b^2c^2vw^3)(c^2v + b^2w).$$

El cual se anula para los puntos, en la recta del infinito:

$$(-b - c : b : c), \qquad (b - c : -b : c), \qquad (b^2 - c^2 : -b^2 : c^2),$$

cuyos conjugados isogonales (en la circunferencia circunscrita) están, respectivamente, en las bisectrices interior y exterior del ángulo en A (es decir, en la mediatriz del lado BC y los puntos de concurrencia son centros de perspectividad de Kiepert (AM. §15, pag. 61)) y en la paralela por A a BC. Por tanto, en este último caso, se tiene que la recta B_aC_a coincide con el lado BC.

Situación similar se tiene para la concurrencia de las tres rectas BP, CC_b y AA_b y para las tres rectas CP, AA_c y BB_c. ◪

> El punto P (en la circunferencia circunscrita), para el que los seis puntos B_a, C_b, A_c, A_b, B_c y C_a están en una misma recta, es el foco de la parábola de Kiepert.

Una de las formas de expresar la condición de alineamiento de estos seis puntos es:

$$(-b^2c^2 + c^4)u^2v + (-a^2c^2 + c^4)uv^2 + (a^2b^2 - b^2c^2)u^2w + (a^2b^2 - a^2c^2)v^2w +$$
$$+ (a^4 + b^4 + 2c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2)uvw = 0,$$
$$u + v + w = 0.$$

Cuya única solución real es el punto, en la recta del infinito, $(b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2)$, cuyo conjugado isogonal es el punto X_{110}, foco de la parábola de Kiepert:

$$\left(\frac{a^2}{b^2 - c^2} : \frac{b^2}{c^2 - a^2} : \frac{c^2}{a^2 - b^2}\right).$$

El punto de medio común de los segmentos B_aC_a, C_bA_b y A_cB_c es, ahora, el centro de la hipérbola de Jerabek, X_{125} (en la circunferencia de Euler). Y la recta que contiene a los seis puntos es:

$$t: \ \frac{x}{b^2 - c^2} + \frac{y}{c^2 - a^2} + \frac{z}{a^2 - b^2} = 0. \tag{1}$$

Es perpendicular[3] a la recta que pasa por X_{110} y X_{125}; y se trata de la tripolar del punto X_{523}, conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert. Esta recta vuelve a cortar a la circunferencia de Euler en el punto X_{115}, centro de la hipérbola de Kiepert y su punto del infinito es el X_{690}.

Por supuesto, esta recta es la tangente común a la tres cónica envolventes de las rectas B_aC_a, C_bA_b y A_cB_C, cuando P varía en la circunferencia circunscrita. ◪

> Las tres cónicas envolventes de las rectas B_aC_a, C_bA_b y A_cB_c son bitangentes a la circunferencia de Euler. Las rectas que unen los puntos de contacto (reales o imaginarios) forman un triángulo $\widehat{E_aE_bE_c}$ perspectivo con ABC, con centro de perspectividad en el conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert. Cada par de tangentes (reales o imaginarias) en los puntos de contacto se cortan en los vértices de $\widehat{E_aE_bE_c}$.

La ecuación de la recta B_aC_a, cuando P varía en la circunferencia circunscrita (es decir, cuando su conjugado isogonal, $U(t:1-t:-1)$, varía en la recta del infinito), la podemos poner en la forma:

$$(-a^2+b^2+c^2)(t-1)x+(-b^2-c^2(t-1))y+(-b^2-c^2(t-1))(t-1)z=0.$$

Estas rectas envuelven a la cónica inscrita en $\widehat{ABC}$:

$$\mathcal{C}_a:\ 4S_A^2x^2+c^4y^2+b^4z^2-2b^2c^2yz-4b^2S_Azx-4c^2S_Axy=0.$$

Similarmente, se tienen las ecuaciones de las cónicas que envuelven las rectas C_bA_b y A_cB_c, que son, respectivamente:

$$\mathcal{C}_b:\ c^4x^2+4S_B^2y^2+a^4z^2-4a^2S_Byz-2a^2c^2zx-4c^2S_Bxy=0,$$
$$\mathcal{C}_c:\ b^4x^2+a^4y^2+4S_C^2z^2-4a^2S_Cyz-4b^2S_Czx-2a^2b^2xy=0.$$

Si consideramos el haz de cónicas determinado por la circunferencia de Euler y la cónica $\mathcal{C}_a$:

$$S_Ax^2+S_By^2+S_Cz^2-a^2yz-b^2zx-c^2xy+\lambda(4S_A^2x^2+c^4y^2+b^4z^2-2b^2c^2yz-4b^2S_Azx-4c^2S_Axy)=0,$$

los valores de λ que anulan al polinomio característico (que corresponden a las cónicas degeneradas del haz) son:

$$\frac{a^2}{b^2c^2},\qquad \frac{1}{2S_A}.$$

El segundo, que es doble, da lugar a una recta doble, que pasa por los puntos (reales o imaginarios) de bitangencia:

$$d_a:\ (a^2-b^2)y+(c^2-a^2)z=0.$$

La raíz simple, nos da la cónica degenerada determinada por las tangentes comunes, cuya matriz asociada (de determinante nulo) es:

$$\begin{pmatrix} (a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2-c^2) & (a^2-b^2)c^2(a^2-c^2) & b^2(a^2-b^2)(a^2-c^2) \\ (a^2-b^2)c^2(a^2-c^2) & -(a^2-b^2)c^2(b^2-c^2) & 0 \\ b^2(a^2-b^2)(a^2-c^2) & 0 & b^2(a^2-c^2)(b^2-c^2) \end{pmatrix}.$$

[3] Quang Tuan Bui, http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/19123

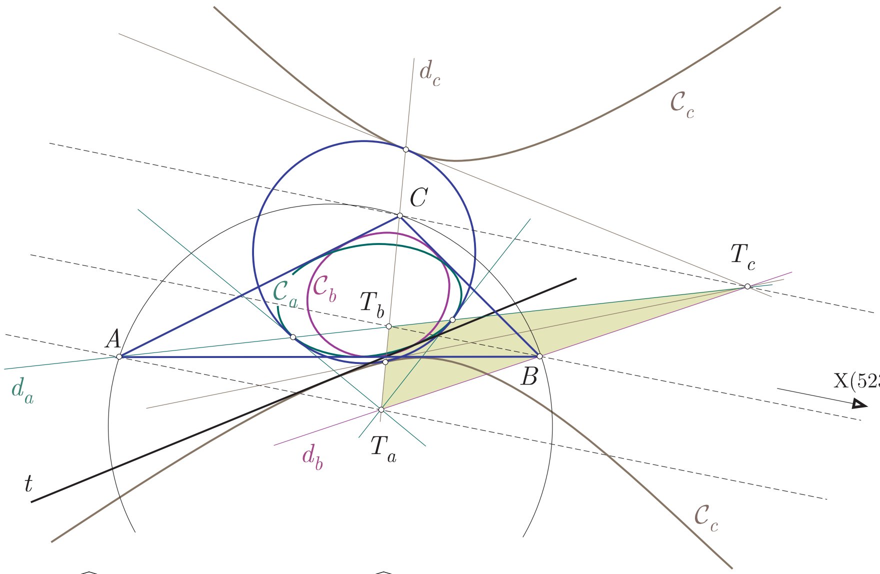
El punto común de estas tangentes es:

$$T_a(c^2 - b^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2).$$

Cálculos similares para los haces de cónicas formados por la circunferencia de Euler y cada una de las restantes cónicas, $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, nos dan como rectas dobles y puntos de intersección de las tangentes comunes:

$$d_b: \ (a^2 - b^2)x + (b^2 - c^2)z = 0, \qquad d_c: \ (c^2 - a^2)x + (b^2 - c^2)y = 0.$$

$$T_b(b^2 - c^2 : a^2 - c^2 : a^2 - b^2), \qquad T_c(b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : b^2 - a^2).$$



El triángulo [4] $\widehat{T_aT_bT_c}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad X_{523}, conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert.

Los puntos de tangencia, con cada una de estas cónicas, de la tangente t común (1) son, respectivamente:

$$L_a\left(\frac{2(b^2 - c^2)^2 S_A}{b^2c^2} : \frac{(c^2 - a^2)^2}{b^2} : \frac{(a^2 - b^2)^2}{c^2}\right),$$

[4] El triángulo $\widehat{T_aT_bT_c}$ es autopolar respecto a la circunferencia de Euler y la ecuación de ésta referida a él es:

$$\frac{a^2}{b^2 - c^2}x^2 + \frac{b^2}{c^2 - a^2}y^2 + \frac{c^2}{a^2 - b^2}z^2 = 0.$$

También, el triángulo $\widehat{T_aT_bT_c}$ es autopolar respecto a las cónicas $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, y sus ecuaciones en esta referencia son:

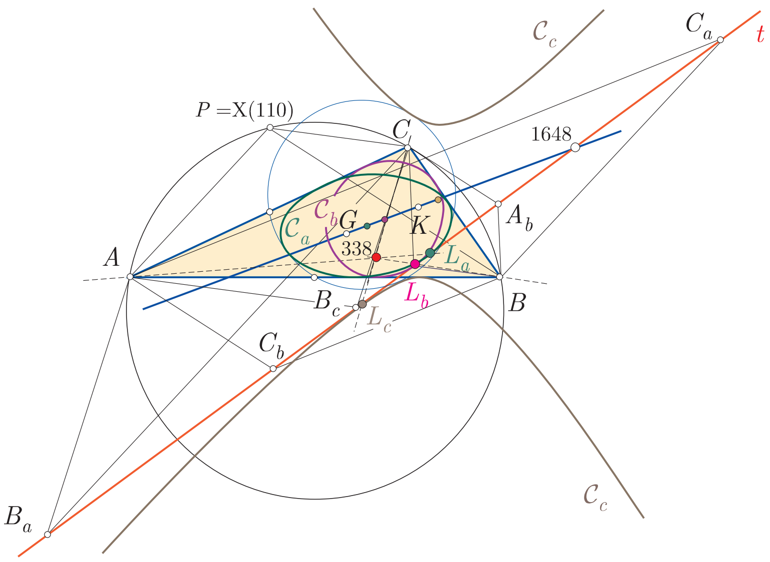
$$\mathcal{C}_a: \ \frac{b^2c^2}{b^2 - c^2}x^2 + \frac{2b^2 S_A}{c^2 - a^2}y^2 + \frac{2c^2 S_A}{a^2 - b^2}z^2 = 0,$$

$$\mathcal{C}_b: \ \frac{2a^2 S_B}{b^2 - c^2}x^2 + \frac{c^2a^2}{c^2 - a^2}y^2 + \frac{2c^2 S_B}{a^2 - b^2}z^2 = 0,$$

$$\mathcal{C}_c: \ \frac{2a^2 S_C}{b^2 - c^2}x^2 + \frac{2b^2 S_C}{c^2 - a^2}y^2 + \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}z^2 = 0.$$

$$L_b\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2} : \frac{2(c^2-a^2)^2 S_B}{c^2a^2} : \frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}\right),$$

$$L_c\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2} : \frac{(c^2-a^2)^2}{b^2} : \frac{2(a^2-b^2)^2 S_C}{a^2b^2}\right).$$



Por tanto, las rectas AL_a, BL_b y CL_c concurren en el punto X_{338} (producto ceviano [5] de los puntos X_{115} y X_{125}, en los que la tangente común, t, corta a la circunferencia de Euler):

$$\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2} : \frac{(c^2-a^2)^2}{b^2} : \frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}\right).$$

Los perspectores de las cónicas $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$ son, respectivamente:

$$\left(\frac{1}{2S_A} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{b^2}\right), \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{1}{2S_B} : \frac{1}{a^2}\right), \quad \left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{a^2}\frac{1}{2S_C}\right).$$

O bien:

$$\left(\frac{b^2c^2}{2S_A} : b^2 : c^2\right), \quad \left(a^2 : \frac{c^2a^2}{2S_B} : c^2\right), \quad \left(a^2 : b^2 : \frac{a^2b^2}{2S_c}\right).$$

[5] En el glosario de ETC (faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/glossary.html):
Cevapoint (cevian product). Suppose P = p : q : r and U = u : v : w are distinct points, neither lying on a sideline of ABC. The cevapoint of P and U is the point

$$(pv+qu)(pw+ru) : (qw+rv)(qu+pv) : (ru+pw)(rv+qw)$$

Así, estos perspectores forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, cuyo centro de perspectividad es el simediano.

Los centros de las cónicas,

$$(b^2+c^2:b^2+2S_A:c^2+2S_A),\quad (a^2+2S_B:a^2+c^2:c^2+2S_B),\quad (a^2+2S_C:b^2+2S_C:a^2+b^2),$$

están en la recta GK. Esta recta corta a la tangente común (1) a las tres cónicas en el punto X_{1648}:

$$\left((2a^2-b^2-c^2)(b^2-c^2)^2:(2b^2-c^2-a^2)(c^2-a^2)^2:(2c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)^2\right).$$

El punto X_{1648} es el baricentro[6] de los tres puntos en que la tangente común (1) corta a los lados de $\widehat{ABC}$ ◪

> Sean A_4, B_4, C_4 los cuartos puntos de intersección de la circunferencia circunscrita con las cónicas circunscritas que pasan, respectivamente, por los puntos B_a y C_a, C_b y A_b, A_c y B_c, entonces las rectas AA_4, BB_4, CC_4 son concurrentes si sólo si $P = X_{3565}$ y el punto de concurrencia es el X_{2079}, inverso del centro de la hipérbola de Kiepert, X_{115}, respecto a la circunferencia circunscrita.

La cónica circunscrita que pasa por B_a y C_a tiene por ecuación:

$$\begin{aligned}\Gamma_a:\quad & (c^2v+b^2w)(b^2c^2u^2+c^2(a^2-c^2)uv+b^2(a^2-b^2)uw-a^2(-a^2+b^2+c^2)vw)yz+\\ & b^2(c^2u+(a^2-b^2)w)(-c^2v^2+b^2uw+(a^2-c^2)vw)zx+\\ & c^2(b^2u+(a^2-c^2)v)(c^2uv+(a^2-b^2)vw-b^2w^2)xy=0.\end{aligned}$$

Si consideramos las otras cónicas circunscritas Γ_b y Γ_c que contienen a C_b y A_b, y a A_c y B_c, respectivamente y si A_4, B_4 y C_4 son sus cuartos puntos de intersección (PY §9.1, pag. 105) con la circunferencia circunscrita, el determinante formado por los coeficientes de las rectas AA_4, BB_4, CC_4 vale, poniendo $U = (u : v : w) = (t : 1-t : -1)$:

$$(-a^6-b^6-c^6-c^4+a^2c^4+b^2c^4+b^4c^2+a^4b^2+a^2b^4+a^4c^2-3a^2b^2c^2)$$
$$(-3a^2b^2+b^4+3a^2c^2+(a^2-b^2)(a^2+b^2-3c^2)t)(-a^2+(a^2-b^2+c^2)t-c^2t^2)^4.$$

Que se anula para el valor real:

$$t=\frac{c^4-b^4+3a^2b^2-3a^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2-3c^2)}.$$

Luego AA_4, BB_4, CC_4 concurren si $U(u : v : w)$ es el punto del infinito:

$$\left((b^2-c^2)(b^2+c^2-3a^2):(c^2-a^2)(c^2+a^2-3b^2):(a^2-b^2)(a^2+b^2-3c^2)\right).$$

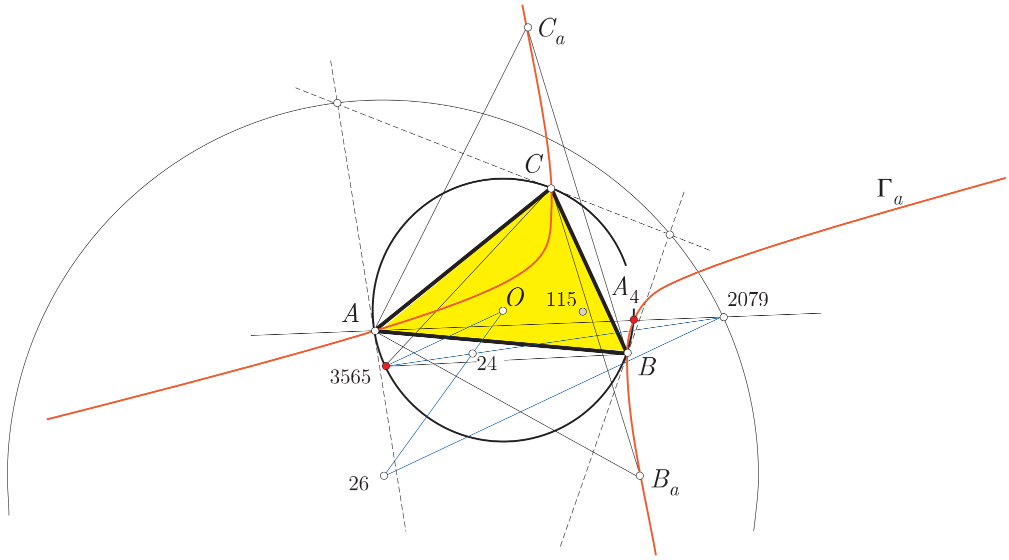
[6] Darij Grinberg (ver nota anterior al centro X_{1635} en la Enciclopedia de Kimberling) da la noción de "tripolar centroid" de un punto X, como el baricentro de los tres puntos en los que la tripolar de X corta a los lados del triángulo de referencia. En particular, el punto X_{1648} es el "tripolar centroid" del conjugado isogonal, X_{523}, del foco de la parábola de Kiepert, X_{110}.

Su conjugado isogonal es el punto X_{3565}:

$$\left(\frac{a^2}{(b^2-c^2)(b^2+c^2-3a^2)}:\frac{b^2}{c^2-a^2)(c^2+a^2-3b^2)}:\frac{c^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2-3c^2)}\right).$$

El punto donde se cortan las rectas AA_4, BB_4, CC_4 es el X_{2079}:

$$\left(a^2(a^8-2a^6(b^2+c^2)+5a^4b^2c^2+a^2(2b^6-3b^4c^2-3b^2c^4+2c^6)-(b^2-c^2)^2(b^4+c^4)):\cdots:\cdots\right).$$



El punto X_{2079} (situado sobre la circunferencia circunscrita al triángulo tangencial) es el inverso del centro de la hipérbola de Kiepert, X_{115}, respecto a la circunferencia circunscrita. El punto X_{3565} es uno de los dos extremos del diámetro de la circunferencia circunscrita que es paralelo al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo tangencial que pasa por X_{2079}.

Las tres cónicas circunscritas Γ_a, Γ_b y Γ_c tiene en común, aparte de los vértices A, B y C el punto de primera coordenada:

$$\frac{\left(v(c^2u+a^2w)+b^2wu\right)^2\left(w(a^2v+b^2u)+c^2uv\right)^2}{(a^6vw+a^4u(b^2w+c^2v)+a^2(b^2c^2u^2-((b^2-c^2)^2+b^2c^2)vw)-u(b^2-c^2)(b^4w-c^4v))}$$

En particular, cuando $P=X_{110}$, es decir $U=X_{523}$, las tres cónicas se cortan [7] en el punto X_{67}:

$$\left(\frac{1}{b^4+c^4-a^4-b^2c^2}:\frac{1}{c^4+a^4-b^4-c^2a^2}:\frac{1}{a^4+b^4-c^4-a^2b^2}\right).$$

◪

[7] Quang Tuan Bui, http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/19123

Cuando P recorre la circunferencia circunscrita, la recta d_a que une los centros de las circunferencias que describen los puntos B_a y C_a, la recta d_b que une los centros de las circunferencias que describen los puntos C_b y A_b, y la recta d_c que une los centros de las circunferencias que describen los puntos A_c y B_c, concurren en el centro de la circunferencia de Euler. Los ejes radicales e_a, e_b, e_c de cada par de estas circunferencias determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert.

Cuando P describe la circunferencia circunscrita, su imagen B_a, mediante la semejanza definida por $B \mapsto C$ y $C \mapsto A$, está en una circunferencia, que pasa por A y C, de ecuación y centro:

$$(a^2-b^2)y^2 - b^2yz - b^2zx - 2S_Axy = 0, \qquad \left(2b^2S_B : 2b^2S_A : -a^4-b^4-c^4+2a^2(b^2+c^2)\right).$$

La ecuación de la circunferencia que describe C_a y su centro son:

$$(a^2-c^2)z^2 - c^2yz - 2S_Azx - c^2xy = 0, \qquad \left(2c^2S_C : -a^4-b^4-c^4+2a^2(b^2+c^2) : 2c^2S_A\right).$$

Los centros de estas circunferencias están en la recta:

$$d_a:\ (a^4+b^4+c^4-2a^2(b^2+c^2)+b^2c^2)x + c^2(a^2-c^2)y + b^2(a^2-b^2)z = 0.$$

Así mismo de obtienen las rectas que unen los centros de las circunferencias descritas por C_b y A_b y por A_c y B_c:

$$d_b:\ c^2(b^2-c^2)x + (a^4+b^4+c^4-2b^2(c^2+a^2)+c^2a^2)y + a^2(b^2-a^2)z = 0,$$

$$d_c:\ b^2(c^2-b^2)x + a^2(c^2-a^2)y + (a^4+b^4+c^4-2c^2(a^2+b^2)+a^2b^2)z = 0.$$

Estas tres rectas se cortan en el punto X_5, centro de la circunferencia de Euler:

$$\left((b^2-c^2)^2 - a^2(b^2+c^2) : (c^2-a^2)^2 - b^2(c^2+a^2) : (a^2-b^2)^2 - c^2(a^2+b^2)\right).$$

El eje radical de las circunferencias descritas por B_a y C_a es la perpendicular por A a la recta d_a, que une sus centros (así como los otros dos):

$$e_a:\ (a^2-b^2)y + (c^2-a^2)z = 0, \qquad e_b:\ (a^2-b^2)x + (b^2-c^2)z = 0, \qquad e_c:\ (c^2-a^2)x + (b^2-c^2)y = 0.$$

Los puntos $e_b \cap e_c, e_c \cap e_a$ y $e_a \cap e_b$ son, respectivamente:

$$(b^2-c^2 : a^2-c^2 : b^2-a^2), \qquad (c^2-b^2 : a^2-b^2 : b^2-a^2), \qquad (c^2-b^2 : a^2-c^2 : b^2-c^2),$$

que forma un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, de centro de perspectividad en X_{523}, conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert:

$$(c^2-b^2 : a^2-c^2 : b^2-a^2).$$

$\blacksquare$

Denotemos por P_{ab} el punto P (sobre la circunferencia circunscrita) tal que las tres rectas BP, CB_a y AC_a son concurrentes, y por P_{ac} el punto P tal que las tres rectas CP, AB_a y BC_a son concurrentes; ellos determinan la recta $\ell_a = P_{ab}P_{ac}$.
Similarmente, definimos las rectas ℓ_b y ℓ_c. Estas tres rectas forman un triángulo simétrico de $\widehat{ABC}$ respecto al punto X_{39}, punto medio de los puntos de Brocard.

Para que las rectas BP, CB_a y AC_a sean concurrentes, ha de ocurrir que:

$$-c^2u + b^2w = 0, \qquad \text{ó} \qquad c^2u^2 + (a^2 - b^2 + c^2)uw + a^2w^2 = 0.$$

La segunda condición no da puntos reales y la primera nos da el punto:

$$P_{ab}\left(a^2(b^2+c^2) : -b^4 : b^2(c^2+a^2)\right).$$

Y el punto de concurrencia de las rectas BP, CB_a y AC_a es $\Omega_1(1/b^2 : 1/c^2 : 1/a^2)$, primer punto de Brocard.

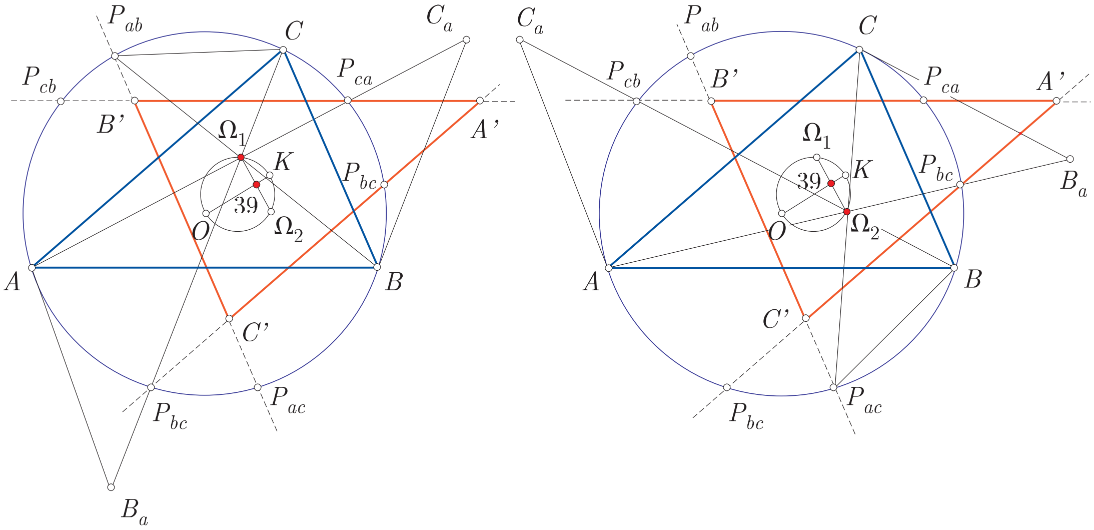
Así mismo, para que las rectas CP, AB_a y BC_a sean concurrentes, se debe verificar que:

$$b^2u - c^2v = 0, \qquad \text{ó} \qquad b^2u^2 + (a^2 + b^2 - c^2)uv + a^2v^2 = 0.$$

La primera condición nos dice que la tres rectas son concurrentes cuando se toma el punto de la circunferencia circunscrita:

$$P_{ac}\left(a^2(b^2+c^2) : c^2(b^2+c^2) : -c^2\right).$$

Y el punto de concurrencia de las rectas CP, AB_a y BC_a es $\Omega_2(1/c^2 : 1/a^2 : 1/b^2)$, segunda punto de Brocard.



Las rectas $\ell_a = P_{ab}P_{ac}$, $\ell_b = P_{bc}P_{ba}$ y $\ell_c = P_{ca}P_{cb}$, determinan el triángulo de vértices:

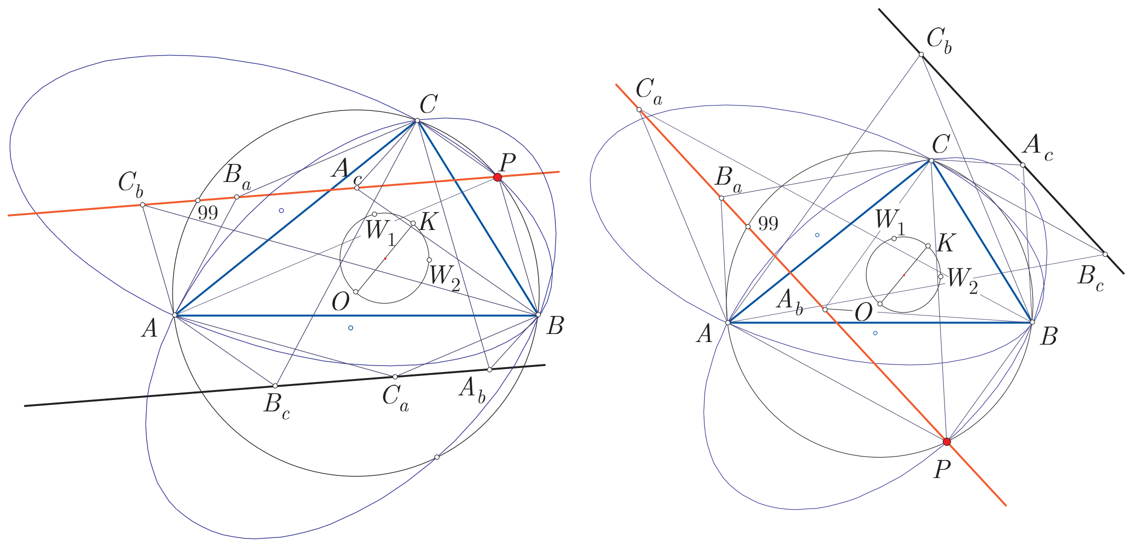
$$A'\left(-b^2c^2 : b^2(c^2+a^2) : c^2(a^2+b^2)\right),$$
$$B'\left(a^2(b^2+c^2) : -c^2a^2 : c^2(a^2+b^2)\right),$$
$$C'\left(a^2(b^2+c^2) : b^2(c^2+a^2) : -a^2b^2\right).$$

Se concluye que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos con centro de perspectividad en el centro X_{39}:

$$\left(a^2(b^2+c^2) : b^2(c^2+a^2) : c^2(a^2+b^2)\right).$$

Que además es el punto medio de los segmentos AA', BB' y CC'. Por los triángulos son simétricos respecto a X_{39}. ◪

> Los puntos P (en la circunferencia circunscrita) que están en sus correspondientes rectas $B_aC_bA_c$ y $A_bB_cC_a$ son los conjugados isogonales de los brocardianos del punto de Steiner; es decir, los cuartos puntos de intersección de la circunferencia circunscrita con las elipses circunscritas con perspectores los puntos de Brocard.



La condición para que el punto P esté en al recta B_aC_b es:

$$c^2(c^2-a^2)u^2v + c^2(b^2-a^2)uv^2 + b^2(a^2-b^2)u^2w + a^2(a^2-c^2)v^2w + (a^4+c^4-2a^2c^2)uvw = 0,$$

$$u+v+w=0.$$

La única solución real es[8] $(a^2-c^2 : b^2-a^2 : c^2-b^2)$, cuyo conjugado isogonal es:

$$\left(\frac{a^2}{a^2-c^2} : \frac{b^2}{b^2-a^2} : \frac{c^2}{c^2-b^2}\right).$$

[8] Los brocardianos (AM, §14.4, pag. 58) del punto de Steiner, $X_{99}(1/(b^2-c^2) : 1/c^2-a^2) : 1/(a^2-c^2))$, son los puntos de la recta del infinito $(c^2-a^2 : b^2-a^2 : c^2-b^2)$ y $(a^2-b^2 : b^2-c^2 : c^2-a^2)$.

Este punto es punto de intersección, a parte de los vértices de $\widehat{ABC}$, de la circunferencia circunscrita, $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$, y la elipse circunscrita con perspector el primer punto de Brocard, $a^2c^2yz + a^2b^2zx + b^2c^2xy = 0$.

Similarmente, el único punto P que está en la recta $A_bB_bC_a$ es:

$$\left(\frac{a^2}{b^2-a^2} : \frac{b^2}{c^2-b^2} : \frac{c^2}{a^2-c^2}\right).$$

Hacer notar que en ambos casos el punto de Steiner, X_{99}, pertenece a las rectas $B_aC_bA_c$ y $A_bB_cC_a$ que se obtienen:

$$\frac{x}{b^2-a^2} + \frac{y}{c^2-b^2} + \frac{z}{a^2-c^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a^2-c^2} + \frac{y}{b^2-a^2} + \frac{z}{c^2-b^2} = 0.$$

◪

Los centros de las semejanzas directas asociadas a los vértices de $\widehat{ABC}$ coinciden dos a dos y forman un triángulo cuyos vértices son los puntos (distintos de K) de intersecciones de las simedianas con la circunferencia de Brocard.

De las semejanza asociadas a los vértices de $\widehat{ABC}$ consideradas, tres de ellas son las inversas de las otras tres. Así, tendremos sólo tres centros de semejanza distintos, a saber:

El punto fijo de la semejanza directa definida por $B \mapsto C$ y $C \mapsto A$ (que coincide con la que transforma $A \mapsto C$ y $C \mapsto B$) es $(a^2 : b^2 : 2S_C)$, situado en la simediana por C, $b^2x - a^2y = 0$, y en la circunferencia de Brocard.

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(x+y+z)(b^2c^2x + c^2a^2y + a^2b^2z) = 0$$

Similarmente, el punto fijo de la semejanza directa definida por $A \mapsto B$ y $B \mapsto C$ (que coincide con la que transforma $B \mapsto A$ y $C \mapsto B$) es $(a^2 : 2S_B : c^2)$.

Y el punto fijo de la semejanza directa definida por $A \mapsto B$ y $C \mapsto A$ (que coincide con la que transforma $A \mapsto C$ y $B \mapsto A$) es $(2S_A : b^2 : c^2)$. ◪

Los tres puntos, sobre la circunferencia circunscrita, tales que para cada uno de ellos, la correspondiente recta $B_aC_bA_c$ es paralela a una de las cevianas de un punto Q, forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$ si Q está en la recta del infinito o sobre la hipérbola de Kiepert.

Sean $(p : q : r)$ las coordenadas de un punto Q. Resolviendo el sistema que resulta de imponer que los puntos del infinito de la recta B_aC_b y de la ceviana AQ, coincidan:

$$(a^2u + c^2v + b^2w : c^2u + b^2v + a^2w : b^2u + a^2v + c^2w) = \lambda(-q-r : q : r), \quad u+v+w=0,$$

resulta que el punto, en el circunferencia circunscrita, para el cual dichas rectas son paralelas tiene de coordenadas:

$$A_Q\left(\frac{a^2}{(c^2-a^2)q + (b^2-a^2)r} : \frac{b^2}{(c^2-b^2)q + (a^2-c^2)r} : \frac{c^2}{(a^2-b^2)q + (c^2-b^2)r}\right).$$

Similarmente, los puntos que dan rectas paralelas a las cevianas BQ y CQ son:

$$B_Q\left(\frac{a^2}{(b^2-c^2)r+(a^2-c^2)p}:\frac{b^2}{(a^2-b^2)r+(c^2-b^2)p}:\frac{c^2}{(a^2-c^2)r+(b^2-a^2)p}\right),$$

$$C_Q\left(\frac{a^2}{(b^2-a^2)p+(c^2-b^2)q}:\frac{b^2}{(c^2-a^2)p+(b^2-a^2)q}:\frac{c^2}{(b^2-c^2)p+(a^2-c^2)q}\right).$$

El triángulo $\widehat{A_QB_QC_Q}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$ si:

$a^2b^2c^2(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)(p+q+r)((b^2-c^2)qr+(c^2-a^2)rp+(a^2-b^2)pq)=0.$

Es decir, si Q está en la recta del infinito o en la hipérbola de Kiepert.

Para un punto arbitrario de la hipérbola de Kiepert,

$$Q\left(\frac{1}{S_A+t}:\frac{1}{S_B+t}:\frac{1}{S_C+t}\right),$$

el centro de perspectividad es:

$$\begin{aligned}Q' \quad \Big(&a^2\left(a^2(b^2+c^2)-b^4-c^4+2(2a^2-b^2-c^2)t\right):\\ &b^2\left(b^2(c^2+a^2)-c^4-a^4+2(2b^2-c^2-a^2)t\right):\\ &c^2\left(c^2(a^2+b^2)-a^4-b^4+2(2c^2-a^2-b^2)t\right)\Big).\end{aligned}$$

Esta es la ecuación paramétrica del eje de Brocard:

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}x+\frac{c^2-a^2}{b^2}y+\frac{a^2-b^2}{c^2}z=0.$$

Si ahora tomamos el conjugado isogonal Q'^* de Q', resulta que Q'^* es el punto diametralmente opuesto de Q en la hipérbola de Kiepert:

$$Q'^*\left(\frac{1}{b^4+c^4-(b^2+c^2)(a^2-2t)-4a^2t}:\frac{1}{c^4+a^4-(c^2+a^2)(b^2-2t)-4b^2t}:\frac{1}{a^4+b^4-(a^2+b^2)(c^2-2t)-4c^2t}\right).$$

Si Q está en la recta del infinito, $p+q+r=0$, las tres cevianas son paralelas y si también lo son a la recta $B_aC_bA_c$, el punto P coincide con A_Q, B_Q y C_Q en el punto:

$$\left(\frac{a^2}{a^2p+c^2q+b^2r}:\frac{b^2}{c^2p+b^2q+a^2r}:\frac{c^2}{b^2p+a^2q+c^2r}\right).$$

Por ejemplo, para que las rectas $B_aC_bA_c$ sean paralelas a la recta de Euler, $Q=X_{30}$ y $P=X_{842}$. Algunos otros pares (Q,P) son los siguientes:

$$(X_{511},X_{2698}),\quad (X_{512},X_{805}),\quad (X_{513},X_{2703}),\quad (X_{514},X_{2702}),\quad (X_{515},X_{2708}),\quad (X_{516},X_{2700}),$$
$$(X_{517},X_{2699}),\quad (X_{518},X_{2711}),\quad (X_{519},X_{2712}),\quad (X_{520},X_{2713}),\quad (X_{521},X_{2714}),\quad (X_{522},X_{2701}),$$
$$(X_{523},X_{691}),\quad (X_{524},X_{843}),\quad (X_{525},X_{2715}),\quad (X_{530},X_{2379}),\quad (X_{531},X_{2378}),\quad (X_{542},X_{74}),$$
$$(X_{543},X_{111}),\quad (X_{690},X_{110}),\quad (X_{1499},X_{2709}),\quad (X_{1503},X_{2710}),\quad \cdots$$