Derivada covariante. Tansporte paralelo

Angel Montesdeoca

Miércoles 11 de Febrero del 2009

1 Sea $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ una curva alabeada con parametrización natural. En la superficie

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(s,v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{b}(s) \qquad (\vec{b} \text{ binormal de } \vec{\alpha})$$

encontrar la derivada covariante a lo largo de la curvas coordenadas del campo de vectores tangente unitario a las curvas $s = cte$. Aplicar el resultado para calcular la curvatura geodésica de las curvas paramétricas $v = cte$.

2 Consideremos el campo de vectores en $I\!R^3$, $X = y^2 E_1 + (x+z)E_2 + x^3 E_3$.

a) Calcular su derivada covariante en un punto genérico de $I\!R^3$.

b) Calcular la derivada covariante en $(0,0,1)$ sobre la esfera unidad.

3 Sea la parametrización de la esfera de radio a $\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (a\,\cos\theta\,\cos\phi, a\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi, a\,\operatorname{sen}\theta)$.

Calcular la derivada covariante respecto a ϕ del campo de vectores unitario formado por las tangentes unitarias a los meridianos a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$.

4 Sea $\mathcal{C}$ el paralelo $\theta = \theta_0$ sobre la esfera de ecuación: $\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (a\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\phi, \quad a\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi, \quad a\,\cos\theta)$.

A) Probar que el transporte paralelo del vector $\vec{\mathbf{x}}_1(\theta_0,\phi)$ a lo largo de $\mathcal{C}$ es

$$Y(\phi) = \cos((\cos\theta_0)(\phi-\phi_0))\vec{\mathbf{x}}_1 - \frac{\operatorname{sen}((\cos\theta_0)(\phi-\phi_0))}{\operatorname{sen}\theta_0}\vec{\mathbf{x}}_2.$$

B) $Y(0) = Y(2\pi) \Rightarrow \mathcal{C}$ es el ecuador.

5 Consideremos la parametrización de la esfera $\vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2) = (\cos u^2 \cos u^1, \ \cos u^2 \operatorname{sen} u^1, \ \operatorname{sen} u^2)$.

Se desplaza paralelamente el vector de componentes $(1,0)$ desde el punto de coordenadas $(0,0)$ hasta el punto $(\pi/\sqrt{2},0)$ a lo largo del ecuador, luego hasta el punto $(\pi/\sqrt{2},\pi/4)$ a lo largo del meridiano $u^1 = \pi/\sqrt{2}$, después hasta el punto $(0,\pi/4)$ a través del paralelo $u^2 = \pi/4$, y por último hasta el punto inicial por el meridiano $u^1 = 0$. Determinar el ángulo entre el vector dado y el vector obtenido al final del desplazamiento.

6 Dado el helicoide de ecuación $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v)$ hallar el transporte paralelo del vector $(1,0)$ desde el punto $(a,0)$ hasta el $(a,\pi/2)$ (a es una constante positiva no nula) a lo largo de la hélice $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, t)$.

7 Describir el transporte paralelo de un vector tangente a un meridiano a lo largo de un paralelo en la esfera.