

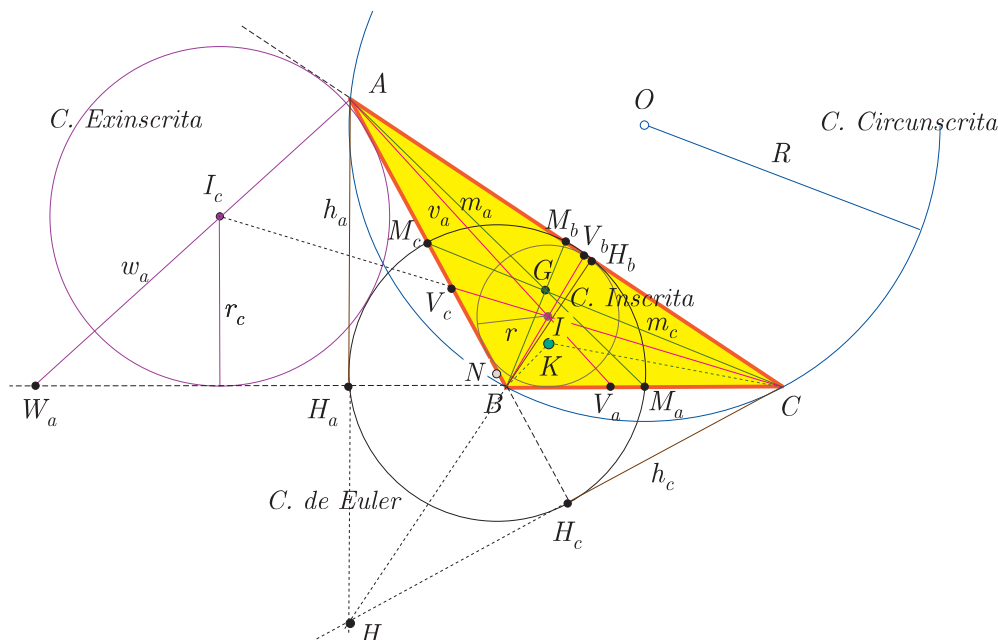
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Angel Montesdeoca
 La Laguna, 22 de Marzo del 2017
 Versión 2.1703222211

⊗ Notaciones

En un triángulo \widehat{ABC} se designa por:

- a, b y c , las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C , respectivamente.
- A, B y C (ó $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$) los ángulos en los vértices A, B y C .
- h_a, h_b y h_c , las alturas desde los vértices A, B y C , y por H_a, H_b y H_c sus pies.
- m_a, m_b y m_c las medianas desde los vértices A, B y C , y por M_a, M_b y M_c sus pies.
- n_a, n_b y n_c las simedianas desde los vértices A, B y C , y por N_a, N_b y N_c sus pies.
- v_a, v_b y v_c , las bisectrices desde los vértices A, B y C , y por V_a, V_b y V_c sus pies.
- w_a, w_b y w_c , las bisectrices exteriores desde los vértices A, B y C , y por W_a, W_b y W_c sus pies.
- R , el radio de la circunferencia circunscrita.
- r , el radio de la circunferencia inscrita.
- r_a, r_b y r_c los radios de las circunferencia exinscritas.
- s el semiperímetro, $s = (a + b + c)/2$.
- Δ el área.
- I el incentro, centro de la circunferencia inscrita $I(r)$.
- I_a, I_b y I_c los centros de las circunferencias exinscritas.
- G el baricentro, punto de intersección de las medianas.
- O el circuncentro, centro de la circunferencia circunscrita $O(R)$.
- H el ortocentro, punto de intersección de las alturas.
- N el centro de la circunferencia de los nueve puntos (circunferencia de Euler) $N(R/2)$.
- K el simediano, intersección de las rectas simétricas de las medianas respecto a la bisectrices respectivas.



- \overline{PQ} la recta que pasa por los puntos P y Q o conjunto de todos sus puntos.
- \overline{PQ} el segmento que une los puntos P y Q o distancia entre P y Q ($d(P, Q)$).
- $d(P, Q)$, $d(P, UV)$, distancia entre dos puntos o de un punto a una recta.
- [num] para el caso "num" en Fursenko ([4]).

- [-num-] para el caso "Exercice num)" en Luís Lopes ([7]).
- [=num=] para el caso "num." en W. Wernick ([12]).
- [*num*] para el caso "num." en Γεωμετρίων ([5]).
- [:num:] para el caso "num)" en Sapiña ([11]).
- $|\mathcal{A}| = n$, si el cardinal del conjunto \mathcal{A} es igual a n .

⊛ **Resolución de triángulos conocidos ciertos datos**

(El orden de esta lista está dado según se han introducido las notaciones anteriores. Los números de orden varían al añadir un nuevo caso.)

1)	a	$b = 2a$	$v_c = AV_c$	2416
2)	a	b	c	[1].....	1997
3)	a	b	\hat{A}	[2].....	2024
4)	a	b	\hat{C}	[3].....	2016
5)	a	b	h_a	[4].....	2001
6)	a	b	h_c	[5].....	2002
7)	a	b	m_a	[6].....	2017
8)	a	b	m_c	[7].....	1990
9)	a	b	v_c	[9] [*4*].....	2010
10)	a	b	R	[10].....	2084
11)	a	b	$\hat{A} - \hat{B}$	[*1076*].....	2082
12)	a	b	$AB IO$	2424
13)	a	b	$AM_a \perp BM_b$	2415
14)	a	b	$\widehat{AM_cC}$	2256
15)	a	b	R	minimo.....	2166
16)	a	b	$\overline{M_aV_a}$	2049
17)	a	b	$\overline{M_cV_c}$	2048
18)	a	\hat{A}	\hat{B}	[16].....	2028
19)	a	$\hat{A} = 90$	\hat{B}	[16].....	2106
20)	a	\hat{A}	h_a	[17].....	2005
21)	a	\hat{A}	h_b	[18] [-19-].....	2171
22)	a	\hat{A}	m_a	[19].....	2109
23)	a	\hat{A}	m_b	[20].....	1986
24)	a	\hat{A}	v_a	[21] [-28-].....	1980
25)	a	$\hat{A} = 90$	v_a	[21].....	2094
26)	a	$\hat{A} = 90$	v_b	[22].....	1978
27)	a	\hat{A}	w_a	[: 429 :].....	2555
28)	a	\hat{A}	R	[23].....	2156
29)	a	\hat{A}	r	[24].....	2110
30)	a	\hat{A}	$2s$	[27].....	2013
31)	a	$\hat{A} = 90$	$2s$	[27].....	1875
32)	a	\hat{A}	$a \cdot b$	2157
33)	a	\hat{A}	$b + c$	2215
34)	a	\hat{A}	b/c	2521
35)	a	\hat{A}	$b \cdot c$	2160
36)	a	\hat{A}	$(b - c)/(b + c)$	2520

37)	a	\hat{A}	$b + 3c$	2107
38)	a	$\hat{A} = 90$	b/c	2332
39)	a	\hat{A}	$u \cdot b + v \cdot c$	2108
40)	a	\hat{A}	AI/IV_a	2146
41)	a	$\hat{A} = 90$	$AM_a \perp BM_b$	2098
42)	a	\hat{A}	$BM_b \perp CM_c$	2152
43)	a	$\hat{A} = 90$	$Z \in BC$	1799
44)	a	\hat{B}	\hat{C} [29]	2088
45)	a	\hat{B}	h_a [30]	2006
46)	a	\hat{B}	h_b [31]	2148
47)	a	\hat{B}	h_c [32][−22−]	2175
48)	a	\hat{B}	v_b [37]	2159
49)	a	\hat{B}	$2s$ [44]	2038
50)	a	\hat{B}	$b - c$	2062
51)	a	$\hat{B} = 90$	$b - c$	2011
52)	a	\hat{B}	$b - h_a$	2122
53)	a	\hat{B}	$AK \cap BI \cap CH \neq \emptyset$	2534
54)	a	$\hat{B} = 90$	$h_b = \overline{H_b M_b}$	2129
55)	a	$\hat{B} = 90$	$G \in I(r)$	2519
56)	a	\hat{B}	V_a	2434
57)	a	h_a	h_b [46]	2004
58)	a	h_a	m_a [47]	2022
59)	a	h_a	R [51]	2147
60)	a	h_a	r [52][−153−]	2172
61)	a	h_a	b/c	2145
62)	a	h_a	$\widehat{ABM_b}$ [: 288 :]	2526
63)	a	h_b	h_c [57]	2003
64)	a	h_b	m_b [59]	2032
65)	a	h_b	v_c [63]	2033
66)	a	m_a	m_b [71]	1984
67)	a	m_b	m_c [80]	1983
68)	a	v_a	R [92][−195−]	2176
69)	a	v_a	V_a	2144
70)	a	v_b	$b = c$	2074
71)	a	R	r [106][−215−]	2036
72)	a	R	$\hat{B} - \hat{C}$	2471
73)	a	R	\overline{OH}	1975
74)	a	r	$ I(r) \cap M_a(a/2) = 1$	2118
75)	a		$AB = AC, a = BD = AD, a \in AC$	2487
76)	a		$7\widehat{BAM_a} = 7\hat{C} = 2\hat{B}$	2274
77)	a		$R = a - c \hat{A} - \hat{C} = 90$	2403
78)	a		$P \in I(r) \cap BC \quad I(r) \cap M_a(a/2) = 1$	2119
79)	\hat{A}	$b + c$	$h_b + \overline{H_b C}$	2527
80)	\hat{A}	\hat{B}	\hat{C} vértice $A, B \in P(r_1)$ vértice $C \in P(r_2)$	2481
81)	\hat{A}	\hat{B}	h_a [123]	2007
82)	\hat{A}	\hat{B}	m_a [125]	1998
83)	\hat{A}	\hat{B}	v_a [128]	2034
84)	\hat{A}	\hat{B}	w_a [−10−]	2168

85)	\hat{A}	\hat{B}	R	[129]	[-12-]	2169
86)	\hat{A}	\hat{B}	r	[130]		2072
87)	$\hat{A} = 90$	\hat{B}	r	[130]		2067
88)	\hat{A}	\hat{B}	r_a	[131]	[-14-]	2170
89)	\hat{A}	\hat{B}	$2s$	[133]		2061
90)	\hat{A}	\hat{B}	Δ			2112
91)	\hat{A}	\hat{B}	$a + b$			2217
92)	\hat{A}	\hat{B}	$a + c$			2216
93)	\hat{A}	h_a	h_b	[135]		2009
94)	\hat{A}	h_a	m_a	[136]		2056
95)	$\hat{A} = 90$	h_a	m_a	[136]		2065
96)	$\hat{A} = 90$	h_a	m_b	[137]		2012
97)	\hat{A}	h_a	R	[140]		2059
98)	$\hat{A} = 90$	h_a	r			2154
99)	\hat{A}	h_a	$2s$	[144]		2086
100)	$\hat{A} = 90$	h_a	$2s$	[144]		2097
101)	\hat{A}	h_b	h_c	[146]		2008
102)	\hat{A}	m_a	m_b	[160]		1999
103)	$\hat{A} = 90$	m_a	v_a	[161]		1856
104)	\hat{A}	m_a	r	[164]		2041
105)	\hat{A}	m_a	r_a	[165]		2042
106)	\hat{A}	m_b	m_c	[169]		1987
107)	$\hat{A} = 90$	m_b	$2s$	[178]		2023
108)	\hat{A}	v_a	R	[181]	[-101-]	2177
109)	\hat{A}	v_a	$b + c$			2121
110)	\hat{A}	v_a	$b \cdot c$			2091
111)	\hat{A}	v_a	$b + c$			2092
112)	\hat{A}	v_a	$b - c$			2547
113)	\hat{A}	R	r	[195]		2037
114)	\hat{A}	R	b/c	[: 286 :]		2524
115)	$\hat{A} = 90$	R	$O \ Y \in AC \ Z \in AB$			2018
116)	$\hat{A} = 90$	R	$\widehat{H_a A M_a}$			2096
117)	\hat{A}	r	$2s$	[202]		2060
118)	\hat{A}	$2s$	$P \in BC$			2377
119)	$\hat{A} = 90$	$1/a^2 + 1/b^2 = 1/m^2$	$1/a + 1/b = 1/n$			2369
120)	\hat{A}	$a + b$	$a + c$			2020
121)	\hat{A}	$a - b$	$c - b$			2043
122)	\hat{A}	$b \cdot c$	$BM_b \perp CM_c$			2158
123)	\hat{A}	$b + h_a$	$b = c$			2153
124)	$\hat{A} = 90$	$vértice : A \in \ell$	$vértice : B, C$			1985
125)	\hat{A}	$AM_a \cap BV_b$				2063
126)	$\hat{A} = 60$	$2s = 4h_a$				1624
127)	\hat{A}	G	$B \in p \ C \in q$	[: 297 :]		2529
128)	$\hat{A} = 90$	V_a	V_b	V_c		1982
129)	h_a	h_b	h_c	[211]		1613
130)	h_a	h_b	m_a	[212]		2029
131)	h_a	h_b	m_c	[213]	[: 290 :]	2027

132)	h_a	m_a	b/c	2194
133)	h_a	m_a	m_b [222]	1989
134)	h_a	m_a	v_a [223] [*22*]	2031
135)	h_a	m_a	r [226]	2138
136)	h_a	m_a	$a = b$ [: 292 :]	2538
137)	h_a	m_a	$\hat{A} = \hat{B}$ [: 292 :]	2528
138)	h_a	m_b	m_c [231]	1988
139)	h_a	R	r	2265
140)	h_a	r	r_a [262]	2140
141)	h_a	r	$b - c$	2137
142)	h_a	r	$\frac{I(r) \cap BC}{I_a(r_a) \cap BC}$	2139
143)	h_a	$2s$	h_b máxima	2541
144)	h_a		$\widehat{BAM}_a = \widehat{M_aAH}_a = \widehat{H_aAC}$	2057
145)	h_a	$B - C$	$\frac{CH_a}{BH_b}$ [: 287 :]	2525
146)	h_a	OM_a	OM_b OM_c	2095
147)	m_a	m_b	m_c [273][-288-]	1939
148)	m_a	m_b	Δ [281] [: 285 :]	2523
149)	v_a	v_b	v_c [313]	2035
150)	v_a		$\widehat{BAM}_a = \widehat{M_aAH}_a = \widehat{M_aHaC}$	2151
151)	R	$b + c$	$\hat{B} - \hat{C}$ [: 295 :]	2542
152)	R	$a + h_a$	$b = c$	2196
153)	R	$a + h_a$	$b = c$	1339
154)	R	O	$X \in AH \cap O(R)$ $Y \in AG \cap O(R)$ $Z \in AI \cap O(R)$	2030
155)	R	H_a	M_a vértice : A	2114
156)	R	$N \in$	$O(R)$	1798
157)	r	r_a	$b - c$	2550
158)	r	r_a	$b + c$	2551
159)	r		$\widehat{BAM}_a = \widehat{M_aAH}_a = \widehat{M_aHaC}$	2150
160)	r	IA	IB IC	1976
161)	r_a	r_b	r_c	2304
162)	r_a	r_b	Δ [349]	2053
163)	r_b	r_c	$b - c$	2553
164)	r_b	r_c	$b + c$	2554
165)				2367
166)		$a = b = c$	P PA PB PC	2412
167)		AB	AC IH	2531
168)		AB	AC OH	2532
169)		$A \in NP$, $B \in PMP$	$C \in MN$; $M \in B'C'$, $N \in C'A'$, $P \in A'B'$; $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$	2409
170)		$h_a = a$	$m_b = b$	2546
171)	I	IA	IB IC $Z \in BC$	1974
172)	I	G	vértice : A	2164
173)	I	O	vértice : A	2040
174)	I	O	H	2130
175)	I	O	N	2093
176)	I	H	H_a [= 131 =]	2535
177)	I	M_a	vértice : A $d(I, M_a) = d(A, IM_a)$	2163
178)	G	vértice : A	$B \in p$ $C \in q$ [: 294 :]	2292
179)	G	BC	$P \in AB$ $Q \in AC$	2125
180)	G	BC	$P \in AB$ $Q \in AC$	2120

181)	O H eje órtico.....	2536
182)	O H_a V_a	2104
183)	O H vértice : A	2087
184)	O N M_a	2039
185)	O K vértice : A	2113
186)	O M_a H_b	2530
187)	O V_a vértice : A	2179
188)	H_a H_b AB	2090
189)	H_a H_b H_c [*24*].....	1979
190)	H_a H_b V_a	2488
191)	H $b = c$ AB $X \in BC$ $HX \parallel AB$	2071
192)	H M_a M_b	2375
193)	H V_a W_a	2513
194)	M_a N_a vértice : A	2537
195)	M_a M_b M_c [*23*].....	2089
196)	M_a V_a E_a	2376
197)	M_a W_a E_a	2378
198)	$V_a M_b D$ triángulo ceviano.....	2533
199)	X $AX = p$ $BX = q$ $CX = r$ $a = b = c$	2374
200)	$X \in BC$ $Y \in CA$ $Z \in AB$ $BX : XC = p$ $CY : YA =$ q $AX : ZB = r$	2136

Ver también la página WEB:

<http://webpages.ull.es/users/amontes/angel/pdf/ct.pdf>.

⊛ **Algunas construcciones básicas**

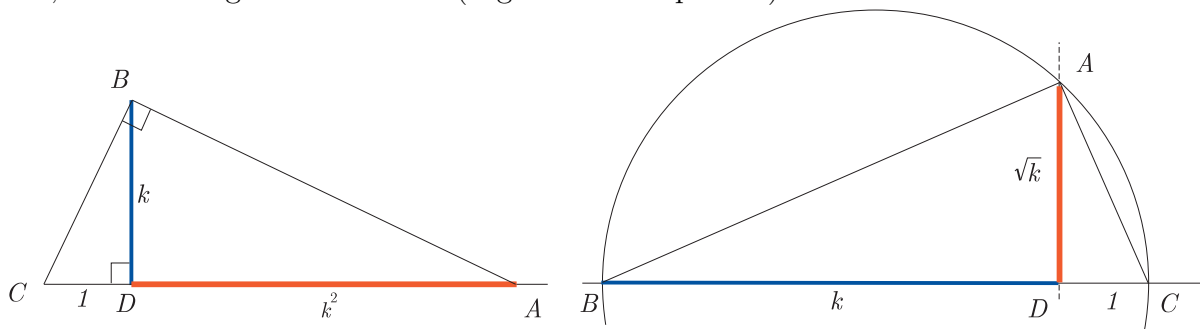
Exponemos aquí ciertas construcciones (algunas poco justificas) que se utilizan frecuentemente en la resolución de triángulo y que no siempre se detallan allí.

C1. Construir un segmento de longitud k^2

Sobre la perpendicular en el extremo D de un segmento CD de longitud unidad, trazamos un segmento DB de longitud k dada. La perpendicular a CB en B corta a la recta CD en A . El triángulo \widehat{ABC} es rectángulo y se verifica que la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmento en que divide a la base; es decir,

$$\overline{BD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DA}, \quad a^2 = 1 \cdot k = k.$$

Así, DA es el segmento buscado (Figura de la izquierda).



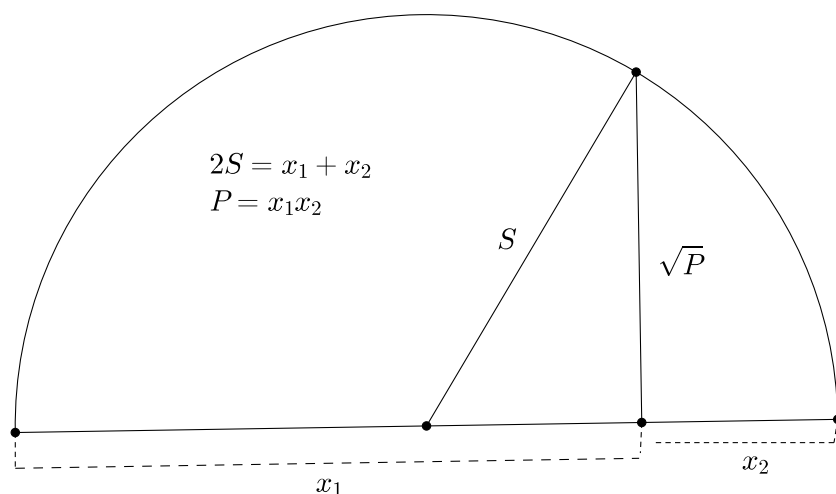
C2. Construir un segmento de longitud \sqrt{k}

Sobre una misma recta se trazan dos segmentos contiguos BD de longitud k y DC de longitud unidad. Se traza la circunferencia de diámetro BC y la perpendicular por D a BC . Ambas se cortan en A y el triángulo \widehat{ABC} es rectángulo en A . La altura AD es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC} = k \cdot 1 = k.$$

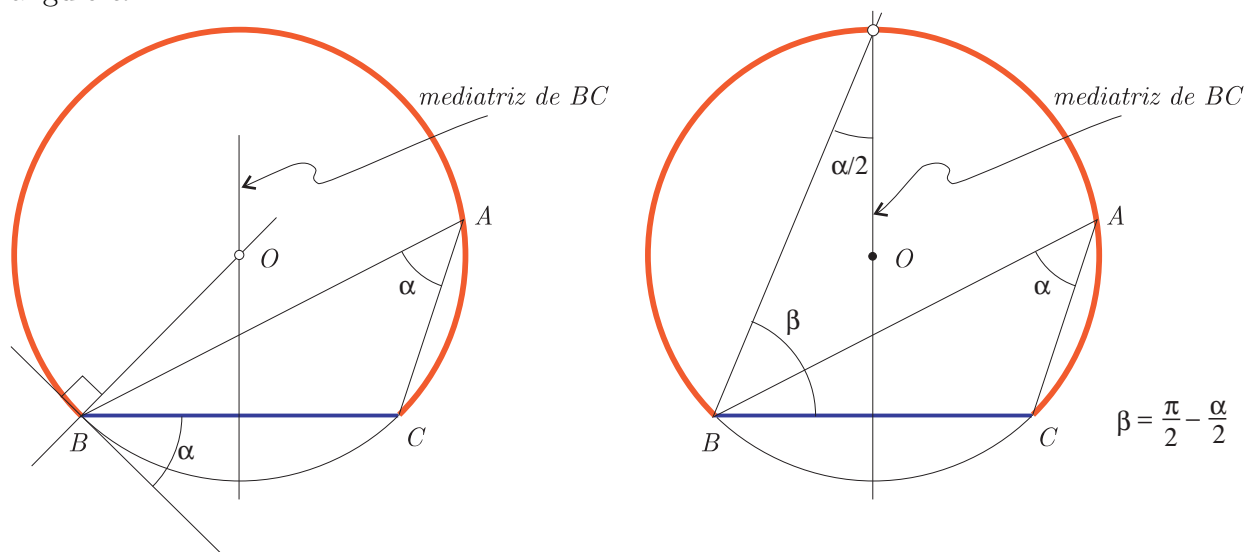
Luego, AD es el segmento pedido de longitud \sqrt{k} . (Figura de la derecha)

C3. Construir la raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - 2Sx + P = 0$ ($S > 0$, $P > 0$)



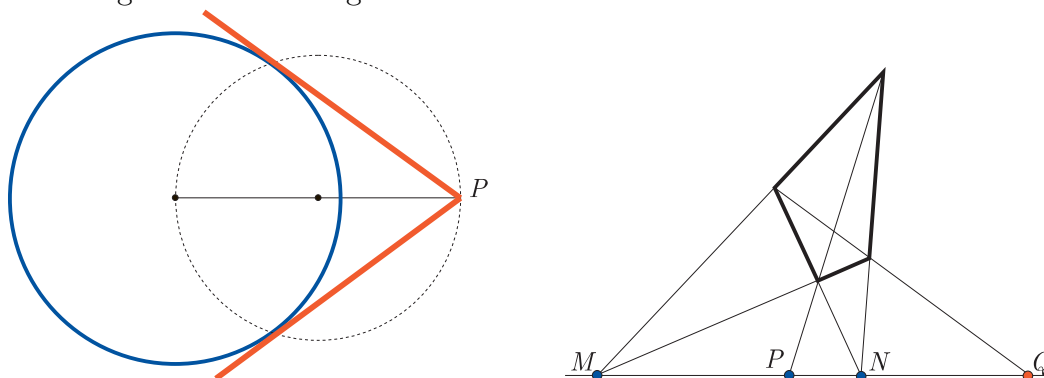
C4. Arco capaz del ángulo α sobre el segmento BC

Es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve al segmento BC bajo el mismo ángulo α .



C5. Tangente a una circunferencia desde un punto exterior

Dada la circunferencia y punto P exterior, se traza la circunferencia de diámetro el segmento que une P con el centro de la circunferencia dada. Los puntos de corte de ambas circunferencias son los de tangencia de las tangentes desde P .

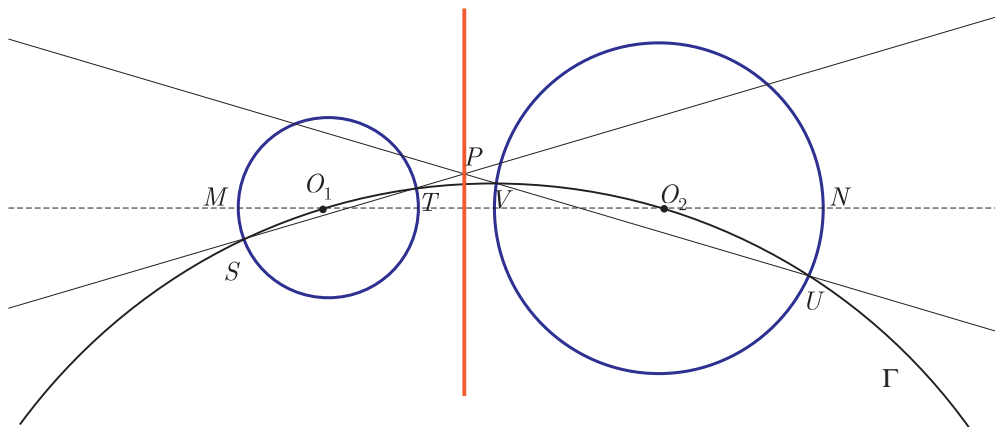


C6. Cuarto armónico

Construir el punto Q armónicamente separado de P respecto a M y N .

Utilizamos el hecho de que en un cuadrivértice dos puntos diagonales están **separados armónicamente** de los dos puntos en que la recta que los une corta a los dos lados opuestos del cuadrivértice que pasan por el tercer punto diagonal.

C7. Eje radical



El eje radical de dos circunferencias $O_1(R_1)$ y $O_2(R_2)$, cuando éstas se cortan, es la recta que pasa por los puntos de intersección de ambas.

Cuando las circunferencias son disjuntas, es decir, cuando sean exteriores una de la otra o cuando una está contenida en la otra, acudimos al caso anterior sin más que trazar una circunferencia que sea secante a las dos circunferencias dadas (no concéntricas).

Construimos la intersección de las dos circunferencias con la recta que une sus centros. Tomemos de estos puntos el segmento MN sobre la recta O_1O_2 , de tal forma que el segmento O_1O_1 quede en su interior. La circunferencia Γ que pasa por O_1 y O_2 y de radio MN corta a las dos circunferencias $O_1(R_1)$ y $O_2(R_2)$, incluso cuando una está contenida en la otra, puesto que su radio es $R_1 + R_2 + O_1O_2$.

Si ST es el eje radical de $O_1(R_1)$ y Γ y UV es el eje radical de $O_2(R_2)$ y Γ , la intersección P de estos dos ejes radicales pertenece pues al eje radical de las dos circunferencias dadas, el cual es además perpendicular a O_1O_2 .

Referencias

- [1] **José Echegaray**.- Problemas de Geometría. Madrid, 1865, Facsimil editado por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. 2000
- [2] **Harold Connelly**.- An extension of triangle constructions from located points. Forum Geometricorum, 9 (2009) 109–112.
- [3] **Harold Connelly; Beata Randrianantoanina**.- An Angle Bisector Parallel Applied to Triangle Construction. Forum Geometricorum Volume 9 (2009) 161-163.
- [4] **V. B. Fursenko**.- Lexicographical account of constructional problems of triangle geometry problems (en ruso). Mathematics in schools, 1937 (5) pp. 4-30, 1937 (6) pp. 21-45, Moscow, USSR. **Pág. WEB:**
<http://g.boutte.free.fr/geometrie.htm>
- [5] Ludi geometrici. **Pág. WEB:**
<http://www.polarprof.org/geometriagon/>
- [6] **V. Gusev; V. Litvinenko; A. Mordkovich**.- Solving Problems in Geometry. Mir Publishers, 1988.
- [7] **Luís Lopes**.- Manuel de construction de triangles. QED TEXTE, Boucherville, Quebec, 1996.
- [8] **Petru Mironescu and Laurentiu Panaitopol**.- The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. American Mathematical Monthly, 101 (1994) 58-60
- [9] **V. Prasolov**.- Problems on Plane Geometry (to be published) **Pág. WEB:**
<http://www.math.su.se/~mleites/> Books translated
- [10] **P. Puig Adam**.- Curso de Geometría Métrica (2 vols.). Madrid. Ed. Euler, 1986
- [11] **Juan Sapiña Borja**.- Problemas Gráficos de Geometría . Madrid. 1955. **Pág. WEB:**
- [12] **W. Wernick**.- Triangle constructions with three located points. Mathematics Magazine 55(1982)4, pp.227-230.
- [13] **Paul Yiu**.- Elegant Geometric Construct. Forum Geometricorum 5(2005) 75-96.
- [14] **Paul Yiu**.- Conic constructions of a triangle from the feet of its angle bisectors. Journal for Geometry and Graphics 12(2008) 133-144.
- DIRECCIONES ELECTRÓNICAS:
- [15] **Ricardo Barroso Campos**.- Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II, **Pág. WEB:**
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>
- [16] **Alexander Bogomolny**.- The many ways to construct a triangle, **Pág. WEB:**
<http://www.cut-the-knot.org/triangle/index.shtml#table>
- [17] **Quim Castellsaguer**.- Todo Triángulos Web, **Pág. WEB:**
<http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/portada.html>
- [18] **Francisco García Capitán**.- Problemas de Triángulos con Cabri. **Pág. WEB:**
<http://www.garciacapitan.auna.com/ricardo/>
- [19] **Ricard Peiró**.- Resolució de triangles. **Pág. WEB:**
<http://webs.ono.com/rpe1/resolucio1.htm>
- [20] **Vesna Marinkovic**.- On-line compendiums of triangle location construction problems **Pág. WEB:**
<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~vesnap/animations/compendiums.html>
- [21] **The list of Wernick's problems**.- **Pág. WEB:**
http://poincare.matf.bg.ac.rs/~vesnap/animations/compendium_wernick.html

[22] **The Math Forum.**- Ask Dr. Math **Pág. WEB:**

http://mathforum.org/library/drmath/sets/college_constructions.html