Superficies paramétricas

Angel Montesdeoca

Lunes 12 de Mayo del 2008

1 Considérese la hélice circular dada por $\alpha(v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, bv)$. Por cada punto de la hélice, trácese una recta paralela al plano xy que corta al eje z. La superficie generada por estas rectas se denomina helicoide.

a) Establecer que $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, bv)$ es una parametrización del helicoide.

b) Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental para esta parametrización.

c) Calcular el perímetro del triángulo curvilíneo limitado por las curvas:

$$u = \frac{bv^2}{2}, \qquad u = -\frac{bv^2}{2}, \qquad v = 1.$$

2 Sea $\vec{\alpha}$ una curva con parametrización natural en una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$. En lugar del campo de sistemas de referencia de Frenet de $\vec{\alpha}$, consideremos el campo de sistema de referencia $\{\vec{t}, \vec{u}, \vec{\mathbf{N}}\}$, donde $\vec{t}$ es la tangente unitaria de $\vec{\alpha}$, $\vec{\mathbf{N}}$ es la normal de la superficie restringuida a $\vec{\alpha}$ y $\vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}$.

a) Verifíquese que

$$\begin{array}{rcrrr} d\vec{t}/ds & = & & \kappa_g \vec{u} & +\kappa_n \vec{\mathbf{N}} \\ d\vec{u}/ds & = & -\kappa_g \vec{t} & & +\tau_g \vec{\mathbf{N}} \\ d\vec{\mathbf{N}}/ds & = & -\kappa_n \vec{t} & -\tau_g \vec{u} & \end{array}$$

donde $\kappa_n = S(\vec{t}) \cdot \vec{t}$ es la curvatura normal $k(\vec{t})$ de $\mathcal{M}$ en la dirección de $\vec{t}$, $\tau_g = S(\vec{t}) \cdot \vec{u}$ es la denominada torsión geodésica y κ_g se llama curvatura geodésica de $\vec{\alpha}$.

b) Deducir que $\vec{\alpha}$ es geodésica si y sólo si $\kappa_g = 0$; $\vec{\alpha}$ es asintótica si y sólo si $\kappa_n = 0$; $\vec{\alpha}$ es de curvatura si y sólo si $\tau_g = 0$.