REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CURVAS

DADAS EN

IMPLÍCITAS, PARAMÉTRICAS Y POLARES

Angel Montesdeoca[1]
La Laguna. 2003

[1] amontes@ull.es http://www.gt.matfun.ull.es/angel/

Contenido

GRÁFICA DE CURVAS ALGEBRAICAS EN FORMA IMPLÍCITA

El conjunto de puntos del plano ordinario cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación de la forma:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{\substack{i=0,\dots,r \\ j=0,\dots,s}} a_{ij} x_1^i x_2^j = 0,$$

donde los a_{ij} son coeficientes reales, se denomina curva algebraica. El grado del polinomio entero en x_1, x_2 se llama orden de la curva algebraica.

1 Regiones de existencia de la curva

Se factoriza la ecuación de la curva $f(x, y) = 0$ en la forma

$$A(x, y)B(x, y)C(x, y)\cdots = L(x, y)M(x, y)N(x, y)\cdots,$$

de manera que $A(x, y) = 0, B(x, y) = 0, C(x, y) = 0, \dots, L(x, y) = 0, M(x, y) = 0, N(x, y) = 0, \dots$, sean polinomios en x, y, tales que las curvas que ellos representan son fáciles de construir. Cada una de estas curvas dividen al plano en dos regiones, en cada una de las cuales el primer término de cada ecuación de las curvas toma signos contrarios. Sombreando las regiones del plano cuyos puntos dan signos contrarios en los dos miembros de la ecuación de la curva, tal como se ha descompuesto, la curva original no está en las regiones sombreadas y pasa por los puntos de intersección de cada curva representada por cada factor del primer miembro con las representadas por los factores del segundo miembro.

EJEMPLOS:

- (A) $xy(x + y - 2) = x - y + 1$.

Representadas las rectas $x = 0, y = 0, x + y - 2 = 0, x - y + 1 = 0$ (ver Figura 1, (A)), se tienen once regiones. Al lado de cada recta se ha indicado los signos $(+)$ y $(-)$ que toman los primeros miembros de dichas ecuaciones en las regiones en que cada recta divide al plano. En la región marcada con el ① se tienen los siguientes signos para los factores de la descomposición hecha: $\begin{array}{cccc} x & y & x-y+1 & x+y-2 \\ + & + & + & - \end{array}$, luego no existe curva en tal región, pues el primer miembro toma signo distinto al del segundo miembro. De forma análoga se determinan la no existencia o posible existencia en las demás regiones. Se observa que si en una región no existe curva, en todas las regiones adyacentes puede existir curva.

Serán puntos de la curva los de intersección de las rectas del primer miembro con las del segundo, o sea, los puntos $(0, 1), (-1, 0), (1/2, 3/2)$.

(B) De una ecuación se pueden tener varias descomposiciones, en este caso se obtienen las regiones de no existencia de curva solapando las obtenidas en cada descomposición; por ejemplo, $x^2y^2 - x^3y - 4y^2 + x^2 = 0$, se puede descomponer en

$$x^2y(y - x) = (2y - x)(2y + x) \qquad \text{o} \qquad y^2(x - 2)(x + 2) = x^2(xy - 1).$$

En la primera descomposición, las cinco rectas $x = 0, y = 0, y - x = 0, 2y - x = 0, 2y + x = 0$, dividen al plano en 10 regiones, no existiendo curva en los 4 sectores de sombreados suave (ver Figura 1 (B)). Obsérvese que en este caso no es necesario representar la línea $x^2 = 0$, pues su primer miembro es positivo en todo el plano.

La segunda descomposición divide al plano en 12 regiones, mediante las rectas $y = 0, x - 2 = 0, x + 2 = 0, x = 0$ y la hipérbola equilátera $xy - 1 = 0$, no existiendo curva en 6 de ellas, marcadas con sombreado más fuerte. Nótese de nuevo que para determinar las regiones de existencia, no es necesario considerar las rectas $x^2 = 0$ e $y^2 = 0$.

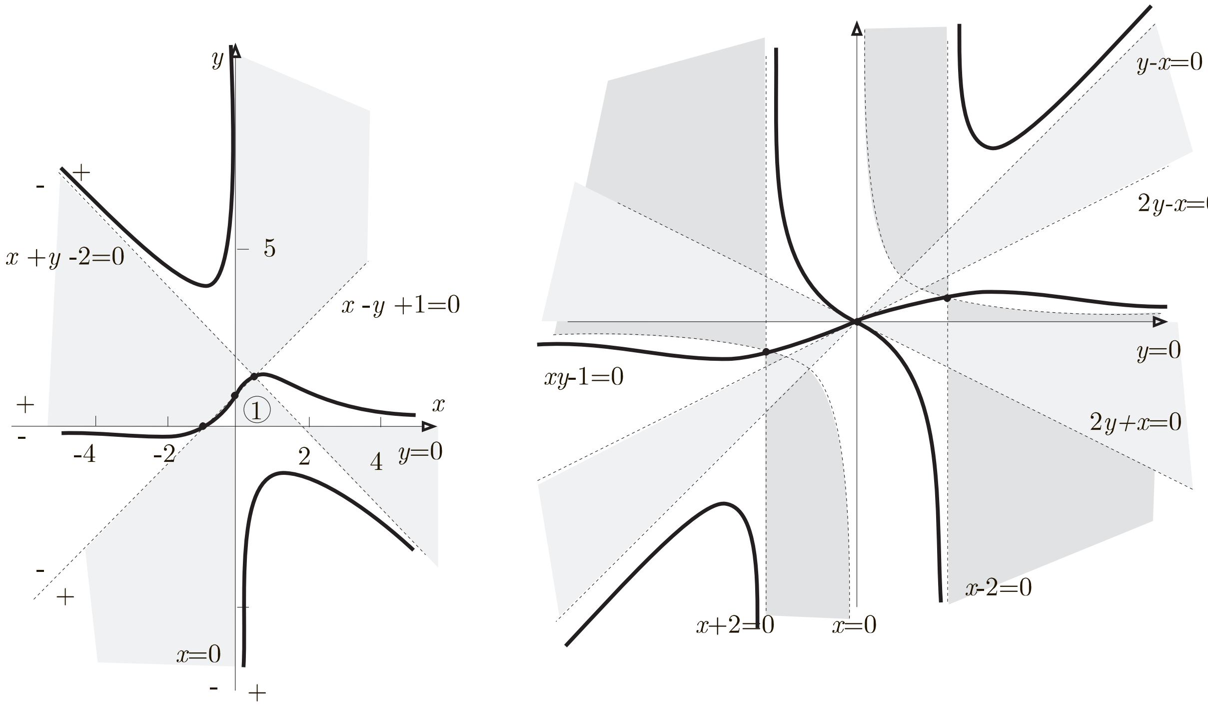
La curva pasa por el $(0, 0)$ y por los puntos de intersección de la hipérbola $xy - 1 = 0$ con las rectas $x - 2 = 0$ e $x + 2 = 0$.

2 Simetrías

Considérese una curva algebraica de ecuación $f(x, y) = 0$.

■ La curva es simétrica respecto al eje OY si el punto (x, y) pertenece a ella, también contiene al punto $(-x, y)$, es decir, si $f(x, y) = f(-x, y) = 0$.

■ La curva es simétrica respecto al eje OX si $f(x, y) = f(x, -y) = 0$.



(A) (B)

Figura 1: Regiones de existencia

■ Ejes de simetría ortogonal: Si hay un eje de simetría y el origen no está en él, realizando un cambio de coordenadas con el nuevo origen O' en cualquier punto (a, b) de dicho eje y tomando éste como nuevo eje de abscisas $O'X'$, las formas de cambio de coordenadas ortogonales son:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a, \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b,$$

siendo α el ángulo que forman $O'X'$ y OX. Para que la curva sea simétrica respecto al eje $O'X'$, se ha de verificar:

$$f(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a, x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b) = f(x' \cos\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha + a, x' \operatorname{sen}\alpha - y' \cos\alpha + b) = 0.$$

De esta identidad se deduce el valor, o valores, que deben tomar las incógnitas α, a y b, para determinar el eje o ejes de simetría ortogonal.

Casos particulares:

■ La curva es simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante si $f(x, y) = f(y, x)$, es decir, si:

$$f(x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4}) = f(x' \cos\frac{\pi}{4} + y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - y' \cos\frac{\pi}{4}).$$

■ Análogamente, la curva es simétrica respecto a la bisectriz del segundo cuadrante si $f(x, y) = f(-y, -x)$

<u>EJEMPLOS:</u>

• Sea (ver Figura 2)

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3 + (x^2 + y^2)^2.$$

La transformación de ejes, llevando el nuevo origen a un punto desconocido $O'(a, b)$ y el eje $O'X'$, también desconocido, que forme un ángulo α con OX, da:

$$3(b+x' \operatorname{sen}\alpha+y' \cos\alpha)(a+x' \cos\alpha-y' \operatorname{sen}\alpha)^2-(b+x' \operatorname{sen}\alpha+y' \cos\alpha)^3+((b+x' \operatorname{sen}\alpha+y' \cos\alpha)^2+(a+x' \cos\alpha-y' \operatorname{sen}\alpha)^2)^2$$

Desarrollando y ordenando se tiene un polinomio de quinto grado, el cual debe ser idéntico al que resulta de cambiar y' por $-y'$.

Utilizando MATHEMATICA, igualando a cero los coeficientes con signo contrario, que resultan ser cuatro, resolviendo las ecuaciones que resultan en las variables $a, b, u = \cos\alpha$ y $v = \operatorname{sen}\alpha$:

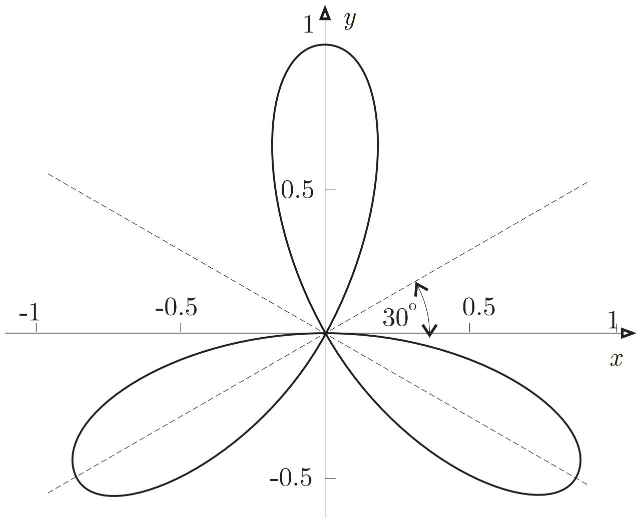


Figura 2: Ejes de simetría

```
In[1]:= f[x_,y_]:= 3*x^2*y - y^3 + (x^2 + y^2)^2

In[2]:=f[X*u-Y*v+a,X*v+Y*u+b]
Out[2]= -(b + v*X + u*Y)^3 + 3*(b + v*X + u*Y)*(a + u*X - v*Y)^2 +
  ((b + v*X + u*Y)^2 + (a + u*X - v*Y)^2)^2

In[3]:=f[X*u+Y*v+a,X*v-Y*u+b]
Out[3]=
-(b + v*X - u*Y)^3 + 3*(b + v*X - u*Y)*(a + u*X + v*Y)^2 +
  ((b + v*X - u*Y)^2 + (a + u*X + v*Y)^2)^2

In[4]:=CoefficientList[%2,{X,Y}]
Out[4]=
{{a^4 + 3*a^2*b + 2*a^2*b^2 - b^3 + b^4,
   3*a^2*u + 4*a^2*b*u - 3*b^2*u + 4*b^3*u - 4*a^3*v - 6*a*b*v - 4*a*b^2*v,
   2*a^2*u^2 - 3*b*u^2 + 6*b^2*u^2 - 6*a*u*v - 8*a*b*u*v + 6*a^2*v^2 +
    3*b*v^2 + 2*b^2*v^2, -u^3 + 4*b*u^3 - 4*a*u^2*v + 3*u*v^2 + 4*b*u*v^2 -
    4*a*v^3, u^4 + 2*u^2*v^2 + v^4},
  {4*a^3*u + 6*a*b*u + 4*a*b^2*u + 3*a^2*v + 4*a^2*b*v - 3*b^2*v + 4*b^3*v,
   6*a*u^2 + 8*a*b*u^2 - 8*a^2*u*v - 12*b*u*v + 8*b^2*u*v - 6*a*v^2 -
    8*a*b*v^2, 4*a*u^3 - 9*u^2*v + 4*b*u^2*v + 4*a*u*v^2 + 3*v^3 + 4*b*v^3,
   0, 0},
   {6*a^2*u^2 + 3*b*u^2 + 2*b^2*u^2 + 6*a*u*v + 8*a*b*u*v +
    2*a^2*v^2 - 3*b*v^2 + 6*b^2*v^2,
   3*u^3 + 4*b*u^3 - 4*a*u^2*v - 9*u*v^2 + 4*b*u*v^2 - 4*a*v^3,
   2*u^4 + 4*u^2*v^2 + 2*v^4, 0, 0},
  {4*a*u^3 + 3*u^2*v + 4*b*u^2*v + 4*a*u*v^2 - v^3 + 4*b*v^3, 0, 0, 0, 0},
  {u^4 + 2*u^2*v^2 + v^4, 0, 0, 0, 0}
  }

In[5]:=CoefficientList[%3,{X,Y}]
Out[5]=
{{a^4 + 3*a^2*b + 2*a^2*b^2 - b^3 + b^4,
   -3*a^2*u - 4*a^2*b*u + 3*b^2*u - 4*b^3*u + 4*a^3*v + 6*a*b*v + 4*a*b^2*v,
   2*a^2*u^2 - 3*b*u^2 + 6*b^2*u^2 - 6*a*u*v - 8*a*b*u*v + 6*a^2*v^2 +
    3*b*v^2 + 2*b^2*v^2, u^3 - 4*b*u^3 + 4*a*u^2*v - 3*u*v^2 - 4*b*u*v^2 +
    4*a*v^3, u^4 + 2*u^2*v^2 + v^4},
  {4*a^3*u + 6*a*b*u + 4*a*b^2*u + 3*a^2*v + 4*a^2*b*v - 3*b^2*v + 4*b^3*v,
   -6*a*u^2 - 8*a*b*u^2 + 8*a^2*u*v + 12*b*u*v - 8*b^2*u*v + 6*a*v^2 +
    8*a*b*v^2, 4*a*u^3 - 9*u^2*v + 4*b*u^2*v + 4*a*u*v^2 + 3*v^3 + 4*b*v^3,
```

```
   0, 0},
   {6*a^2*u^2 + 3*b*u^2 + 2*b^2*u^2 + 6*a*u*v + 8*a*b*u*v +
    2*a^2*v^2 - 3*b*v^2 + 6*b^2*v^2,
   -3*u^3 - 4*b*u^3 + 4*a*u^2*v + 9*u*v^2 - 4*b*u*v^2 + 4*a*v^3,
   2*u^4 + 4*u^2*v^2 + 2*v^4, 0, 0},
  {4*a*u^3 + 3*u^2*v + 4*b*u^2*v + 4*a*u*v^2 - v^3 + 4*b*v^3, 0, 0, 0, 0},
  {u^4 + 2*u^2*v^2 + v^4, 0, 0, 0, 0}
  }
```

De los 16 coeficientes, se toman los cuatro de signo contrario y se igualan a cero; al resolver el sistema da:

```
In[6]:=Solve[%5[[1,2]]==%5[[1,4]]==%5[[2,2]]==%5[[3,2]]==0,{a,b,u,v}]
Out[6]=
 {{a -> 3^(1/2)*b, u -> 3^(1/2)*v}, {a -> -(3^(1/2)*b), u -> -(3^(1/2)*v)},
  {a -> 0, u -> 0}, {u -> 0, v -> 0}}
```

Teniéndose tres ejes de simetría: las rectas que pasan por el origen y forman con el eje OX los ángulos $\alpha = 30°$, $\alpha = -30°$, $\alpha = 90°$. El nuevo origen (a, b) puede ser cualquier punto de estos ejes de simetría.

- Sea
$$f(x, y) = (x + y)^2 + 2x + 2y = 0.$$

La transformación de ejes llevando el nuevo origen a un punto desconocido $O'(a, b)$ y al eje $O'X'$ también desconocido, que forme un ángulo α con OX, da:

$$(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a + x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b)^2 + 2(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a) + +2(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b) = 0$$

Desarrollando y ordenando se tiene el polinomio de segundo grado de la forma:

$$Ax'^2 + By'^2 + Hx'y' + Fy' + Gx' + C = 0.$$

El cual debe ser idéntico al que resulta de cambiar y' por $-y'$, es decir, que debe ser:

$$Ax'^2 + By'^2 + Hx'y' + Fy' + Gx' + C = Ax'^2 + By'^2 - Hx'y' - Fy' + Gx' + C.$$

Y esto exige que sea

$$H = F = 0, \quad H = 2(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = 0, \quad F = 2(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)(a + b + 1) = 0.$$

haciendo $\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0$, se anularán ambas simultáneamente.

Si se verifica esto, es $H = F = 0$ para cualquier (a, b), luego todas las rectas que forman un ángulo α definido por: $\operatorname{tag}\alpha = 1$ serán ejes de simetría.

La curva dada se compone de las dos rectas paralelas $(x + y)(x + y + 2) = 0$ y los ejes de simetría son todas las perpendiculares a ellas.

Los puntos (a, b) situados en la recta $x + y + 1 = 0$ satisfacen a la segunda ecuación $(F = 0)$, recta que forma un ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, valor que satisface a la primera ecuación $(H = 0)$.

Luego la recta $x + y + 1 = 0$ es también un eje de simetría.

- Sea
$$f(x, y) = (x + y)^2 + x + 2y = 0.$$

La transformación de ejes que lleva el nuevo origen desconocido $O'(a, b)$ y al eje también desconocido, que forme un ángulo α con OX, da

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a$$
$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b$$

$$(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a + x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b)^2 + x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a + 2x' \operatorname{sen}\alpha + 2y' \cos\alpha + 2b = 0.$$

Desarrollando y ordenando se tiene un polinomio de la forma:

$$Ax'^2 + By'^2 + Hx'y' + Fy' + Gx' + C = 0.$$

El cual debe ser idéntico al que resulta de cambiar y' por $-y'$, es decir, que debe ser:

$$Ax'^2 + By'^2 + Hx'y' + Fy' + Gx' + C = Ax'^2 + By'^2 - Hx'y' - Fy' + Gx' + C.$$

Y entonces: $H = F = 0$.

Se obtiene que la recta $x + y + \frac{3}{2} = 0$ es eje de simetría de la curva, que es una parábola.

■ Si se verifica que $f(x, y) = f(-x, -y)$, la curva se dice simétrica respecto al origen de coordenadas.

Obsérvese que si una curva es simétrica respecto a ambos ejes, se verifica que $f(x, y) = f(-x, y)$ y $f(x, y) = f(x, -y)$ y por lo tanto, $f(x, y) = f(-x, -y)$, y la curva es simétrica respecto al origen.

■ Si se verifica $f(x, y) = -f(-x, -y)$ la curva es simétrica respecto al origen pero no lo es con relación a los ejes coordenados. En este caso el origen pertenece a la curva, pues $f(0, 0) = -f(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$.

Ver Figura 3 para curvas simétricas respecto al origen.

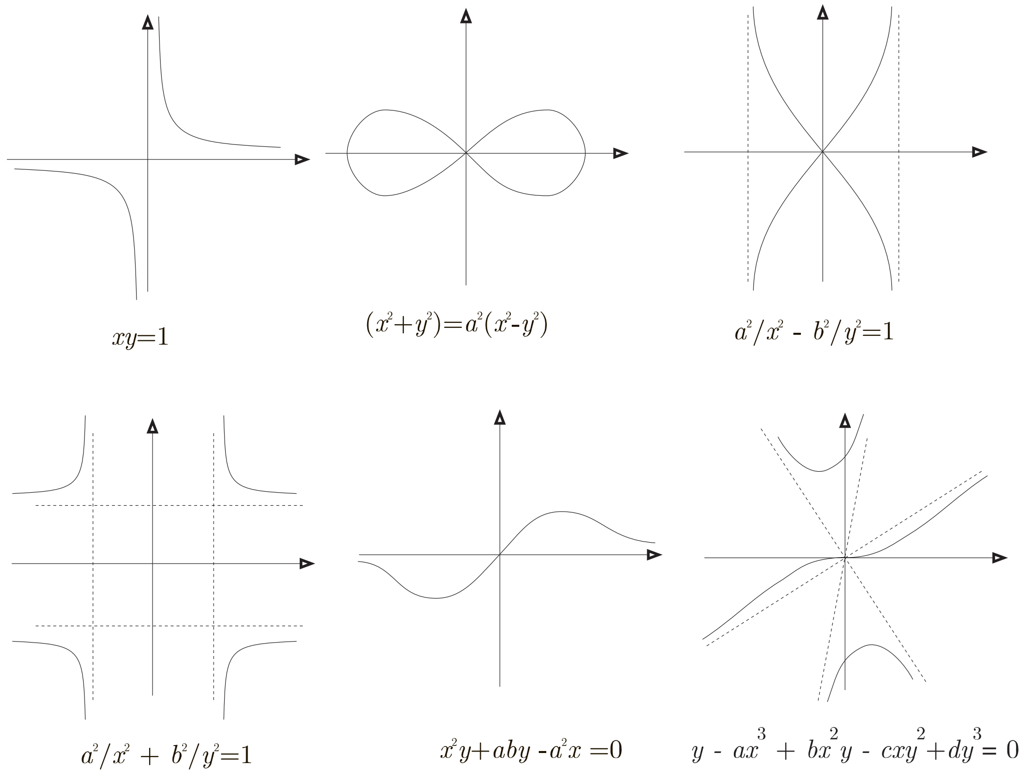


Figura 3: Curvas algebraicas simétricas respecto al origen

■ Si un punto $O'(a, b)$ es centro de simetría, trasladando el origen a este punto O' mediante las fórmulas:

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$

deberá ser: $f(x' + a, y' + b) = \pm f(-x' + a, -y' + b)$, para cualquier punto (x', y') de la curva.

EJEMPLOS:

• Sea

$$x^2 - 2xy + 4x - y = 0$$

que referida a los ejes paralelos por el punto incógnito (a, b) se transforma en:

$$(x' + a)^2 - 2(x' + a)(y' + b) + 4(x' + a) - y' - b = 0.$$
$$x'^2 - 2x'y' + 2x'(a - b + 2) + y'(-2a - 1) + (a^2 - 2ab + 4a - b) = 0.$$

y como al cambiar x' por $-x'$ e y' por $-y'$ debe ser:

$$x'^2 - 2x'y' + 2x'(a - b + 2) + y'(-2a - 1) + (a^2 - 2ab + 4a - b) =$$
$$\pm(x'^2 - 2x'y' - 2x'(a - b + 2) - y'(-2a - 1) + (a^2 - 2ab + 4a - b)),$$

es necesario que:

$$-2a - 1 = 0 \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

y

$$a - b + 2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} - b + 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}.$$

Luego el punto $(-1/2, 3/2)$ es el centro de la curva, que no tiene otro centro porque todos han debido resultar de estas ecuaciones. Se trata de una hipérbola de asíntotas $x = -1/2$ y $2x - 4y + 7 = 0$.

• Sea

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0,$$

que se transforma en:

$$(x' + a)^2 + 2(x' + a)(y' + b) + (y' + b)^2 + 2(x' + a) + 2(y' + b) = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + 2x'y' + 2x'(a + b + 1) + 2y'(a + b + 1) + (a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b) = 0.$$

Para que la curva sea simétrica respecto al origen O' es preciso que $a + b + 1 = 0$, lo que prueba que (a, b) satisface la ecuación $x + y + 1 = 0$ de una recta respecto del primer sistema OXY.

Todos los puntos de esta recta son otros tantos centros de simetría de la curva, la cual consta de dos rectas paralelas, $(x + y)(x + y + 2) = 0$.

• Hay curvas como la parábola $y^2 + x = 0$ que no tienen centro de simetría porque la transformada:

$$y'^2 + 2by' + b^2 + x' + a = 0$$

tiene un término en x' de coeficiente no nulo.

3 Intersección de una curva algebraica con un recta. Tangente

Se considera en el espacio afín euclídeo ampliado coordenadas homogéneas, respecto a las cuales se puede dar una expresión analítica de la curva, que nos permitirá, dada la homogeneidad de la función, determinar las tangentes tanto en puntos propios como en impropios (asíntotas), así como la multiplicidad en unos puntos y otros.

Sea la ecuación de una curva algebraica de orden n en coordenadas homogéneas $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. Obsérvese que si se hace un cambio de coordenadas afines, $x_1 = a_1y_1 + a_2y_2 + a_0y_0$, $x_2 = b_1y_1 + b_2y_2 + b_0y_0$, La nueva ecuación de la curva sigue siendo un polinomio homogéneo de grado n.

Las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por los puntos $P(p_0, p_1, p_2)$ y $Q(q_0, q_1, q_2)$, se escriben de la forma $\rho x_i = p_i + \lambda q_i$, $(i = 0, 1, 2)$.

Para determinar los puntos de intersección de la curva y la recta dadas, se sustituye las coordenadas de la recta ρx_i en la ecuación de la curva $f(x_0, x_1, x_2) = \dfrac{1}{\rho^n} f(\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2) = 0$, y resulta:

$$f(p_0 + \lambda q_0, p_1 + \lambda q_1, p_2 + \lambda q_2) = \tag{1}$$

$$= f(p_0, p_1, p_2) + \lambda(q_0 f_{p_0} + q_1 f_{p_1} + q_2 f_{p_2}) + \frac{\lambda^2}{2!}(q_0 f_{p_0} + q_1 f_{p_1} + q_2 f_{p_2})^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}(q_0 f_{p_0} + q_1 f_{p_1} + q_2 f_{p_2})^n = 0,$$

donde f_{p_i} denota la derivada parcial de f respecto a la variable x_i, valuada en el punto (p_0, p_1, p_2): $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}_{|(p_0,p_1,p_2)}$, y entendiendo que las potencias de los trinomios deben desarrollarse e interpretar los exponentes de las f_{p_i} como índice de derivación.

Según la ecuación (1), polinomio en λ de grado n, la recta y la curva tienen n puntos comunes reales o imaginarios, distintos o confundidos.

Si el punto $P(p_0, p_1, p_2)$ pertenece a la curva, se tiene $f(p_0, p_1, p_2) = 0$, y la ecuación (1) admite la raíz $\lambda = 0$. Si se cumple además que $q_0 f_{p_0} + q_1 f_{p_1} + q_2 f_{p_2} = 0$, entonces $\lambda = 0$ será una raíz doble y la recta PQ tiene dos puntos comunes con la curva, confundidos en P, con lo que la recta es tangente en P a la curva. Como el coeficiente de λ también se anula para el punto P, debido al teorema de Euler para funciones homogéneas:

$$nf(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_{x_0}(x_0, x_1, x_2) + x_1 f_{x_1}(x_0, x_1, x_2) + x_2 f_{x_2}(x_0, x_1, x_2),$$

todo punto de la recta PQ anula a dicho coeficiente, por lo que la **ecuación de la tangente** a la curva en el punto P es:

$$f_{p_0} x_0 + f_{p_1} x_1 + f_{p_2} x_2 = 0. \tag{2}$$

Esta ecuación es válida tanto en puntos propios como en impropios del plano. Si sólo se consideran puntos propios y se tiene como ecuación de la curva en coordenadas afines (no homogéneas) $f(x, y) = 0$, la tangente en un punto (a, b) es una recta que pasa por este punto y tiene de pendiente $y' = \dfrac{dy}{dx}$, por lo que, teniéndose que $f_x + f_y y' = 0$, la **ecuación de la tangente**, en puntos donde ninguna de las derivadas $f_a \equiv f_x(a, b)$ y $f_b \equiv f_y(a, b)$ se anulan, es

$$f_a(x-a)+f_b(y-b)=0. \tag{3}$$

Los puntos de tangente horizontal satisfacen a

$$f(x,y)=0, \quad f_x(x,y)=0, \quad f_y(x,y)\neq 0. \tag{4}$$

Y los puntos de tangente vertical satisfacen a

$$f(x,y)=0, \quad f_y(x,y)=0, \quad f_x(x,y)\neq 0. \tag{5}$$

4 Puntos singulares

■ Si las tres primeras derivadas parciales en un punto P de la curva se anulan, la ecuación (1) carece de término independiente y de término lineal en λ, por lo que toda recta que pase por P corta a la curva en dos puntos confundidos, se dice entonces que el punto P es un punto doble. Estos se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones

$$f_{x_0}(x_0,x_1,x_2)=0, \quad f_{x_1}(x_0,x_1,x_2)=0, \quad f_{x_2}(x_0,x_1,x_2)=0.$$

Se observa que toda solución de este sistema está necesariamente en la curva, en virtud del teorema de Euler para funciones homogéneas.

Si se cumple además que $(q_0f_{p_0}+q_1f_{p_1}+q_2f_{p_2})^2=0$, entonces $\lambda=0$ será una raíz triple y la recta PQ tiene tres puntos comunes con la curva, confundidos en P, con lo que la recta es tangente a una rama de la curva en P. Como el coeficiente de λ^2 también se anula para todo punto de la recta PQ, al anularse en el punto P, como se comprueba derivando en la igualdad que da el teorema de Euler para funciones homogéneas, las tangentes a la curva en un punto doble P vienen dadas por el polinomio de segundo grado:

$$(x_0f_{p_0}+x_1f_{p_1}+x_2f_{p_2})^2=x_0^2f_{p_0^2}+x_1^2f_{p_1^2}+x_2^2f_{p_2^2}+2x_0x_1f_{p_0p_1}+2x_0x_2f_{p_0p_2}+2x_1x_2f_{p_1p_2}=0,$$

Según la naturaleza y posición de estas rectas respecto a la curva, el punto doble recibe las siguientes denominaciones:

1) Si las tangentes son reales y distintas se dice que el punto P es crunodal.

2) Si las tangentes son reales e iguales, se tienen los diferentes tipo de puntos:

a) Si la curva continúa después del punto P, se denomina tacnodal, pudiendo estar las ramas de la curva a ambos lados de la tangente o sólo en uno de los lados.

b) Si la curva no continúa después del punto P, se trata de un punto de retroceso, siendo de primera especie si las ramas de la curva quedan a en distinto lado de la tangente, y de segunda especie si las dos ramas quedan al mismo lado de la tangente.

3) Si las tangentes son imaginarias, se trata de un punto aislado.

En las Figuras 4 (pág. 8) y 8 (pág. 16) se muestran algunos ejemplos de los distintos puntos dobles definidos tanto propios como impropios.

■ Si todas las derivadas primeras y segundas de f se anulan en P, y alguna de las terceras derivadas es distinta de cero, se dice que el punto P es un punto triple de la curva. La recta PQ corta a la curva en tres puntos confundidos en P, cuando la coordenadas de Q no anulan al coeficiente de λ^3 en (1). Si dicho coeficiente se anula en Q, la recta y la curva tienen cuatro puntos confundidos en P, con lo que la recta PQ es tangente a una rama de la curva que pasa por este punto. La ecuación conjunta de las tres tangentes en P es:

$$(x_0f_{p_0}+x_1f_{p_1}+x_2f_{p_2})^3=0.$$

■ Si, en general, se anulan en P las derivadas de f hasta el orden k y no son simultáneamente nulas las de orden $k+1$, se dice que P es un punto múltiple de orden $k+1$ y la ecuación de las tangentes en él será

$$(x_0f_{p_0}+x_1f_{p_1}+x_2f_{p_2})^{k+1}=0.$$

■ Denominándose, en general, punto singular de la curva, a cualquier punto múltiple de orden $k+1$, para $k=1,2,3,\ldots$

A continuación se hace el estudio en un punto múltiple de una curva algebraica usando coordenadas no homogéneas, determinando las tangentes en él.

Se supone que el origen de coordenadas es de la curva $f(x,y)=0$, si no lo fuera, se hace un cambio de coordenadas apropiado para que lo sea, y se desarrolla el polinomio $f(x,y)$ por la fórmula de Mac–Laurin:

$$f(x,y)=f(0,0)+(xf_{x_0}+yf_{y_0})+\frac{1}{2!}(xf_{x_0}+yf_{y_0})^2+\cdots+\frac{1}{n!}(xf_{x_0}+yf_{y_0})^n,$$

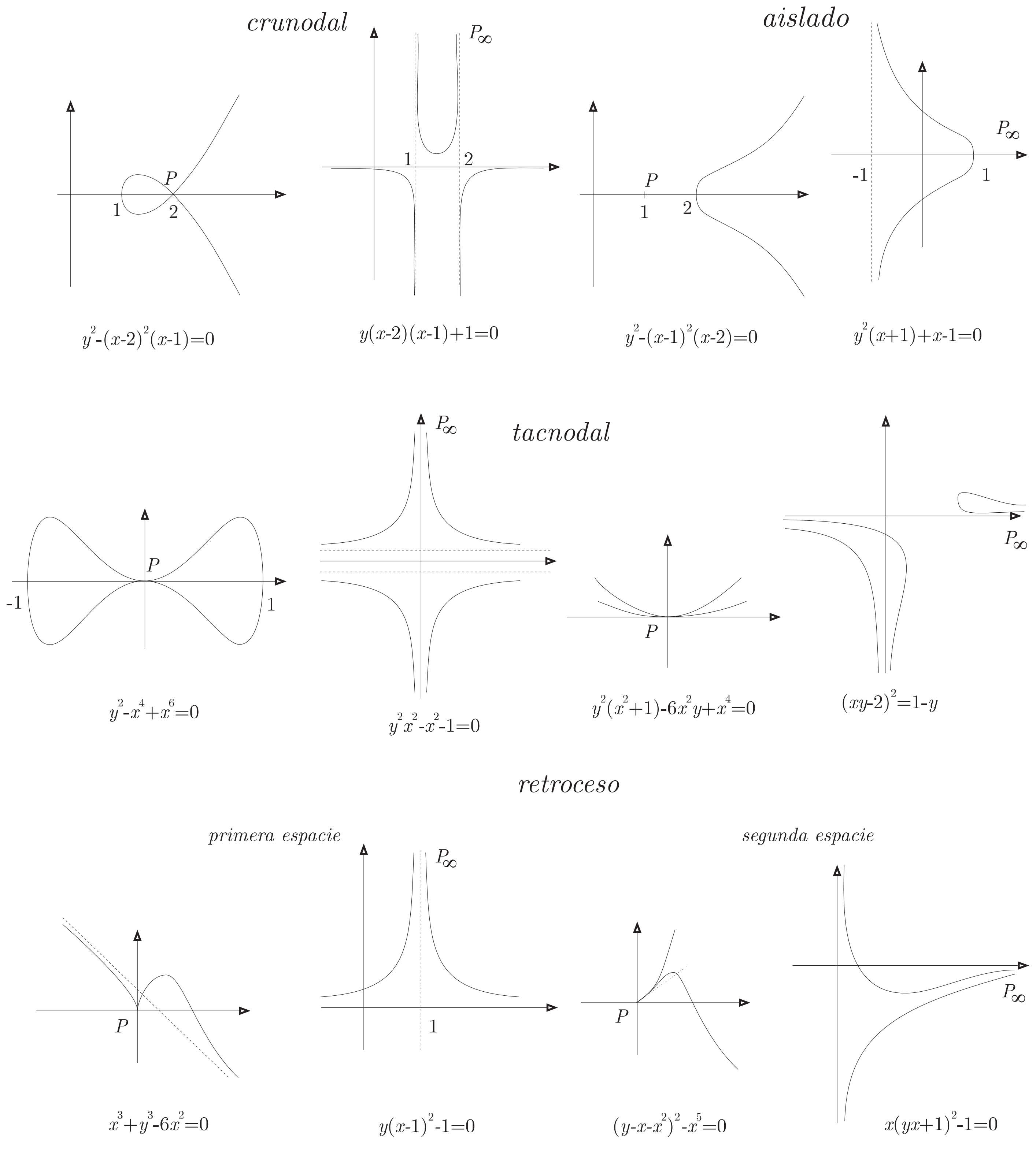


Figura 4: Tipos de puntos dobles de curvas algebraicas

donde se denota con f_{x_0}, f_{y_0} las derivadas parciales de f respecto a x e y en el punto $(0,0)$, y entendiendo que las potencias de los binomios deben desarrollarse e interpretar los exponentes de las derivadas f_x y f_y como índice de derivación.

Si se pone $\varphi_i(x,y) = \frac{1}{i!}(xf_{x_0} + yf_{y_0})^i$, polinomio homogéneo en x e y de grado i, la ecuación de la curva, al ser $f(0,0) = 0$, se escribirá en la forma siguiente:

$$f(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) + \cdots + \varphi_n(x,y) = 0.$$

Los puntos de intersección de la curva $f(x,y) = 0$ con las rectas $y = ax$, no paralelas al eje OY, tienen por abscisas las raíces de la ecuación de orden n en x:

$$\varphi_1(x,ax) + \varphi_2(x,ax) + \cdots + \varphi_n(x,ax) = 0,$$

o sea:

$$x\varphi_1(1,a) + x^2\varphi_2(1,a) + \cdots + x^n\varphi_n(1,a) = 0,$$

que tiene una raíz $x = 0$, que corresponde al origen de coordenadas, y si $\varphi_1(1,a) \neq 0$, $n-1$ distintas de cero. En este caso no pueden anularse simultáneamente f_{x_0} y f_{y_0} en el origen.

Si la recta $y = ax$ es la tangente a la curva en $(0,0)$ la ecuación admitirá entonces una raíz doble en $x = 0$, para lo que tendrá que ser $\varphi_1(1,a) = 0$. La raíz de tal ecuación de primer grado será el coeficiente angular de la tangente a la curva y la ecuación de dicha tangente será:

$$\varphi_1(x,y) = f_{x_0}x + f_{y_0}y = 0.$$

Si la ecuación de la curva carece de términos de primer grado, para lo que $f_{x_0} = f_{y_0} = 0$, entonces $(0,0)$ será punto doble y la ecuación

$$x\varphi_1(1,a) + x^2\varphi_2(1,a) + \cdots + x^n\varphi_n(1,a) = 0$$

admitirá la raíz doble $x = 0$ para todo valor de a, es decir, toda recta incidente con la curva en $(0,0)$ tendrá comunes con la curva dos puntos confundidos en él. En este caso, para los valores de a, raíces de la ecuación $\varphi_2(1,a) = 0$, se obtienen dos rectas que tienen comunes cada una de ellas tres puntos con la curva, confundidos en $(0,0)$. El conjunto de tales tangentes tiene la ecuación:

$$\varphi_2(x,y) = f_{x_0^2}x^2 + 2f_{x_0}f_{y_0}xy + f_{y_0^2}y^2 = 0.$$

Análogamente, si las derivadas segundas se anularan en el origen, es decir, si no existiesen términos de segundo grado tampoco, pero sí de tercero, el punto sería triple y el conjunto de las tres tangentes estaría dado entonces por:

$$\varphi_3(x,y) = 0.$$

En definitiva, y para un caso general, si son idénticamente nulos

$$\varphi_1(x,y) = 0, \varphi_2(x,y) = 0, \ldots, \varphi_{h-1}(x,y) = 0,$$

pero no $\varphi_h(x,y)$, es decir, si los términos de menor grado del polinomio $f(x,y)$ son de orden de multiplicidad h, el origen es un punto múltiple de orden de multiplicidad h y el conjunto de las h tangentes a la curva en él está dado por:

$$\varphi_h(x,y) = 0$$

y sus pendientes son las raíces de la ecuación $\varphi_h(1,a) = 0$.

Ejemplo:

- Los puntos dobles de la curva (ver gráfica en Figura 5)

$$f(x,y) = x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$$

se obtienen resolviendo el sistema obtenido anulando sus derivadas parciales:

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4a^2xt^2 = 0 \\ f_y = -6ay^2t - 6a^2yt^2 = 0 \\ f_t = -2ay^3 - 6a^2y^2t - 4a^2x^2t + 4t^3a^4 = 0 \end{cases}$$

Resultando, de las dos primeras, los puntos: $(t,0,0), (t,0,at), (t,at,0), (t,at,at), (t,-at,0)$ y $(t,-at,at)$, de los cuales, sólo satisfacen a la tercera y, por tanto, a la ecuación de la curva, los puntos $(0,-a), (a,0)$ y $(-a,0)$, que son los puntos singulares.

Para hallar las tangentes, por ejemplo, en el punto $(1, a, 0)$ se ha de calcular las derivadas segundas y sustituirlas en este punto, para formar la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} 8a^4 & -8a^3 & 0 \\ -8a^3 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -6a^2 \end{pmatrix},$$

que da lugar al ecuación cuadrática $4x^2 - 3y^2 - 8a^3x + 4a^4 = 0$, que degenera en dos rectas, que son las tangentes (cuyo punto en común es el punto singular $(a, 0)$) de ecuaciones:

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(x - a).$$

También se pueden determinar las tangentes en el punto singular $(a, 0)$, tomando éste como nuevo origen de coordenadas, haciendo el cambio $x \to x + a, y \to y$, e igualando a cero los términos de menor grado (dos): $4a^2x^2 - 3a^2y^2 = 0$; o sea, el producto de rectas $(\sqrt{3}y + 2x)(\sqrt{3}y - 2x) = 0$, que deshaciendo el cambio, se llega a las mismas rectas tangentes de arriba.

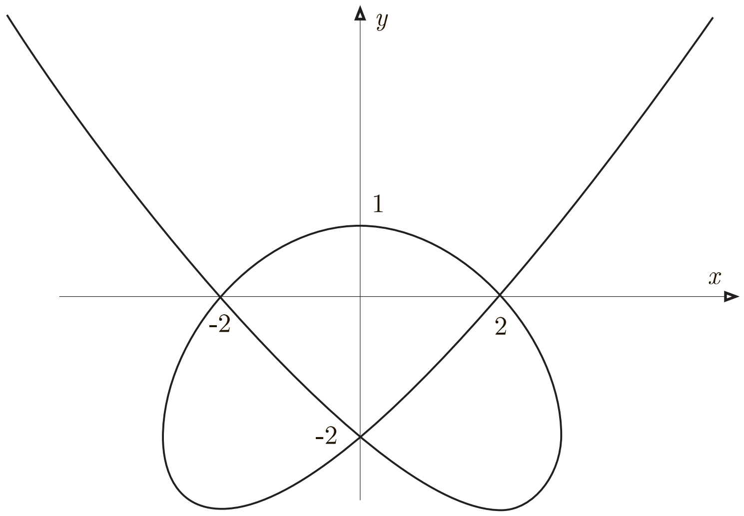


Figura 5: Puntos dobles

5 Puntos de inflexión

Si $P(p_0, p_1, p_2)$ pertenece a la curva, y si los puntos Q de la tangente en P, $x_0f_{p_0} + x_1f_{p_1} + x_2f_{p_2} = 0$, anularan también el coeficiente

$$(\sum_{i=0}^{2} q_i f_{p_i})^2$$

de λ^2 en la ecuación (1) entonces la recta PQ tendría tres puntos confundidos en P con la curva y se dice que el punto P es un punto de inflexión.

Y si además anulara a los coeficientes de λ^3, λ^4, ..., la tangente tendría con la curva $4, 5, \ldots$ puntos confundidos, y atravesaría o no a la curva según el número de puntos confundidos sea impar o par.

Si $P(p_0, p_1, p_2)$ es un punto de inflexión, la ecuación:

$$(x_0f_{p_0} + x_1f_{p_1} + x_2f_{p_2})^2 = x_0^2f_{p_0{}^2} + x_1^2f_{p_1{}^2} + x_2^2f_{p_2{}^2} + 2x_0x_1f_{p_0p_1} + 2x_0x_2f_{p_0p_2} + 2x_1x_2f_{p_1p_2} = 0,$$

debe satisfacerse por todos los puntos de la tangente $x_0f_{p_0} + x_1f_{p_1} + x_2f_{p_2} = 0$. Así, la ecuación anterior deberá ser el producto de esta recta por otra recta, de modo que, por ser una cónica degenerada, su discriminante (que es el hessiano de la curva dada en P) debe ser nulo; es decir, debe ser:

$$\begin{vmatrix} f_{p_0{}^2} & f_{p_0p_1} & f_{p_0p_2} \\ f_{p_1p_0} & f_{p_1{}^2} & f_{p_1p_2} \\ f_{p_2p_0} & f_{p_2p_1} & f_{p_2{}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

en todos los puntos P de inflexión de la curva $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, y en todos los dobles. De aquí que los puntos de inflexión se obtienen entre los de intersección de la curva dada con la hessiana.

$$\begin{vmatrix} f_{x_0}^2 & f_{x_0x_1} & f_{x_0x_2} \\ f_{x_1x_0} & f_{x_1}^2 & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_0} & f_{x_2x_1} & f_{x_2}^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad f(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Si la curva algebraica dada es de orden n, su hessiano es de orden $3(n-2)$ y por lo tanto, el número total, a lo sumo, de puntos de inflexión será $3n(n-2)$, si no hay dobles. Así una cúbica tendrá a lo sumo nueve puntos de inflexión; una cónica no tiene ninguno.

EJEMPLO:

- Puntos de inflexión de la curva $f(x,y) = xy^4 + y + x = 0$.

```
In[1]:= f[x_,y_,t_]:=x*y^4+y*t^4+x*t^4

In[2]:= {{D[f[x,y,t],{t,2}],D[f[x,y,t],x,t],D[f[x,y,t],y,t]},
         {D[f[x,y,t],x,t],D[f[x,y,t],{x,2}],D[f[x,y,t],x,y]},
         {D[f[x,y,t],y,t],D[f[x,y,t],x,y],D[f[x,y,t],{y,2}]}}

In[3]:=Det[%]
Out[3]=64*(-3*t^6*x*y^2 + 2*t^6*y^3 - 3*t^2*x*y^6 - 3*t^2*y^7)

In[4]:=Solve[{%==0,f[x,y,t]==0},{x,y}]

Out[4]= {{x -> -(135^(1/4)*t)/8, y -> (5/3)^(1/4)*t},
          {x -> -I/8*135^(1/4)*t, y -> I*(5/3)^(1/4)*t},
          {x -> (135^(1/4)*t)/8, y -> -((5/3)^(1/4)*t)},
          {x -> I/8*135^(1/4)*t, y -> -I*(5/3)^(1/4)*t},
  {x -> 0, y -> 0},, {x -> 0, y -> 0}, {x -> 0, y -> 0}}

In[5]:= N[%]
Out[5]={{x -> -0.4260822624253123*t, y -> 1.136219366467499*t},
        {x -> -0.4260822624253123*I*t, y -> 1.136219366467499*I*t},
        {x -> 0.4260822624253123*t, y -> -1.136219366467499*t},
        {x -> 0.4260822624253123*I*t, y -> -1.136219366467499*I*t},
        {x -> 0, y -> 0}, {x -> 0, y -> 0}, {x -> 0, y -> 0}}
```

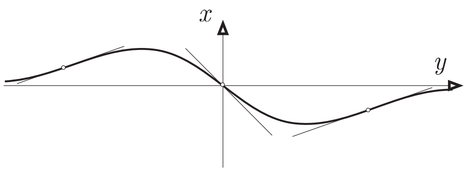


Figura 6: Puntos de inflexión

Luego las soluciones reales, que corresponden a puntos de inflexión son $(-0.42, 1.13), (0.42, -1.13), (0, 0)$.

6 Asíntotas

Se denomina asíntota a una curva a la tangente en un punto impropio de la curva.

Así para hallar las asíntotas, al considerar coordenadas homogéneas, basta con determinar las tangentes (2) en los puntos impropios, una vez determinados éstos, para lo que es necesario intersecar $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ con la recta impropia $x_0 = 0$.

Se conoce por rama infinita de una curva algebraica a un arco de la misma tal que una por lo menos de las coordenadas x, y, de un punto $P(x,y)$ que lo recorra crezca indefinidamente.

Se da el nombre de asíntota a una rama infinita, a una recta fija tal que su distancia al punto $P(x,y)$ tienda a cero cuando P se aleja indefinidamente sobre la rama infinita. En este caso la rama infinita se dice hiperbólica.

■ Las asíntotas paralelas al eje OX se hallan determinando los valores finitos de "y" para los cuales "x" crece indefinidamente.

Si se pone la ecuación algebraica que determina la curva, ordenada respecto de las potencias de x:

$$a_r(y)x^r + a_{r-1}(y)x^{r-1} + \cdots + a_1(y)x + a_0(y) = 0,$$

dividiendo por x^r (la potencia más alta) y haciendo $x \to \infty$, resulta $a_r(y) = 0$, que es una ecuación en y, cuyas soluciones nos dan las asíntotas paralelas al eje OX.

■ Las asíntotas paralelas al eje OY se hallan determinando los valores finitos de "x" para los cuales "y" crece indefinidamente.

Supuesta la ecuación ordenada respecto a las potencias de y:

$$b_s(x)y^s + b_{s-1}(x)y^{s-1} + \cdots + b_1(x)y + b_0(x) = 0.$$

Las soluciones de la ecuación en x, $b_s(x) = 0$, representan las asíntotas paralelas al eje OY.

■ Caso general: Si el grado de la curva es n, se puede escribir su ecuación agrupando en primer lugar los términos de grado n, luego los de grado $n-1$, etc., en la siguiente forma:

$$f(x,y) = \varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \cdots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0.$$

Suponiendo que la asíntota es de la forma $y = ax + b$.

Cuando un punto $P(x,y)$ describe una rama infinita, tendiendo a infinito x e y, para obtener las direcciones asintóticas habrá que calcular el límite de $\dfrac{y}{x}$ cuando $x \to \infty$ para lo cual se hace $\dfrac{y}{x} = a$.

Intersecando la curva con una recta que pasa por el origen $y = ax$:

$$f(x,y) = x^n\varphi_n(1,a) + x^{n-1}\varphi_{n-1}(1,a) + \cdots + x\varphi_1(1,a) + \varphi_0 = 0.$$

Dividiendo por x^n y tomando límite cuando $x \to \infty$, resulta:

$$\varphi_n(1,a) = 0,$$

luego las raíces a_i de esta ecuación nos darán las direcciones asintóticas de la curva.

Para determinar las asíntotas oblicuas, se debe hallar la tangente en el punto del infinito $(0,1,a)$, para cada solución a, haciendo uso de la fórmula general (2), y resulta:

$$x_0\varphi_{n-1}(1,a) + x_1\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(1,a) + x_2\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(1,a) = 0.$$

Otra forma de determinar las asíntotas oblicuas es tener en cuenta que la tangente a la curva en $(0,1,a)$ corta a la curva en dos puntos confundidos.

Si a es la dirección del correspondiente punto impropio, será $y = ax + b$ la asíntota, que cortándola con la curva debe dar dos raíces infinitas en la ecuación resultante, lo cual exige la anulación de los coeficientes de los dos primeros términos de primer grado. Haciendo tal sustitución y anulando esos términos, se tiene:

$$f(x,y) = \varphi_n(x,ax+b) + \varphi_{n-1}(x,ax+b) + \cdots + \varphi_1(x,ax+b) + \varphi_0 =$$

$$= x^n\varphi_n(1,a+\frac{b}{x}) + x^{n-1}\varphi_{n-1}(1,a+\frac{b}{x}) + \cdots + x\varphi_1(1,a+\frac{b}{x}) + \varphi_0 = 0.$$

y haciendo uso de

$$\varphi_n(1,a+\frac{b}{x}) = \varphi_n(1,a) + \frac{b}{x}\varphi_n'(1,a) + \frac{b^2}{2x^2}\varphi_n''(1,a) + \cdots$$

$$\varphi_{n-1}(1,a+\frac{b}{x}) = \varphi_{n-1}(1,a) + \frac{b}{x}\varphi_{n-1}'(1,a) + \frac{b^2}{2x^2}\varphi_{n-1}''(1,a) + \cdots$$

$$\varphi_{n-2}(1,a+\frac{b}{x}) = \varphi_{n-2}(1,a) + \frac{b}{x}\varphi_{n-2}'(1,a) + \frac{b^2}{2x^2}\varphi_{n-2}''(1,a) + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y como $\varphi_n(1,a) = 0$, queda:

$$x^{n-1}(b\varphi_n'(1,a) + \varphi_{n-1}(1,a)) + x^{n-2}\left(\frac{b^2}{2}\varphi_n''(1,a) + b\varphi_{n-1}'(1,a) + \varphi_{n-2}(1,a)\right) + \cdots = 0. \tag{6}$$

Resultando:

$$b\varphi_n'(1,a) + \varphi_{n-1}(1,a) = 0, \qquad b = -\frac{\varphi_{n-1}(1,a)}{\varphi_n'(1,a)}.$$

Si $\varphi'_n(1,a) = 0$ y $\varphi_{n-1}(1,a) \neq 0$ resulta que $b = \infty$ y por lo que la recta sería la recta del infinito. En este caso se dice que la rama infinita es parabólica.

Cuando $\varphi'_n(1,a) = \varphi_{n-1}(1,a) = 0$ entonces el punto del infinito sería doble y de la ecuación (6) se deduce que el término en x^{n-1} se anula idénticamente, se obtienen dos asíntotas con la misma pendiente a, cuyas ordenadas en el origen vienen dadas por las raíces de la ecuación:

$$\frac{b^2}{2}\varphi''_n(1,a) + b\varphi'_{n-1}(1,a) + \varphi_{n-2}(1,a) = 0.$$

Si ocurre que $\varphi''_n(1,a) = 0$ esta ecuación tiene una raíz infinita, y por lo tanto existe una rama parabólica y una asíntota.

Si $\varphi''_n(1,a) = \varphi'_{n-1}(1,a_i) = 0$, las dos raíces son infinitas y la curva tendrá dos ramas parabólicas.

Este resultado se extiende al caso en que se anulen idénticamente los coeficientes de x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^{n-h}.

<u>Ejemplos:</u>

- Para hallar las asíntotas de la curva: $x^4 - y^4 + 2x^2 + y^2 = 0$, se pone en forma homogénea:

$$x^4 - y^4 + 2x^2t^2 + y^2t^2 = 0.$$

Y si se hace $t = 0$, es decir, se corta por la recta del infinito, resulta: $x^4 - y^4 = 0$, luego las direcciones de las asíntotas serán: $(x+y)(y-x)(x^2+y^2) = 0$.

Entonces resultan las asíntotas:

$$y = x + b, \qquad y = -x + b,$$

donde b se halla por la fórmula:

$$b = -\frac{\varphi_{n-1}(1,a)}{\varphi'_n(1,a)} = \frac{0}{-4a^3} = 0,$$

siendo a el coeficiente de x en las ecuaciones anteriores de las asíntotas, es decir, 1 y -1. Por lo tanto, las ecuaciones de las asíntotas serán, con $b = 0$:

$$y = x, \qquad y = -x.$$

- Asíntotas de la curva: $xy^2 + 5x^2y + 4x^3 + xy - 9 = 0$.

Para ver si tiene asíntotas no paralelas a los ejes coordenados, se homogeniza la ecuación:

$$xy^2 + 5x^2y + 4x^3 + xyt - 9t^3 = 0.$$

Se corta con $t = 0$ y se obtiene: $xy^2 + 5x^2y + 4x^3 = 0$. Se divide por x^3 (x elevada al grado de la ecuación) y se obtiene otra ecuación en $\frac{y}{x}$, haciendo $\frac{y}{x} = a$, resulta:

$$a^2 + 5a + 4 = 0, \qquad a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}, \qquad a_1 = -4, \quad a_2 = -1.$$

Con lo que las asíntotas serán:

$$y = -x + b, \qquad y = -4x + b,$$

donde

$$b = -\frac{\varphi_{n-1}(1,a)}{\varphi'_n(1,a)} = \frac{-a}{2a+5},$$

y para $a = -1$ y $a = -4$, las asíntotas son:

$$y = -x + \frac{1}{3}, \qquad y = -4x - \frac{4}{3}.$$

Asíntotas paralelas a los ejes coordenados.

Asíntota paralela al eje OY: Se ordena la ecuación en y: $y^2x + y(5x^3 + x) + 4x^3 - 9 = 0$, y se divide por la mayor potencia de y (para este caso y^2).

$$x + \frac{5x^3 + x}{y} + \frac{4x^3}{y^2} - \frac{9}{y^2} = 0,$$

haciendo $y \to \infty$ resulta $x = 0$, que es la ecuación buscada.

Asíntota paralela al eje OX: Ordenando en x y dividiendo por la mayor potencia de x. No hay asíntota paralela al eje OX pues 4 es el coeficiente de la mayor potencia que es x^3.

7 Método de Newton-Cramer para deducir la disposición de las ramas de una curva algebraica en el entorno de uno de sus puntos propios y de las ramas infinitas de la misma

■ Estudio en el origen

Sea la curva algebraica $f(x, y) = 0$ que pasa por el origen. Si el punto en que se quiere estudiar no es el origen, con un cambio de coordenadas se toma por origen de coordenadas dicho punto. Se estudia la curva dada en el entorno del origen por el método de Newton–Cramer, el cual consiste en suponer que las variables x e y son infinitamente pequeñas de órdenes r y s, por ejemplo, de modo que si t es un infinitésimo principal es $x = t^r$ e $y = t^s$. Al sustituir estos valores de x e y en el primer miembro de la ecuación $f(x, y) = 0$, todos los términos se convierten en infinitamente pequeños; como el orden de una suma de infinitésimos es el del sumando que lo tenga menor, puede prescindirse, en una primera aproximación, de aquellos sumandos de orden más alto, quedando en dicho primer miembro sólo los términos de menor orden infinitesimal. La ecuación que se obtiene con estos términos, una vez suprimidos los demás, dará un arco de curva que pasará por el origen y coincidirá con un arco de la dada, tanto mejor cuanto menor sea el entorno del origen en el que se hace estas consideraciones.

Tomando ahora en un sistema de ejes cartesianos las abscisas $r, 2r, 3r, \ldots$, etc., con la unidad r y las ordenadas $s, 2s, 3s, \ldots$, etc., con la unidad s, se marcan los puntos (p, q) de este cuadriculado, tales que $pr + qs$ sea el exponente del término $a_{p,q}x^p y^q$ transformado en $a_{p,q}t^{pr+qs}$.

Si se consideran dos puntos cualesquiera $A_1(p_1, q_1)$, $A_2(p_2, q_2)$ correspondientes a los términos en $x^{p_1}y^{q_1}$ y $x^{p_2}y^{q_2}$ con el mismo orden infinitesimal $p_1r + q_1s = p_2r + q_2s$, ocurre que el término correspondiente a un punto del diagrama alineado con A_1 y A_2 es del mismo orden infinitesimal. En efecto, considérese un punto (p, q) de la recta A_1A_2, se tiene:

$$A_1A_2 \equiv \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{q - q_1}{q_2 - q_1} \Rightarrow \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{(q - q_1)s}{(p_1 - p_2)r} \Rightarrow r(p - p_1) = -(q - q_1)s \Rightarrow pr + qs = p_1r + q_1s.$$

Con lo que el término correspondiente al punto (p, q) es del mismo orden infinitesimal que los otros dos cuyos puntos representativos determinan la recta A_1A_2.

Además la recta A_1A_2 divide al plano en dos regiones. Un punto exterior a la recta A_1A_2 que escrita en la forma

$$pr + qs - (p_1r + q_1s) = 0$$

dará al primer miembro un valor diferente de cero, que será negativo en la región del origen $(pr + qs < p_1r + q_1s)$ y positivo en la opuesta $(pr + qs > p_1r + q_1s)$; luego el orden infinitesimal de los términos de la región del origen es menor que los de la región opuesta.

De acuerdo con este razonamiento los términos cuyos puntos representativos están en una recta que deja a los demás puntos, que representan a los restantes términos, en la región que no contiene al origen, son los de orden infinitesimal menor y representan una curva dada en un entorno del origen.

A estas rectas que contienen a los puntos representativos de los términos de menor grado se les denomina **determinatrices**.

Si se parte de la primera aproximación $y = \varphi(x)$ de una rama de curva dada por una determinatriz y se quiere hacer una aproximación mayor a la rama de la curva dada, se tendrá que añadir un término complementario, u, tal que $y = \varphi(x) + u$ sustituyera a la rama de la curva con más exactitud. Llevando este valor de y a la ecuación de la curva dada, esta toma la forma

$$g(x, u) = f(x, \varphi(x) + u) = 0.$$

Tomando en el diagrama formado para $g(x, u) = 0$ la determinatriz que dé para u un orden infinitesimal superior a los de los sumandos de $\varphi(x)$ se tiene la nueva aproximación:

$$y = \varphi(x) + \psi(x).$$

Añadiendo un nuevo término y siguiendo el mismo proceso, se va obteniendo el desarrollo de la función y de x que corresponde al arco en cuestión.

Es interesante, a efectos de representar las ecuaciones de las aproximaciones de las ramas de las curvas obtenidas por este método, exponer un cuadro de unos ciertos de tipos de curvas que se pudieran obtener (ver Figura 7 y Figura 8).

■ Líneas Asintóticas

El estudio de las ramas infinitas de una curva es análogo al estudio de una curva en un entorno de uno de sus puntos propios. Así, si se sustituyen x por t^r e y por t^s, siendo ahora t un infinito de primer orden, serán x e y infinitos de órdenes r y s respectivamente. Al sustituir t^r por x y t^s por y en la ecuación y hacer crecer t, los términos de

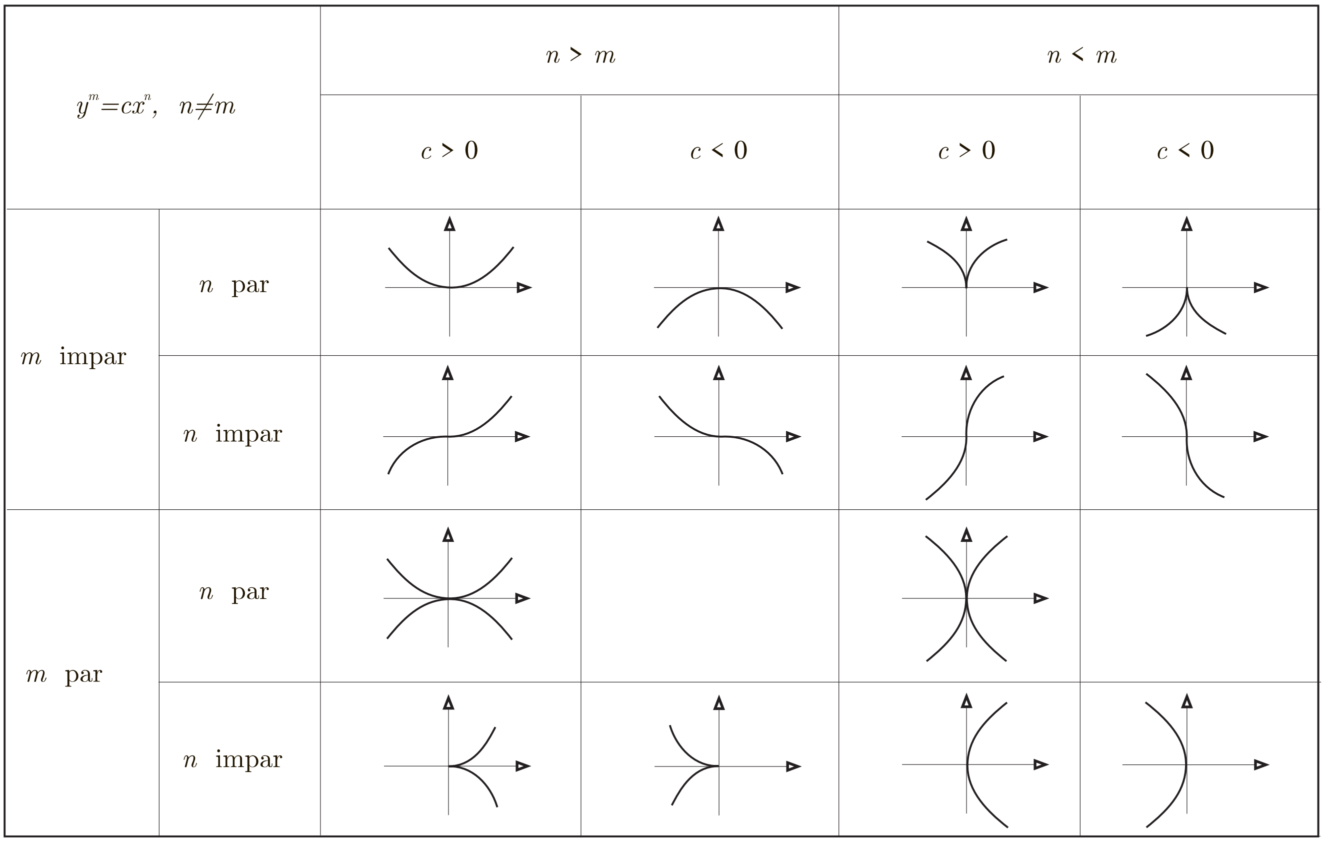


Figura 7: Curvas parabólicas

la ecuación se convierten en infinitos de diversos órdenes, pudiendo ahora despreciar los infinitos de orden inferior y conservar sólo los de orden superior.

Utilizando la misma representación cartesiana para los exponentes, se tienen los mismos vértices señalados en el caso del estudio de la curva en un entorno del origen. Y una recta que deja a los restantes puntos al mismo lado que el origen, contiene puntos que representan a los sumandos de orden infinito mayor, por lo que estos primeros sumandos constituyen una primera aproximación de una rama infinita de la curva dada.

Si se quiere una mayor aproximación de la rama infinita se debe añadir a la obtenida, $y = \varphi(x)$ un término u de menor orden de infinito. Para determinar u se sustituye en la curva dada, $f(x, y) = 0$, y por $\varphi(x) + u$ y se obtiene una ecuación $g(x, u) = 0$, a la cual se aplica de nuevo el mismo método, la determinatriz que de un orden de infinito menor para u, nos determina el valor de u en función de x, $u = \psi(x)$ y la nueva aproximación será:

$$y = \varphi(x) + \psi(x).$$

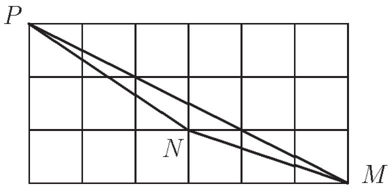
Procediendo en forma análoga se puede obtener una mayor aproximación para la curva que sustituye a la rama infinita.

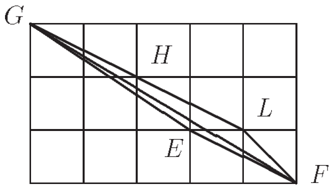
<u>Ejemplo</u>

• Consideremos la curva $\mathcal{C}$ de ecuación

$$x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0.$$

Las curvas que pueden sustituir aproximadamente en un entorno del origen a la curva $\mathcal{C}$ dada, surgen de las determinatrices MN y PN que dejan a los restantes puntos en el semiplano distinto del origen, según el diagrama de la izquierda siguiente





Determinatriz MN: $x^6 + 2a^2x^3y = 0$. Una rama de la curva $\mathcal{C}$ se puede sustituir, en un entorno del origen, por $y = -\dfrac{x^3}{2a^2}$.

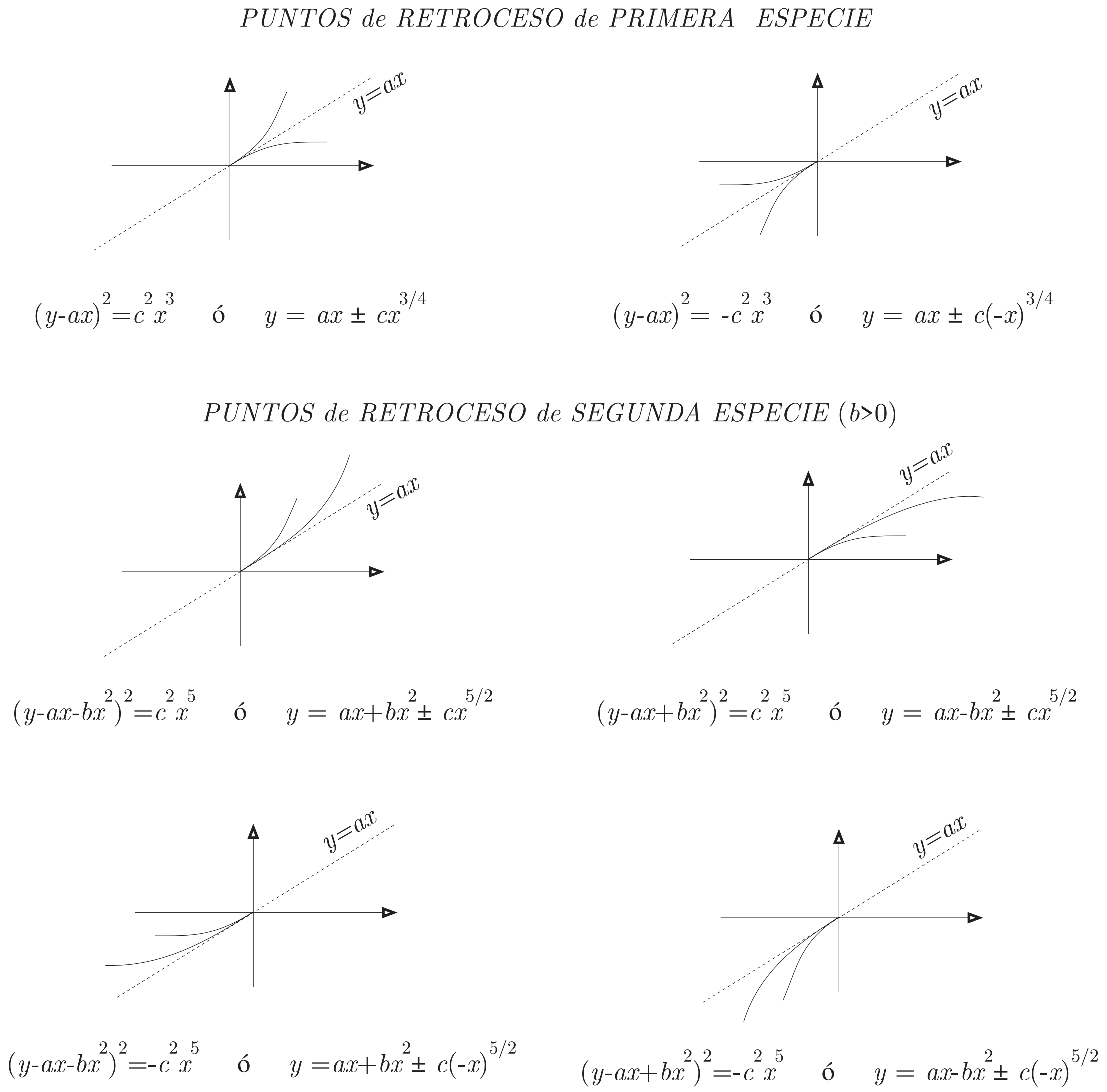


Figura 8: Puntos de retroceso

Determinatriz PN: $2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$, o sea, $y^2 = \dfrac{2a^2x^3}{b^3}$, es otra aproximación de $\mathcal{C}$ en el origen.

Para obtener ramas infinitas que se aproximen a la curva $\mathcal{C}$, sirven las determinatrices que dejen los puntos que no están en ellas en el mismo semiplano que el origen.

Determinatriz PM: $x^6 - b^3y^3 = 0$, es decir, la curva que tiene el mismo punto impropio que la curva $\mathcal{C}$, o curva asintótica, es $y = \dfrac{x^2}{b}$.

Si se quiere mayor aproximación, se pone $y = x^2/b + u$, que sustituyendo en la ecuación propuesta, se obtiene

$$\frac{2a^2x^5}{b} + 2a^2x^3u - b^3u^3 - 3bx^4u - 3b^2x^2u^2 = 0.$$

En el segundo diagrama, siguiendo el método de Newton-Cramer, se toman las determinatrices LF y GHL, que dejan a los restantes puntos en el mismo semiplano que contiene al origen.

Determinatriz LF: $\dfrac{2a^2x^5}{b} - 3bx^4u = 0$, de donde $u = \dfrac{2a^2x}{3b^2}$. Por lo que la curva asintótica que se aproxima a la curva $\mathcal{C}$ es:

$$y = \frac{x^2}{b} + \frac{2a^2x}{3b^2}.$$

Determinatriz GHL: $-b^3u^3 - 3b^2x^2u^2 - 3bx^4u = 0$, es decir $b^2u^2 + 3bx^2u + 3x^4 = 0$, que da para u valores imaginarios; luego, no nos sirve.

Para representar la curva $\mathcal{C}$, se dibuja previamente la ramas obtenidas:

$$\begin{aligned} \text{Curva } A: \quad & y = -\frac{x^3}{2a^2} \\ \text{Curva } B: \quad & y^2 = \frac{2a^2x^3}{b^3} \\ \text{Curva } C: \quad & y = \frac{x^2}{b} + \frac{2a^2x}{3b^2}. \end{aligned}$$

La gráfica siguiente ha sido extraída usando el comando de MATHEMATICA:

```
ImplicitPlot[{x^6+2x^3*y-8y^3==0,2y+x^3==0,4y^2-x^3==0,
        y-x^2/2-x/6==0},{x,-2,2},AspectRatio->2]
```

y tomando los valores particulares de $a = 1$ y $b = 2$:

$$\mathcal{C}: \ x^6 + 2x^3y - 8y^3 = 0, \quad A: \ 2y + x^3 = 0, \quad B: \ 4y^2 - x^3 = 0, \quad C: \ y - x^2/2 - x/6 = 0.$$

Información complementaria: Las tangentes horizontales están en los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(0.5, -0.12)$. La tangente vertical en $(0.52, -0.11)$. Puntos de intersección de las curvas A y B, $(0,0)$ y $(1, -0.5)$.

Con las dos descomposiciones $xx^2(x^3 + 2y) = yy^2$ y $2y(x^3 - 4y^2) = -x^6$, se obtienen las zonas sombreadas donde no hay curva.

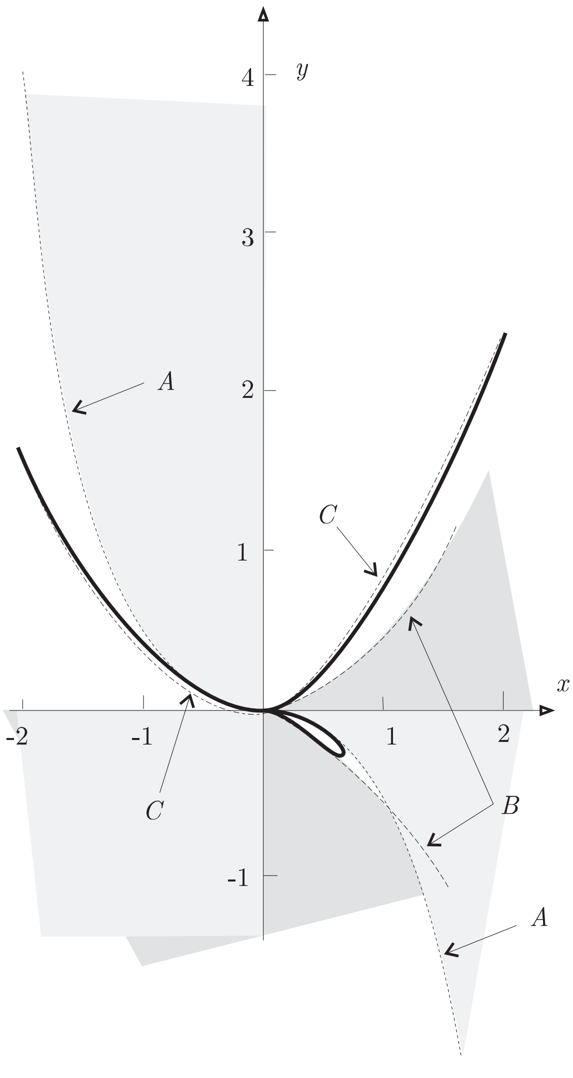


Figura 9: Ejemplo del método de Newton-Cramer

8 Número de puntos dobles de una curva algebraica

"Una curva algebraica de orden n sólo puede tener a lo sumo $\binom{n-1}{2}$ puntos dobles".

En efecto, sea $\mathcal{C}$ una curva algebraica de orden $n > 1$ que tenga d puntos dobles y no tiene otros puntos singulares. Por estos puntos dobles pasan infinitas curvas de orden $n-1$, ya que para obtener una de ellas, sea $\mathcal{C}_1$, basta hallar la primera polar de cualquier punto del plano (p_0, p_1, p_2):

$$\sum_{i=0}^{2} p_i f_{x_i} = 0.$$

Las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$ tienen $n(n-1)$ puntos comunes distintos o no, reales o imaginarios, según el teorema de Bezout, de los cuales d serán los dobles de $\mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}_1$ pasa por ellos; luego, $2d \leq n(n-1)$, o sea $d \leq n(n-1)/2$.

Si la ecuación de la curva algebraica $\mathcal{C}_1$, de orden $n-1$, se agrupa en polinomios homogéneos, el número de coeficientes de estos es, de n para el de grado $n-1$, de $n-1$ para el de grado $n-2$ y así hasta el término independiente que consta de un solo coeficiente, en total serán

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2},$$

y al dividir por uno de ellos, el número de coeficientes esenciales es

$$\frac{(n+1)n}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

La curva $\mathcal{C}_1$ queda pues determinada por $n_1 = (n-1)(n+2)/2$ condiciones.

Se verifica, en primer lugar, que $d < n_1$, pues si se supone que $d \geq n_1$, resulta $n(n-1)/2 \geq (n-1)(n+2)/2$, o sea que $n \geq n+2$, lo cual es absurdo.

Se determina ahora una curva $\mathcal{C}'$, de orden $n-1$, que pase por los puntos dobles de $\mathcal{C}$ y por $n_1 - d$ puntos más de esta curva $\mathcal{C}$. Así las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tendrán $n(n-1)$ puntos comunes, entre los que figuran los d dobles y los $n_1 - d$ elegidos, es decir, $2d + (n_1 - d) = d + n_1 \leq n(n-1)$, con lo que

$$d \leq n(n-1) - n_1 = n(n-1) - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2},$$

que es lo que se quería establecer.

Si existen puntos de multiplicidad k se consideran como tantos dobles como pares de ramas que pasan por él, así el punto múltiple es considerado como $\binom{k}{2}$ puntos dobles.

9 Género de un curva algebraica. Curvas unicursales

Se conoce como género de una curva algebraica a la diferencia de puntos dobles que, por razón de su orden, puede tener y los que realmente tiene. Si el orden de la curva es n, el genero es

$$g = \binom{n-1}{2} - d.$$

Cuando el género es cero se dice que la curva es unicursal o racional. Es este caso la curva puede expresarse en función racional de un parámetro.

En efecto, sea $f(x,y) = 0$ la ecuación de una curva $\mathcal{C}$ de orden n y género cero. Por sus $d = \binom{n-1}{2}$ puntos dobles y $n-3$ puntos más de $\mathcal{C}$ se puede hacer pasar una curva de orden $n-2$, ya que el número de puntos que se han tomado es

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1,$$

es decir, una condición menos de las necesarias para determinar una curva de orden $n-2$. Por lo que por dichos puntos pasa una familia de curvas de orden $n-2$, $\mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2$, que forman un haz y que pasa por cada punto del plano que se fije.

A cada λ corresponde una curva del haz y ésta tiene con $\mathcal{C}$, $n(n-2)$ puntos comunes, de los cuales se conocen los d dobles y los $n-3$ elegidos que serán un total de

$$2\binom{n-1}{2} + n - 3 = n(n-2) - 1,$$

lo cual indica que a cada λ corresponde otro único punto de intersección de ambas curvas, a parte de los elegidos. Este parámetro nos va a determinar todos los puntos de $\mathcal{C}$.

Para ello se resuelve el sistema formado por las ecuaciones

$$f(x,y) = 0, \qquad f_1(x,y) + \lambda f_2(x,y) = 0,$$

eliminando una de las variables, por ejemplo la y, obteniéndose así una ecuación en x y λ, $F(x,\lambda)=0$, de grado $n(n-2)$, ecuación de la que se conocen $n(n-2)-1$ soluciones, por ser este número el de los puntos comunes a ambas curvas conocidas.

Dividiendo por todas las raíces se llega a una ecuación de primer grado en x, $F_1(\lambda)x+F_2(\lambda)=0$, de la cual se despeja x.

Análogamente se obtiene y en función de λ.

Al equivaler un punto de multiplicidad $n-1$ a $\binom{n-1}{2}$ puntos dobles, puede también operarse con un punto de este tipo.

Sea $P(p_1,p_2)$ dicho punto, y haciendo una traslación de ejes a este punto y ordenando la ecuación que resulta, se tiene

$$\varphi_n(x-p_1,y-p_2)+\varphi_{n-1}(x-p_1,y-p_2)=0.$$

Si ahora se pone $y-p_2=\lambda(x-p_1)$ y se sustituye en la anterior ecuación, resulta

$$(x-p_1)^n\varphi_n(1,\lambda)+(x-p_1)^{n-1}\varphi_{n-1}(1,\lambda)=0,$$

de aquí, se tiene

$$x-p_1=-\frac{\varphi_{n-1}(1,\lambda)}{\varphi_n(1,\lambda)},$$

y sustituyendo esta expresión en $y-p_2=\lambda(x-p_1)$, se obtiene

$$y-p_2=-\frac{\lambda\varphi_{n-1}(1,\lambda)}{\varphi(1,\lambda)}.$$

Ejemplos:

• $x^2y^2-xy(x+y)+x^2-y^2=0$.

Puntos dobles $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Haz de cónicas que pasan por ellos y son tangentes a una rama de la curva en $(1,0,0)$: $xy+\lambda(x-y)=0$.

Eliminando la y:

$$x=\frac{2\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+\lambda+1} \qquad \text{y por tanto} \qquad y=\frac{2\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2-\lambda-1}$$

En la Figura 10, se observa que la curva en cuestión intersecada con la hipérbola $xy+x-y=0$ ($\lambda=1$), además de pasar por sus puntos dobles y ser tangente en origen, da el punto $(4/3,-4)$.

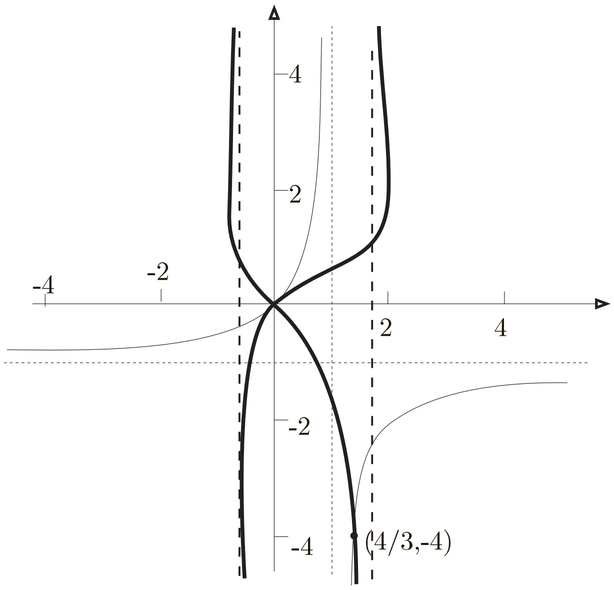


Figura 10: Curva unicursal

```
ImplicitPlot[{x^2y^2-x*y(x+y)+x^2-y^2==0,x*y+x-y==0},{x,-10,10}]

Simplify[Solve[{x^2y^2-x*y(x+y)+x^2-y^2==0,x*y+t(x-y)==0},{x,y}]]
```

```
       2 t (1 + t)        2 t (1 + t)
{{x -> -----------, y -> -----------}, {x ->0, y -> 0},
                2                   2
       1 + t + t          -1 - t + t

   >    {x -> 0, y -> 0}, {x -> 0, y -> 0}}
```

- $4x^2y - 3xy + x - 2 = 0$

Punto doble impropio $(0, 0, 1)$ Haz de rectas $x = \lambda$. Sustituyendo en la ecuación de la curva se tiene

$$4\lambda^2 y - 3\lambda y + \lambda - 2 = 0.$$

Ecuaciones paramétricas:

$$x = \lambda, \qquad y = \frac{2 - \lambda}{4\lambda^2 - 3\lambda}.$$

GRÁFICA DE CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Una curva $\mathcal{C}$ se dice definida paramétricamente por medio de un parámetro t, si las coordenadas afines de sus puntos M se expresan en función de este parámetro y, cuando t varía en un cierto intervalo, el punto M describe dicha curva:

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Así, a un valor del parámetro le corresponde un único punto M de la curva, pero M puede ser imagen de más de un valor de t; si se verifica esto último diremos que M es un punto múltiple de la curva.

El dominio de definición de la curva queda determinado por la condición de que las dos funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ estén definidas y sean reales en todos sus puntos.

Cuando existe periodicidad o simetrías el dominio puede subdividirse en partes tal que conociendo el arco de curva correspondiente a una de ellas se puede obtener la totalidad de la curva por medio de traslaciones o simetrías.

1 Periodicidad

Si x e y son funciones periódicas de período común T, es decir, si

$$x(t+T) = x(t), \qquad y(t+T) = y(t), \qquad \forall t,$$

se limita el estudio a un intervalo de amplitud T, incluido en el dominio de definición. Una vez construida la curva en este intervalo, el resto se construye efectuando sucesivas traslaciones.

Si los períodos T_1 y T_2 de las funciones x e y fueran distintos entonces el mínimo común múltiplo entre ellos constituye un período común.

2 Simetrías

- El eje OX es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t', tal que $x(t) = x(t'), \quad y(t) = -y(t')$.
- El eje OY es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t', tal que $x(t) = -x(t'), \; y(t) = y(t')$.
- La recta $y = x$ es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t', tal que $x(t) = y(t'), \quad y(t) = x(t')$.
- La recta $y = -x$ es eje de simetría si $\forall t$ corresponde otro t', tal que $x(t) = -y(t'), \; y(t) = -x(t')$.
- El origen de coordenadas es centro de simetría si $\forall t$ existe t', tal que $x(t) = -x(t'), \; y(t) = -y(t')$.

3 Estudio en el entorno de un punto

Sea $\mathcal{C}$ la curva plana definida por:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \big(x(t), y(t)\big), \qquad t \in [a,b].$$

Si la función vectorial $\vec{\mathbf{x}}$ es derivable de orden n en un entorno de t_0, a partir de la fórmula de Taylor se puede estudiar la existencia de una tangente a la curva en el entorno de t_0:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0) = (t-t_0)\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\Big|_{t_0} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{d^2\vec{\mathbf{x}}}{dt^2}\Big|_{t_0} + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\Big(\frac{d^n\vec{\mathbf{x}}}{dt^n}\Big|_{t_0} + \vec{\epsilon}\Big),$$

con $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{\epsilon} = 0$.

<u>Primer caso:</u>

Si la derivada $\vec{\mathbf{x}}'(t_0) \neq 0$, la curva admite una tangente, que es la recta definida por el punto M_0 y el vector $\vec{\mathbf{x}}'(t_0)$:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

El punto M_0 se dice ordinario.

Posición de una curva paramétrica respecto a la tangente:

■ Si la derivada $\vec{\mathbf{x}}''(t_0)$ no es colineal con $\vec{\mathbf{x}}'(t_0)$, tomamos la referencia afín $\{M_0, \vec{\mathbf{x}}'(t_0), \vec{\mathbf{x}}''(t_0)\}$, poniendo

$$\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0) = (t-t_0)\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\Big|_{t_0} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\Big(\frac{d^2\vec{\mathbf{x}}}{dt^2}\Big|_{t_0} + \vec{\epsilon}\Big),$$

y si ξ, η son las componentes el vector $\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0)$ en esta referencia se tiene la siguiente aproximación

$$\xi \simeq t - t_0, \qquad \eta \simeq \frac{(t-t_0)^2}{2}.$$

En un entorno de t_0, η es positivo: *la curva está situada localmente del mismo lado de la tangente, en el semiplano al que apunta el vector* $\vec{\mathbf{x}}''(t_0)$ (Figura 11 (A)).

■ Si $\vec{\mathbf{x}}''(t_0)$ es colineal con $\vec{\mathbf{x}}'(t_0)$ y si $\vec{\mathbf{x}}'''(t_0)$ es no lineal con $\vec{\mathbf{x}}'(t_0)$, se tiene

$$\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0) = (t-t_0)\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\Big|_{t_0} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{d^2\vec{\mathbf{x}}}{dt^2}\Big|_{t_0} + \frac{(t-t_0)^3}{3!}\Big(\frac{d^3\vec{\mathbf{x}}}{dt^3}\Big|_{t_0} + \vec{\epsilon}\Big),$$

$$\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \Big((t-t_0) + c\frac{(t-t_0)^2}{2}\Big)\vec{\mathbf{x}}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}\Big(\vec{\mathbf{x}}'''(t_0) + \vec{\epsilon}\Big).$$

de donde las componentes de $\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0)$ respecto a $\{M_0, \vec{\mathbf{x}}'(t_0), \vec{\mathbf{x}}'''(t_0)\}$ son

$$\xi = (t-t_0) + c\frac{(t-t_0)^2}{2} + \frac{(t-t_0)^3}{3!}\epsilon_1, \qquad \eta = \frac{(t-t_0)^3}{3!} + \frac{(t-t_0)^3}{3!}\epsilon_2,$$

que en un entorno de t_0, se puede poner:

$$\xi \simeq (t-t_0), \qquad \eta \simeq \frac{(t-t_0)^3}{3!}.$$

Estas componentes son del signo de $t - t_0$. *La curva atraviesa a la tangente en M_0. Se dice entonces que M_0 es un* **punto de inflexión** (Figura 11 (B)).

SEGUNDO CASO

Supongamos ahora que $\vec{\mathbf{x}}'(t_0) = 0$. En este caso $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ y M_0 se dice un **punto singular**.
Si $\vec{\mathbf{x}}^{(p)}(t_0)$ es la primera derivada que no se anula en M_0, la ecuación de la **tangente** en este punto es

$$\frac{x - x(t_0)}{x^{(p)}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y^{(p)}(t_0)}.$$

Posición de la curva respecto a la tangente:

Si $\vec{\mathbf{x}}^{(p)}(t_0)$ y $\vec{\mathbf{x}}^{(q)}(t_0)$ son las primeras derivadas no colineales ($q > p$), se tiene

$$\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \Big(\frac{(t-t_0)^p}{p!} + c\frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots\Big)\vec{\mathbf{x}}^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}(\vec{\mathbf{x}}^{(q)}(t_0) + \vec{\epsilon})$$

Si ξ, η son las componentes de $\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0)$ respecto a $\{M_0, \vec{\mathbf{x}}^{(p)}(t_0), \vec{\mathbf{x}}^{(q)}(t_0)\}$, en un entorno de t_0:

$$\xi \simeq \frac{(t-t_0)^p}{p!}, \qquad \eta \simeq \frac{(t-t_0)^q}{q!}.$$

La forma de la curva depende de la paridad de p y q:
— Si p es impar y q es impar, ξ y η cambian de signo. Punto de inflexión (Figura 11 (C)).
— Si p es par y q es impar, $\xi > 0$ y η cambia de signo. Punto de retroceso de primera especie (Figura 11 (D)).
— Si p es impar y q es par, ξ cambia de signo y $\eta > 0$. Punto ordinario (Figura 11 (E)).
— Si p es par y q es par, $\xi > 0$ y $\eta > 0$. Punto de retroceso de segunda especie (Figura 11 (F)).

EJEMPLOS

- Para obtener los puntos singulares de la curva

$$x = 2t + \frac{1}{t^2}, \qquad y = t^2 + \frac{2}{t},$$

se calculan las primeras derivadas:

$$x' = 2 - \frac{2}{t^3}, \quad y' = 2t - \frac{2}{t^2}; \qquad x'' = \frac{6}{t^4}, \quad y'' = 2 + \frac{4}{t^3}; \qquad x''' = -\frac{24}{t^5}, \quad y''' = -\frac{12}{t^4}.$$

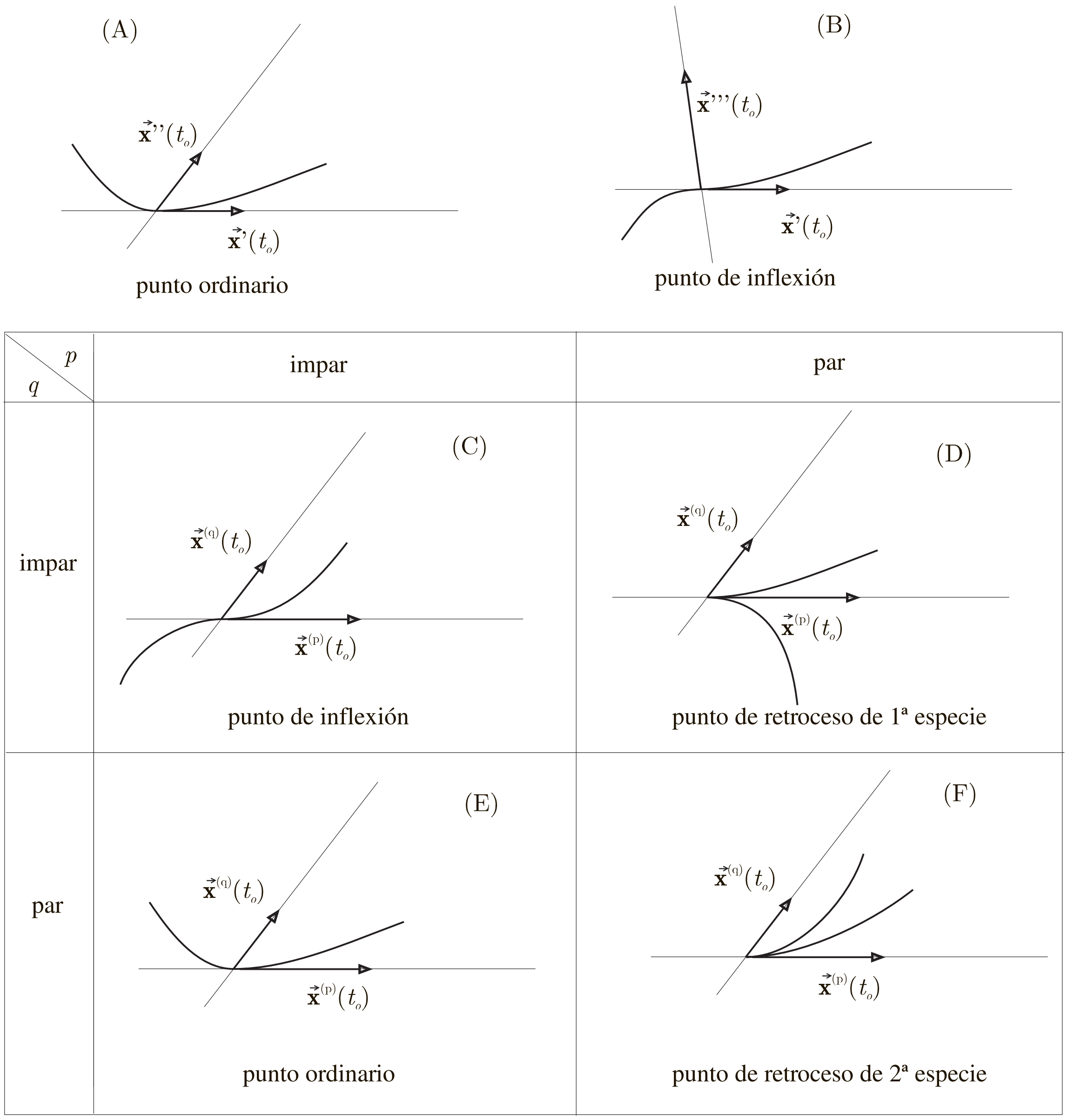


Figura 11: Posición de una curva paramétrica respecto a su tangente

Se tiene que $x'(1) = y'(1) = 0$ y, por tanto, el punto $M_0(3,3)$ de parámetro $t = 1$ es un punto singular. Como además $x''(1) = 6, y''(1) = 6; x'''(1) = -24, y'''(1) = -12$, la tangente tiene la dirección el vector $\vec{\mathbf{x}}''(1) = (6,6)$ y M_0 es un punto de retroceso de primera especie ($p = 2$, par y $q = 3$, impar).

- Considérese la curva

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \left(t(3-2t)(t-1)^2, t - 1 + \frac{1}{t} \right).$$

$\vec{\mathbf{x}}'(t) = (3 - 16t + 21t^2 - 8t^3, 1 - t^{-2})$, $\vec{\mathbf{x}}'(1) = (0,0)$, con lo que el punto $M_0(0,1)$ es singular.
$\vec{\mathbf{x}}''(t) = (-16 + 42t - 24t^2, 2/t^3)$ y $\vec{\mathbf{x}}''(1) = (2,2)$.
$\vec{\mathbf{x}}'''(t) = (42 - 48t, -6/t^4)$, $\vec{\mathbf{x}}'''(1) = (-6,-6)$.
$\vec{\mathbf{x}}^{(iv)}(t) = (-48, 24/t^5)$, $\vec{\mathbf{x}}^{(iv)}(1) = (-48, 24)$.
Con lo que $\vec{\mathbf{x}}''(1)$ y $\vec{\mathbf{x}}'''(1)$ son colineales, $\vec{\mathbf{x}}''(1)$ y $\vec{\mathbf{x}}^{(iv)}(1)$ no. Se trata de un punto de retroceso de segunda especie ($p = 2, q = 4$) y la tangente en él tienen la dirección del vector $\vec{\mathbf{x}}''(1) = (2,2)$.

4 Puntos múltiples

Sea $\vec{\mathbf{x}}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a,b]$, la representación paramétrica de una curva plana. Cuando a dos valores distintos t_1 y t_2 del parámetro corresponde el mismo punto, es decir, cuando se verifica, $\vec{\mathbf{x}}(t_1) = \vec{\mathbf{x}}(t_2)$, resulta un punto doble por estar contenido en dos ramas distintas de la curva.

En general, en estos puntos las dos ramas tendrán tangentes distintas; la posición de cada rama respecto a su tangente de determina como en el párrafo §3

Si existen valores del parámetro, $t_1, t_2, t_3, \dots$ todos distintos y tales que $\vec{\mathbf{x}}(t_1) = \vec{\mathbf{x}}(t_2) = \vec{\mathbf{x}}(t_3) = \cdots$, se tiene un punto múltiple.

Ejemplos

- Puntos dobles de la curva de ecuaciones:

$$x = \frac{5t^2 - 2t}{4t^2 - 1}, \qquad y = \frac{4t^3 - 7t^2 + 8t + 4}{2t + 1}.$$

Para t_1, t_2 se debe verificar:

$$\frac{5t_1^2 - 2t_1}{4t_1^2 - 1} = \frac{5t_2^2 - 2t_2}{4t_2^2 - 1}, \qquad \frac{4t_1^3 - 7t_1^2 + 8t_1 + 4}{2t_1 + 1} = \frac{4t_2^3 - 7t_2^2 + 8t_2 + 4}{2t_2 + 1}.$$

Quitando denominadores y sacando factor común se obtiene:

$$5(t_2^2 - t_1^2) - 8t_1t_2(t_2 - t_1) - 2(t_2 - t_1) = 0,$$

$$8t_1t_2(t_2^2 - t_1^2) + 4(t_2^3 - t_1^3) - 14t_1t_2(t_2 - t_1) - 7(t_2^2 - t_1^2) = 0,$$

llamando $t_1 + t_2 = s$ y $t_1t_2 = p$ y simplificando, resulta:

$$5s - 8p - 2 = 0, \qquad 4s^2 + 8sp - 7s + 18p = 0.$$

Cuyas soluciones son:

$$s = 2, \quad p = 1, \qquad t^2 - 2t + 1 = 0, \quad t_1 = t_2 = 1.$$

Luego $\vec{\mathbf{x}}(1) = (1, 3)$ es un punto de retroceso de primera especie, pues $\vec{\mathbf{x}}'(1) = (0, 0)$,$\vec{\mathbf{x}}''(1) = (2/3, 10/3)$ y $\vec{\mathbf{x}}'''(1) = (-16/3, 4/3)$

$$s = \frac{1}{4}, \quad p = -\frac{3}{32}, \qquad 32t^2 - 8t - 3 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{8}.$$

Luego $(-\frac{3}{4}, \frac{55}{16})$ es un punto doble.

- Puntos dobles de la curva:

$$x = \frac{t^2}{t - 1}, \qquad y = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

$$\frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2}{t_2 - 1}, \qquad \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1};$$

$$t_1^2t_2 - t_1^2 = t_1t_2^2 - t_2^2, \qquad t_1t_2^2 - t_1 = t_1^2t_2 - t_2;$$

$$t_1t_2(t_1 - t_2) - (t_1 + t_2)(t_1 - t_2) = 0, \qquad t_1t_2(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2) = 0,$$

dividiendo por $t_1 - t_2$ y llamando a $t_1 + t_2 = s,\ t_1t_2 = p$ resulta:

$$p - s = 0, \qquad p + 1 = 0,$$

$$s = -1, \quad p = -1, \qquad t^2 + t - 1 = 0, \qquad t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la curva, resulta el punto doble $(-1, -1)$.

$$\vec{\mathbf{x}}'(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}) = (-5.88, -3, 68), \qquad \vec{\mathbf{x}}'(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}) = (0.85, -1, 58).$$

5 Ramas Infinitas. Asíntotas y curvas asintóticas

Una curva definida por $\vec{\mathbf{x}}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ posee una **rama infinita** si la distancia x$|\vec{\mathbf{x}}| \to \infty$ cuando $t \to t_0$ (finito o infinito).

Casos que se pueden presentar:

<table>
<tr><th colspan="6">Asíntotas y curvas asintóticas</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0, \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$</td><td colspan="4">asíntota vertical: $\boxed{x = x_0}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty, \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$</td><td colspan="4">asíntota horizontal: $\boxed{y = y_0}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$
$\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$</td><td rowspan="5">$\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$</td><td>$\pm\infty$</td><td colspan="3">Rama parabólica en la dirección del eje OY</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="3">Rama parabólica en la dirección del eje OX</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a finito
$a \neq 0$</td><td rowspan="3">$\lim\limits_{t\to t_0} \big(y(t) - ax(t)\big)$</td><td>$b$ finito</td><td>$\boxed{y = ax + b}$</td></tr>
<tr><td>No existe</td><td>Dirección asintótica sin asíntota.</td></tr>
<tr><td>$\pm\infty$</td><td>Rama parabólica en la dirección a.</td></tr>
</table>

- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ y si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, entonces $x = x_0$ es **asíntota vertical** de la curva.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ y si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, entonces $y = y_0$ es **asíntota horizontal** de la curva.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ y si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, se estudia el límite de $y(t)/x(t)$ para saber si la curva admite una dirección asintótica.

Si $y(t)/x(t)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$, la curva tiene una **rama parabólica** en la dirección de OY.

Si $y(t)/x(t) \to 0$, la curva tiene una **rama parabólica** en la dirección de OX.

Si $y(t)/x(t)$ tiene un límite finito no nulo a, se halla el límite de $y(t) - ax(t)$, si es finito e igual a b, entonces la recta $y = ax + b$ es **asíntota** de la curva. Desarrollando $y(t) - ax(t) - b$ en un entorno de t_0, se puede determinar la **posición de la curva respecto de la asíntota**. Si el límite $y(t) - ax(t)$ no existe, la curva posee una dirección asintótica sin asíntota.

Si el límite $y(t) - ax(t)$ es infinito, la curva admite una rama parabólica en la dirección a. Para determinar una **parábola asintótica**, podemos proceder de forma análoga al primero de los ejemplos siguientes:

<u>Ejemplos</u>

- Parábola asintótica a la curva

$$x = \frac{t^7 + t + 1}{t^2} = t^{-2} + t^{-1} + t^5, \qquad y = \frac{t^2 + 1}{t} = t^{-1} + t$$

Se elimina primeramente el sumando de potencia -2,

$$x - y^2 = t^{-1} - 2 - t - t^2 + t^5.$$

Se elimina a continuación el sumando de potencia -1,

$$x - y^2 - y = -2 - t - t^2 + t^5.$$

La expresión $x - (y^2 + y - 2)$ tiende a cero cuando t tiene a cero, y se tiene una parábola asintótica de ecuación

$$x = y^2 + y - 2.$$

- Asíntotas de la curva (Figura 12 (C)):

$$x = \frac{1}{t-1}, \qquad y = \frac{t^2+1}{t-1}.$$

Es claro que x e y tienden a infinito cuando $t \to 1$.

Ahora bien,

$$\lim_{t\to 1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}(t^2+1)=2,$$

luego existe una dirección asintótica paralela a la recta $y=2x$, y

$$\lim_{t\to 1}(y-2x)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2+1}{t-1}-\frac{2}{t-1}\right)=\lim_{t\to 1}(t+1)=2.$$

Por lo tanto la curva tiene como asíntota la recta $y=2x+2$.

Además, cuando t tiende a más infinito (o a menos infinito), x tiende a cero e y tiende a más infinito (o a menos infinito); entonces la curva tiene como asíntota vertical la recta $x=0$.

- Ramas infinitas de la curva (Figura 12 (B)):

$$x=\frac{t^2}{t^2-1},\qquad y=\frac{t}{t-1}.$$

Si $t\to 1$, entonces $x\to\infty$ e $y\to\infty$,

$$\lim_{t\to 1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t}=2;\qquad \lim_{t\to 1}y-2x=-\frac{t}{t+1}=-\frac{1}{2}$$

luego $y=2x-1/2$ es la asíntota y su posición respecto a la curva se determina estudiando el signo de $y-(2x-1/2)=(1-t)/(2(1+t))$:

$$\text{Si}\quad t\to 1_+,\qquad x\to+\infty,\quad y\to+\infty,\quad y-(2x-\frac{1}{2})\to 0_-$$

$$\text{Si}\quad t\to 1_-,\qquad x\to-\infty,\quad y\to-\infty,\quad y-(2x-\frac{1}{2})\to 0_+$$

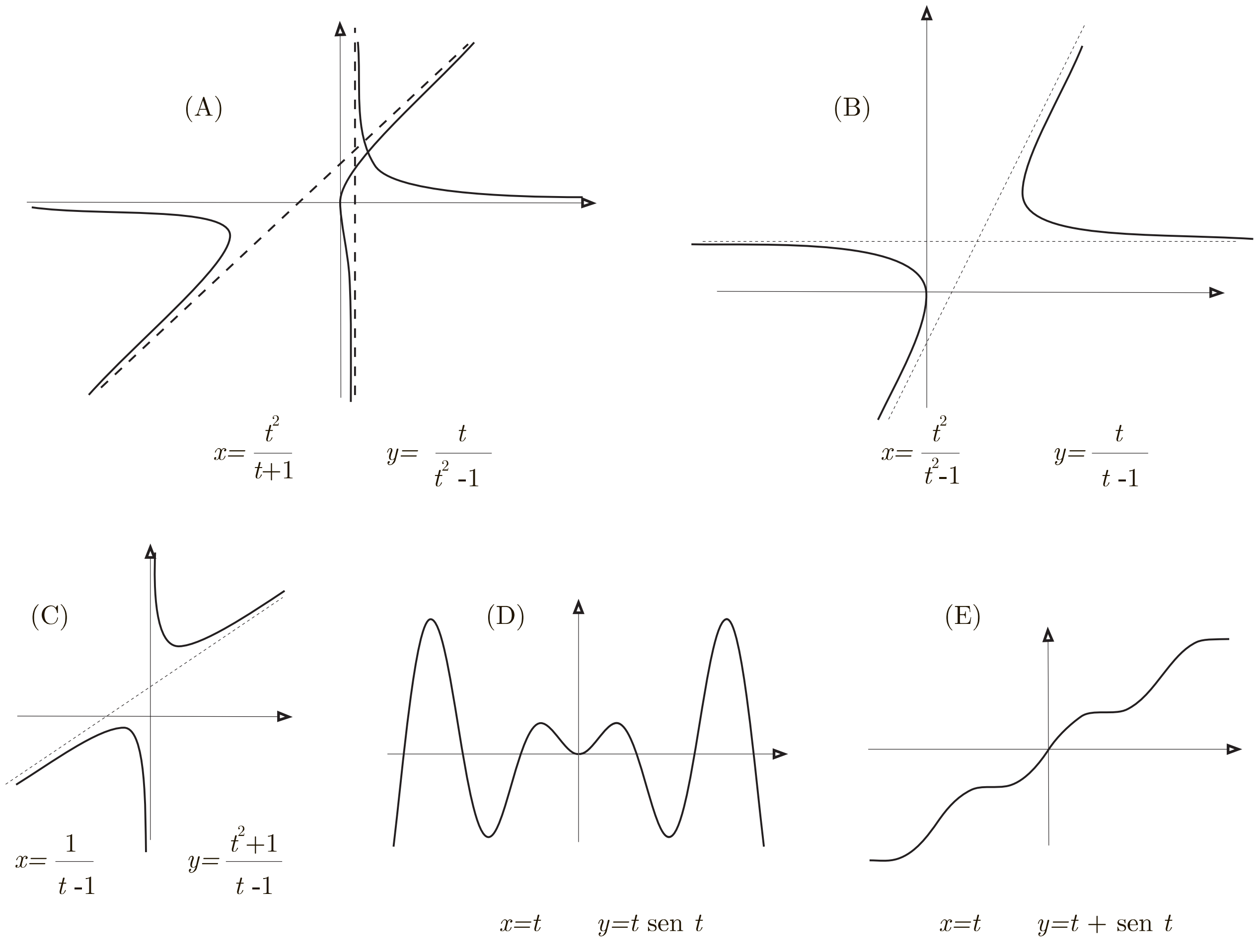


Figura 12: Ramas infinitas

Si $t\to -1$, entonces $x\to\infty$ e $y=1/2$ es una asíntota horizontal.

- Dada la curva (Figura 12 (A)):

$$x = \frac{t^2}{t+1}, \qquad y = \frac{t}{t^2-1},$$

veamos sus asíntotas

$$\lim_{t\to\infty} x = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} y = 0; \quad y = 0, \text{ asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{t\to 1} x = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to 1} y = \infty; \quad x = \frac{1}{2}, \text{ asíntota vertical.}$$

$$\lim_{t\to -1} x = \infty, \quad \lim_{t\to -1} y = \infty; \quad a = \lim_{t\to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{t\to -1} y - ax = \lim_{t\to -1} \frac{t(2-t)}{2(t-1)} = \frac{3}{4}, \qquad y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}, \text{ asíntota horizontal.}$$

- Para la curva (Figura 12 (D)):

$$x = t, \qquad y = t \operatorname{sen} t,$$

se tiene que para $t \to \infty$, $x \to \infty$ e $y \to \infty$, pero el

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{t \operatorname{sen} t}{t},$$

no existe. Por lo tanto, no tiene dirección asintótica.

- Puede ocurrir que una rama infinita admita dirección asintótica sin tener asíntota. Sea la curva (Figura 12 (E)):

$$x = t, \qquad y = t + \operatorname{sen} t,$$

si $t \to \infty$, entonces $x \to \infty$ e $y \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{t + \operatorname{sen} t}{t} = 2,$$

pero el

$$\lim_{t\to\infty} (y - 2x) = \lim_{t\to\infty} (\operatorname{sen} t + 2t - 2t)$$

no existe. Por lo tanto, admite dirección asintótica pero no tiene asíntota.

6 Cuadro de variaciones

Se construye un cuadro de variaciones en donde figuran los signos de $x'(t)$, $y'(t)$, las variaciones de $x(t)$, $y(t)$, así como los valores de x e y en los t que anulan $x'(t), y'(t)$, límites o valores en los extremos de los intervalos que constituyen el campo de variación de t, etc.

Se tienen así los parámetros de los puntos singulares (aquellos en que $x'(t) = y'(t) = 0$), de los puntos de tangente paralela a los ejes (a OY, si $x'(t) = 0$ e $y'(t) \neq 0$, a OX, si $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$). En ocasiones, conviene anotar en el cuadro las variaciones de $\mu(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, que es el coeficiente angular de la tangente.

El crecimiento y decrecimiento de la curva se observará también en el cuadro de variaciones, pues al conocer las variaciones de $x'(t)$ e $y'(t)$, se tiene la variación de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \mu.$$

<u>Ejemplo</u>

Dada una curva en coordenadas paramétricas veremos su periodicidad, simetrías, y construiremos el cuadro de variaciones. Sea curva llamada nefroide (Figura 13)

$$x = 3\cos t - \cos 3t, \qquad y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t = 4 \operatorname{sen}^3 t.$$

$T = 2\pi$ es el período. Es simétrica respecto al eje OY: $x(t) = -x(\pi - t), y(t) = y(\pi - t)$; y simétrica respecto al eje OX: $x(t) = x(-t), y(t) = -y(-t)$. Luego el estudio lo podemos limitar al intervalo $[0, \pi/2]$.

Para expresar en factores las derivadas, podemos usar Mathematica:

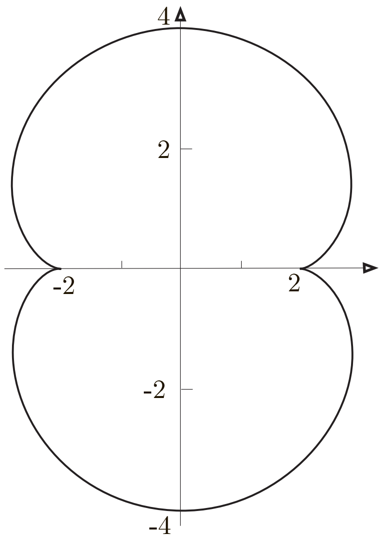


Figura 13: Nefroide

```
In[1]:=  f[t_]:={3Cos[t]-Cos[3t],3Sin[t]-Sin[3t]}
In[2]:= Factor[f'[t],Trig->True]
Out[2]:= {6 (Cos[t] - Sin[t]) Sin[t] (Cos[t] + Sin[t]), 12 Cos[t] Sin[t]^2}
```

$$x' = -3\,\mathrm{sen}\, t + 3\,\mathrm{sen}\, 3t = 6\,\mathrm{sen}\, t \cos 2t, \qquad y' = 3\cos t - 3\cos 3t = 12\,\mathrm{sen}^2 t \cos t; \qquad \frac{y'}{x'} = \mathrm{tag}\, 2t.$$

Tenemos el siguiente cuadro de variaciones:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$+$	0	$-$	-6
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4
y'	0	$+$	$3\sqrt{2}$	$+$	0
y'/x'	0		∞		0

7 Diagrama cartesiano.

A veces es conveniente representar por separado la curva $x = x(t)$, respecto a un sistema de coordenadas x, t; y la curva $y = y(t)$, respecto a un sistema de coordenadas y, t. Dibujadas estas curvas se ve como varían x e y cuando t toma todos los valores posibles.

<u>Ejemplo:</u>
• Para representar la curva de ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{1}{t+1}, \qquad y = t^2 + 1,$$

obtenemos previamente las representaciones de la hipérbola $x = x(t) = 1/(t+1)$ en el plano Otx y de la parábola $y = y(t) = t^2 + 1$ en el plano Oty, (Figura 14), observando como varían x e y en función de t, para ayudar a deducir la representación pedida.

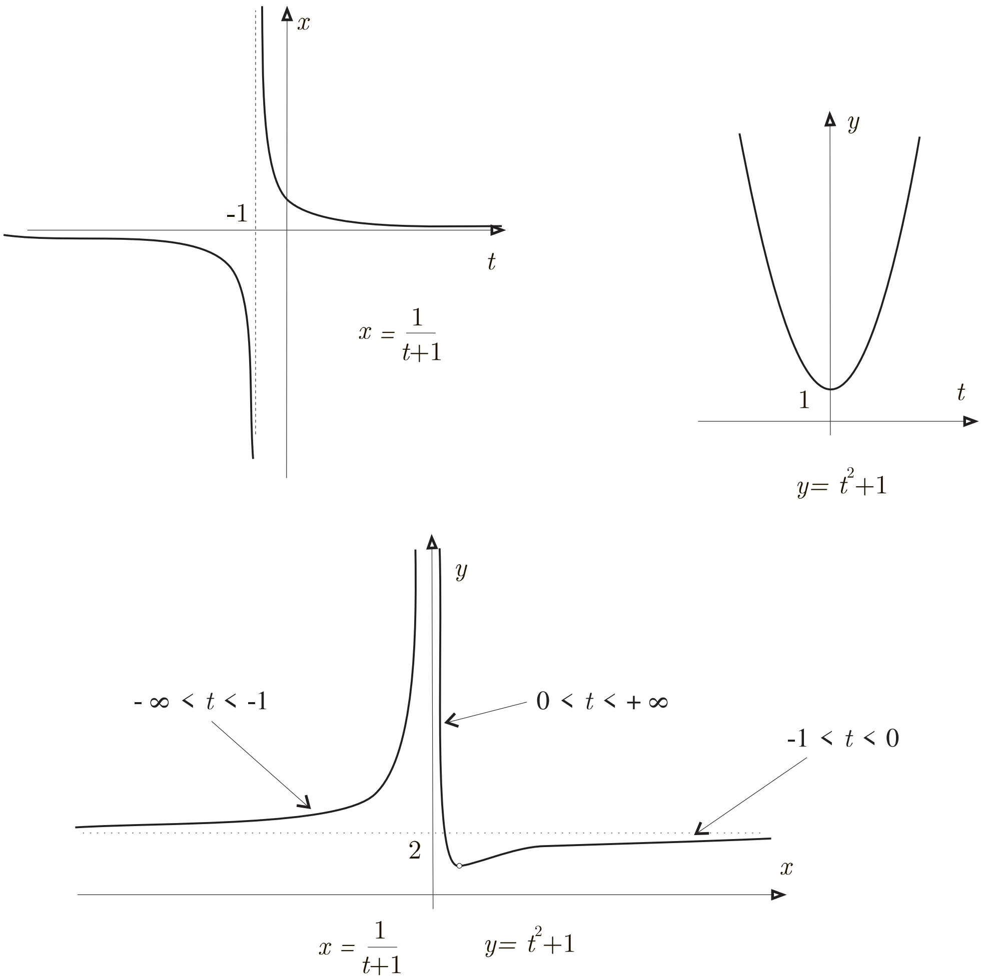


Figura 14: Diagrama cartesiano

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	0	$\searrow$ $\dfrac{-\infty}{+\infty}$	$\searrow$ 1	$\searrow$ 0
y	$+\infty$	$\searrow$ 2	$\searrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$

8 Curvas racionales

Una curva es racional si las coordenadas de cualquiera de sus puntos se expresan mediante polinomios o cociente de polinomios en el parámetro t.

$$x = \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}, \quad y = \frac{P_2(t)}{Q_2(t)}, \quad P_i, Q_i \ \text{ polinomios}, \ \ i = 1, 2.$$

La eliminación de t entre estas dos ecuaciones da como resultante un polinomio en x_1, x_2, es decir, la curva es algebraica. El recíproco no es cierto en general (ver curvas unicursales, pág. 18).

La representación de una curva racional es propia si a cada punto de la curva corresponde un sólo valor del parámetro, excepto para un número finito de puntos singulares.

Veamos un método para investigar si una representación de una curva racional es propia o no.

Se investiga si es posible obtener todo punto para dos valores distintos de t y t' del parámetro:

$$\frac{P_1(t)}{P_0(t)} = \frac{P_1(t')}{P_0(t')}, \qquad \frac{P_2(t)}{P_0(t)} = \frac{P_2(t')}{P_0(t')},$$

de donde se obtienen las ecuaciones algebraicas:

$$P_0(t)P_i(t') - P_0(t')P_i(t) = 0, \qquad i = 1,2.$$

Las cuales tienen el factor común $t - t'$, y el cociente por él es un polinomio simétrico en t y t', que lo designamos por $S_i(t,t')$. S_i se expresa pues en función racional de $t + t' = X$ y de $t.t' = Y$

$$(t - t')S_i(t,t') = P_0(t') - P_0(t')P_i(t) = 0; \qquad S_i(t,t') = T_i(X,Y) = 0, \quad (i = 1,2).$$

Si en el plano referido al sistema de coordenadas afines X, Y las dos curvas que tienen por ecuaciones $T_i(X,Y) = 0$, $i = 1,2$, no tienen ramas comunes, la representación es propia. Si las curvas tienen una rama común la representación no es propia

$$T_i(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)T_i'(X,Y), \qquad (i = 1,2).$$

La relación que liga a los valores t y t' dando un mismo punto de la curva racional es:

$$\mathcal{L}(X,Y) = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}(t + t', tt') = 0.$$

Ejemplos

Sea la curva plana:

$$x = \frac{t^3 - 2t}{t^2 + 4}, \qquad y = \frac{t^2}{t^4 + 4}.$$

Para este caso:

$$S_1(t,t') = t^3t'^3 + 8 - (t^2 + t'^2 + tt')(2tt' + 4), \qquad S_2(t,t') = (t + t')(t^2t'^2 - 4),$$

y por lo tanto:

$$T_1(X,Y) = (Y + 2)(Y^2 - 2X^2 + 4), \qquad T_2(X,Y) = X(Y + 2)(Y - 2).$$

La representación no es propia. La relación entre t y t' dando el mismo punto es: $\mathcal{L}(X,Y) = Y + 2$, o sea $\mathcal{L}(t + t', tt') = tt' + 2 = 0$.

Se puede tomar por parámetro de una representación propia

$$u = t + t' = t - \frac{2}{t} = \frac{t^2 - 2}{t}.$$

La representación paramétrica propia es:

$$x = \frac{u}{u^2 + 4}, \qquad y = \frac{1}{u^2 + 4}.$$

La curva es la cónica cuya ecuación cartesiana es: $y = x^2 + 4y^2$.

Veamos, en general, cómo pasar a una representación propia. Ordenamos con relación a la t la expresión común $(t - t')\mathcal{L}(t + t', tt') = 0$, resultando el polinomio:

$$t^m\varphi_0(t') + t^{m-1}\varphi_1(t') + \cdots + t\varphi_{m-1}(t') = 0.$$

Este polinomio tiene raíces $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y a estas raíces corresponde el mismo punto de la curva.

Sea $\dfrac{\varphi_p(t')}{\varphi_q(t')}$, que no se reduce a una constante, el cociente de dividir los coeficientes de t en dicho polinomio y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\varphi_p(t')}{\varphi_q(t')} = \frac{\varphi_p(t')}{\varphi_0(t')} : \frac{\varphi_q(t')}{\varphi_0(t')},$$

representa el cociente de dividir la suma de los productos p a p de las raíces de la ecuación anterior por la suma de los productos de dichas raíces q a q. [2]

Como t' es una de estas raíces, si se cambia t' por otra de las raíces t_i cualquiera, dicho cociente no varía y por lo tanto $\dfrac{\varphi_p(t)}{\varphi_q(t)}$ toma siempre el mismo valor para todos los valores $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Luego, haciendo $\theta = \dfrac{\varphi_p(t)}{\varphi_q(t)}$, a todo

[2] Recuérdese que las relaciones de Cardano entre las raices de un polinomio de grado m son:
$m = 2$, $t^2 + a_1t + a_2 = 0$, $t_1t_2 = a_2, t_1 + t_2 = -a_1$.
$m = 3$, $t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0$, $t_1t_2t_3 = -a_3, t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = a_2, t_1 + t_2 + t_3 = -a_1$.
$m = 4$, $t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4 = 0$, $t_1t_2t_3t_4 = a_4, t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = -a_3$, $t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = a_2, t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -a_1$.

valor de $t = t', t_1, t_2, \ldots, t_m$, corresponde el mismo valor de θ. Así, tomando θ como nuevo parámetro a cada valor de θ corresponderá un único valor de x e y. Se trata, por lo tanto, de una representación propia.

Intersección de una curva racional con una recta:

Sea una curva racional $\mathcal{C}$ que está definida por una representación propia

$$x = \frac{P_1(t)}{P_0(t)}, \qquad y = \frac{P_2(t)}{P_0(t)},$$

o en coordenadas homogéneas $x_0 = P_0(t), x_1 = P_1(t), x_2 = P_2(t)$, y que los polinomios P_0, P_1, P_2 no tienen factores comunes y sea la recta r de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$. Los puntos de intersección de la curva $\mathcal{C}$ con la recta r corresponde cada uno a un valor del parámetro, raiz de la ecuación algebraica

$$u_0P_0(t) + u_1P_1(t) + u_2P_2(t) = 0.$$

Si existen coeficientes u_i tales que esta ecuación sea idénticamente nula relativamente a la variable t, la curva coincide o es parte de la recta. Si no, esta ecuación es de grado igual al más alto de los polinomios P_0, P_1, P_2. Se puede enunciar los siguiente:

"El orden de una curva racional es igual al mayor de los grados de los polinomios P_i (primos entre sí) que definen una representación propia

$$x_0 = P_0(t), x_1 = P_1(t), x_2 = P_2(t).$$

GRÁFICA DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES

Los puntos del plano en coordenadas polares (ρ, θ), referidos a un sistema de coordenadas polares de polo O y eje polar OP, que satisfacen a unas de las ecuaciones del tipo

$$\rho = f(\theta) \qquad \text{ó} \qquad F(\rho, \theta) = 0,$$

describen, en general, una curva en el plano polar.

1 Reducción del intervalo de estudio por periodicidad

Sea la curva definida por la ecuación $\rho = f(\theta)$, siendo f una función periódica de periodo T. Distinguiremos los casos siguientes:

a) Si $T = 2k\pi$, se hace variar θ en $[\alpha, \alpha + T]$ ó en $[\alpha - T, \alpha]$, siendo α arbitrario.

b) Si $T = \frac{2k\pi}{n}$, siendo k/n irreducible, se hace variar θ en $[\alpha, \alpha + T]$ ó en $[\alpha - T, \alpha]$, obteniéndose un arco Γ. Entonces la curva se obtiene a partir de Γ mediante $n-1$ rotaciones sucesivas, de centro O y ángulo $\frac{2k\pi}{n}$. Está en este caso el de periodo $T = (2k+1)\pi$.

c) Si $T = 2a\pi$, siendo a irracional, se hace variar θ en $[\alpha, \alpha + T]$ ó en $[\alpha - T, \alpha]$, obteniéndose una arco Γ; entonces la curva se obtiene a partir de Γ, mediante infinitas rotaciones sucesivas de centro O y ángulo $2a\pi$.

d) Si se tiene $f(\theta + T/2) = -f(\theta)$, se hace variar θ en $[\alpha, \alpha + T/2]$ ó en $[\alpha - T/2, \alpha]$, obteniéndose una arco γ. Entonces se obtiene una arco Γ correspondiente a $[\alpha, \alpha + T]$ mediante una rotación de centro O y ángulo $\pi + T/2$, aplicada a γ; estando ahora en el caso a), b), c) que corresponda.

Resumen:

Periodo T	Intervalo de estudio	Arco parcial	Gráfica total
$2k\pi$	$[\alpha, \alpha + T]$ ó $[\alpha - T, \alpha]$	Toda la curva	Toda la curva
$\frac{2k\pi}{n}, \frac{k}{n}$ irreducible	$[\alpha, \alpha + T]$ ó $[\alpha - T, \alpha]$	Un arco Γ	$n-1$ giros de centro O y amplitud $\frac{2k\pi}{n}$ del arco Γ
$2a\pi, a$ irracional	$[\alpha, \alpha + T]$ ó $[\alpha - T, \alpha]$	Un arco Γ	Infinitos giros de centro O y amplitud $2a\pi$ del arco Γ

2 Reducción del intervalo de estudio mediante simetrías

Una curva $\rho = f(\theta)$ es simétrica respecto a:

a) el eje polar, si se verifica: $f(\theta) = f(2k\pi - \theta)$ ó $f(\theta) = -f((2k+1)\pi - \theta)$.

b) la perpendicular al eje polar, si $f(\theta) = f((2k+1)\pi - \theta)$ ó $f(\theta) = -f(2k\pi - \theta)$.

c) al polo, cuando $f(\theta) = -f(2k\pi + \theta)$ ó $f(\theta) = f((2k+1)\pi + \theta)$.

d) la recta $\theta = \alpha$, si se tiene $f(\theta) = f(2\alpha - \theta)$.

Si el intervalo de estudio es de amplitud T' $(T' = T$ ó $T' = T/2)$, por cada eje de simetría independiente de los otros ejes y de las rotaciones por periodicidad, se reduce la amplitud a la mitad. Es decir, el nuevo intervalo de estudio es $[\alpha, \alpha + T'/2]$ ó $[\alpha - T'/2, \alpha]$. Reducido el campo de estudio a uno de estos intervalos, se obtiene un arco γ' del que, aplicando las simetrías que haya y las rotaciones que corresponde con la periodicidad, se obtiene la representación total de la curva.

3 Tangente

3.1 Ecuación de la recta en coordenadas polares

Para determinar la ecuación de una recta s en un sistema de coordenadas polares de polo O y eje polar OP, de la que conoce su distancia $d > 0$ y el ángulo α de la perpendicular a ella por el polo, escojamos sobre ella un punto M de coordenadas polares (ρ, θ), designamos por Q el punto de intersección de la recta s con la perpendicular a ella por el polo: resulta en el triángulo OQM

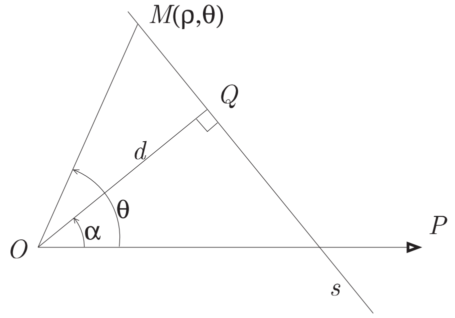
$$\rho = \frac{d}{cos(\theta - \alpha)},$$

ecuación que satisfacen los puntos (ρ, θ) de la recta s.
Si ponemos $a = \cos\alpha/d$, $b = \operatorname{sen}\alpha/d$, la ecuación de la recta s toma la forma:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta}$$

Si la recta pasa por el polo y forma una ángulo θ_0 con el eje polar, su ecuación polar es

$$\boxed{\theta = \theta_0}$$



3.2 Recta tangente a una curva en coordenadas polares

Teniendo en cuenta las fórmulas $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, de transformación entre coordenadas polares y cartesianas, de origen en el polo y como eje OX el eje polar, la pendiente de la tangente en un punto $M(\rho, \theta)$ de la curva $\rho = f(\theta)$, está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta}{\cos\theta d\rho - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta} = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta} = \frac{\operatorname{tag}\theta + \operatorname{tag}\mu}{1 - \operatorname{tag}\theta\operatorname{tag}\mu} = \operatorname{tag}(\theta + \mu),$$

donde $\operatorname{tag}\mu = \rho/\rho'$.

La inclinación de la tangente sobre el eje polar (eje OX) es, según la fórmula obtenida, $\theta + \mu$, por tanto, μ es el ángulo que forma la tangente con el radio vector, el cual viene determinado por la fórmula anterior, o bien por

$$\operatorname{cotg}\mu = \frac{\rho'}{\rho} = D(\ln\rho).$$

La ecuación polar de la tangente en el punto $M(\rho_0, \theta_0)$ es:

$$\rho = \frac{d}{\cos(\theta - \alpha)}, \quad \text{siendo} \quad \alpha = \theta_0 + \mu_0 - \frac{\pi}{2}, \quad d = \rho_0\operatorname{sen}\mu_0, \quad \operatorname{cotg}\mu_0 = \frac{\rho_0'}{\rho_0} = D(\ln\rho).$$

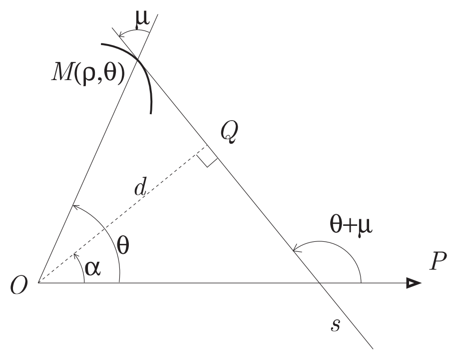
O bien,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{d}\cos(\theta - \alpha) = \frac{1}{\rho_0\operatorname{sen}\mu_0}\cos((\theta - \theta_0) - (\mu_0 - \frac{\pi}{2})) =$$

$$= \frac{1}{\rho_0\operatorname{sen}\mu_0}(\cos(\theta - \theta_0)\cos(\mu_0 - \frac{\pi}{2}) + \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)\operatorname{sen}(\mu_0 - \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{\rho_0}\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_{\theta=\theta_0}\operatorname{sen}(\theta - \theta_0).$$

Tenemos entonces la siguiente ecuación de la tangente a la curva $\rho = f(\theta)$ en el punto (ρ_0, θ_0):

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\cos(\theta - \theta_0) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_{\theta=\theta_0}\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)}$$



3.3 Tangentes en el polo

a) Si la curva de ecuación $\rho = f(\theta)$ pasa por el polo y θ_1 satisface a la ecuación $f(\theta) = 0$, la dirección de la tangente a la curva en el polo $(0, \theta_1)$ viene dada por $\boxed{\theta = \theta_1}$. En efecto, en $(0, \theta_1)$, $\rho = 0$ y $\rho' = f'(\theta_1)$.

Si $\rho' \neq 0$: $\quad \operatorname{tag}(\theta_1 + \mu) = \dfrac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta}_{|\theta=\theta_1} = \dfrac{f'(\theta_1)\operatorname{sen}\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1} = \operatorname{tag}\theta_1.$

Si $\rho' = 0$: $\quad \operatorname{tag}(\theta_1 + \mu) = \lim\limits_{\theta\to\theta_1} \dfrac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{f'(\theta)\cos\theta} = \operatorname{tag}\theta_1.$

b) Si $\lim\limits_{\rho\to 0}\theta = \theta_0$, la recta $\theta = \theta_0$, es una tangente.

3.4 Puntos de tangencia horizontal y vertical

Como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta}$, los valores de θ que dan tangente horizontal resultan de las ecuaciones:

$$\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \rho = f(\theta).$$

Los puntos de tangencia vertical surgen de la resolución de las ecuaciones:

$$-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta = 0, \quad \rho = f(\theta).$$

En los puntos donde el numerador y denominador se anulan simultáneamente la derivada dy/dx no está definida, lo ocurre cuando la curva pasa varias veces por el mismo punto o hay un punto de retroceso.

4 Puntos múltiples

El origen es un punto múltiple si sólo si la ecuación $\rho(\theta) = 0$ posee al menos dos soluciones distintas.
Los otros puntos múltiples se obtienen de las soluciones de una de las dos ecuaciones siguientes:

$$\rho(\theta) = \rho(\theta + 2k\pi), \quad \rho(\theta) = -\rho(\theta + (2k+1)\pi).$$

Obsérvese que si ρ es periódica de periodo 2π, sólo la segunda ecuación, que se reduce a $\rho(\theta) = -\rho(\theta + \pi)$, proporciona eventualmente puntos múltiples.
Si la curva admite ejes de simetría los puntos múltiples se pueden encontrar sobre tales ejes.

5 Asíntotas y ramas parabólicas

Definición.- Un punto $M(\rho, \theta)$ de una curva de ecuación $\rho = f(\theta)$, describe una rama infinita cuando el radio vector ρ (ó $f(\theta)$), crece indefinidamente al tender θ a un valor θ_0.
Asíntotas.- Para hallar la asíntota a una rama infinita se determinan los valores de θ para los cuales $\rho \to \infty$. La posición límite de la tangente en el punto de la curva (ρ_1, θ_1) cuando $\rho_1 \to \infty$, al tender $\theta_1 \to \theta_0$, da la asíntota; luego sus ecuación será:

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho}\right)'_{\theta=\theta_0} \operatorname{sen}(\theta - \theta_0).$$

Con lo que determinamos la distancia d al polo, haciendo $\theta = \theta_0 + \dfrac{\pi}{2}$, y se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho}\right)'_{\theta=\theta_0}, \quad \text{o sea} \quad d = 1/\left(\frac{1}{\rho}\right)'_{\theta=\theta_0}.$$

De la ecuación de la asíntota obtenida $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{d}\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$, podemos determinar su distancia al polo por:

$$d = \lim_{\theta\to\theta_0} \rho\operatorname{sen}(\theta - \theta_0) = \lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta)(\theta - \theta_0).$$

Ramas parabólicas.- Si $d \to \infty$, cuando θ tiende a θ_0, la curva tiene una rama parabólica en la dirección del ángulo polar θ_0.

Posición de la curva respecto a la asíntota
a) Si la asíntota pasa por el polo, basta estudiar el signo de ρ cuando $\theta \to \theta_0$.

b) Si la asíntota no pasa por el polo, se estudia el signo de $f(\theta)\operatorname{sen}(\theta-\theta_0)-d$ en un entorno del valor asintótico θ_0, o bien el signo de

$$\frac{1}{f(\theta)}-\left(\frac{1}{\rho}\right)'_{\theta=\theta_0}\operatorname{sen}(\theta-\theta_0).$$

Asíntotas a las curvas dadas por una ecuación implícita $F(\rho,\theta)=0$.

Si la curva está dada en forma implícita $F(\rho,\theta)=0$, y se puede ordenar según las potencias de ρ:

$$F_n(\theta)\rho^n+F_{n-1}(\theta)\rho^{n-1}+\cdots+F_0(\theta)=0, \tag{7}$$

siendo F_i funciones continuas, con derivadas contínuas y finitas, los valores de θ_0 que anulan a $F_n(\theta)$ y tales que $\lim_{\theta\to\theta_0}(\rho^{n-1}F_{n-1}(\theta)+\cdots+F_0(\theta))$ es finito y no nulo, hacen ρ^n infinito, por lo que determinan direcciones asintóticas. (Obsérvese que también se obtienen direcciones asintóticas para valores de θ_1 que hacen ∞ a $\rho^{n-1}F_{n-1}(\theta)+\cdots+F_0(\theta)$ y tales que $F_n(\theta_1)\neq 0$, pues hacen ρ^n infinito).

La distancia de la asíntota al polo se determina por $d=\lim_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta-\theta_0)$, una vez conocido el valor de θ_0 tal que $F_n(\theta_0)=0$. Desarrollando en series de Taylor, en un entorno de θ_0, cada F_k, tenemos:

$$F_k(\theta)=F_k(\theta_0)+\frac{F_k'(\theta_0)}{1!}(\theta-\theta_0)+\frac{F_k''(\theta_0)}{2!}(\theta-\theta_0)^2+\cdots,$$

resulta sustituyendo en (7)

$$\rho^n(F_n(\theta_0)+\frac{F_n'(\theta_0)}{1!}(\theta-\theta_0)+\frac{F_n''(\theta_0)}{2!}(\theta-\theta_0)^2+\cdots)+\rho^{n-1}(F_{n-1}(\theta_0)+\frac{F_{n-1}'(\theta_0)}{1!}(\theta-\theta_0)+\frac{F_{n-1}''(\theta_0)}{2!}(\theta-\theta_0)^2+\cdots)=0.$$

O sea

$$\begin{array}{lllllll}\rho^nF_n(\theta_0) & + & \rho(\theta-\theta_0)F_n'(\theta_0)\rho^{n-1} & + & \frac{1}{2}\rho^2(\theta-\theta_0)^2F_n''(\theta_0)\rho^{n-2} & +\cdots+ & \\ & + & F_{n-1}(\theta_0)\rho^{n-1} & + & \rho(\theta-\theta_0)F_{n-1}'(\theta_0)\rho^{n-2} & +\cdots+ & \\ & & & + & F_{n-2}(\theta_0)\rho^{n-2} & +\cdots & =0.\end{array}$$

Como $F_n(\theta_0)=0$, haciendo $\rho\to\infty$, habiendo dividido previamente por ρ^{n-1}, y teniendo presente que $d=\lim_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta-\theta_0)$, resulta

$$dF_n'(\theta_0)+F_{n-1}(\theta_0)=0,\quad \text{esto es}\quad d=-\frac{F_{n-1}(\theta_0)}{F_n'(\theta_0)}.$$

Cuando $F_n'(\theta_0)=0$ y $F_{n-1}(\theta_0)\neq 0$, se obtiene una rama parabólica en la dirección θ_0. Si $F_n'(\theta_0)=F_{n-1}(\theta_0)=0$, es preciso dividir la expresión anterior por ρ^{n-2} y cuando $\rho\to\infty$, se tiene

$$\frac{d^2}{2!}F_n''(\theta_0)+dF_{n-1}'(\theta_0)+F_{n-2}(\theta_0)=0.$$

Ecuación de segundo grado que corresponde a dos asíntotas paralelas si $F_n''(\theta_0)\neq 0$. Cuando $F_n''(\theta_0)=0$ y $F_{n-1}'(\theta_0)\neq 0$, se obtiene una rama parabólica y una asíntota. Si $F_n''(\theta_0)=F_{n-1}'(\theta_0)=0$, se obtienen dos ramas parabólicas. En caso que $F_n''(\theta_0)=F_{n-1}'(\theta_0)=F_{n-2}(\theta_0)=0$, hay que dividir por ρ^{n-3}, y al tomar límite cuando $\rho\to\infty$, se llega a una ecuación de tercer grado en d, que nos da la distancia al origen de las tres asíntotas paralelas. Etc...

6 Círculos y puntos asintóticos, ramas en espiral

Si $\lim_{\theta\to\infty}\rho(\theta)=a$, $a\neq 0$ y finito, la curva va envolviendo o va siendo envuelta por una circunferencia de centro en el polo y de radio $|a|$, que recibe el nombre de circunferencia asintótica.

Cuando $\lim_{\theta\to\infty}\rho(\theta)=0$, la curva se aproxima indefinidamente al polo, se dice entonces que un punto asintótico.

Si $\lim_{\theta\to\infty}\rho(\theta)=\infty$, se tiene una rama espiral.

7 Puntos singulares de la ecuación implícita

Dada una curva por la ecuación $F(\rho,\theta)=0$, se denomina punto singular a aquel en que $\rho'=\dfrac{d\rho}{d\theta}$ no está definida. Esto sucede cuando por un punto pasa más de una rama de la curva.

Para calcularlos derivamos $F(\rho,\theta)=0$ respecto a θ: $F_\theta+F_\rho\rho'=0$.

Si $F_\theta=F_\rho=0$, ρ' no está definida. Si derivamos de nuevo, resulta:

$$F_{\theta^2}+2\rho'F_{\theta\rho}+\rho'^2F_{\rho^2}+\rho''F_\rho=0,$$

como $F_\rho=0$, se tiene $F_{\rho^2}\rho'^2+2F_{\theta\rho}\rho'+F_{\theta^2}=0$, ecuación de segundo grado en ρ' que nos dará dos tangentes imaginarias, reales distintas o confundidas, según sea, $F_{\theta\rho}^2-F_{\rho^2}F_{\theta^2}$ mayor, menor o igual a cero.

Podemos encontrar también singularidades cuando para valores distintos de θ se obtiene el mismo valor de ρ, así sucede cuando

$$F(\rho,\theta) = F(\rho,\theta+2\pi k) \quad \text{ó} \quad F(\rho,\theta) = F(-\rho,\theta+(2k+1)\pi).$$

De estas ecuaciones se dará al entero k todos los valores tales que los incrementos $2k\pi$ y $(2k+1)\pi$ no superen en valor absoluto la amplitud del intervalo en que varía θ para construir la curva completamente, sin hacer ninguna reducción.

EJERCICIOS RESUELTOS DE GRÁFICAS DE CURVAS

1. Construir la curva definida por la ecuación: $x^3y^4 - x^7 + x^2y^4 - y^3 = 0$.

   SOLUCIÓN:

   Dos posibles descomposiciones:

$$x^2x(y-x)(y+x)(y^2+x^2) = y^2y(1-x^2y), \qquad y^4x^2(x+1) = x^7+y^3.$$

   Asíntotas verticales: $x^3+x^2=0 \Rightarrow x^2(x+1)=0 \Rightarrow x^2=0,\ x=-1$.

   Asíntotas oblícuas: $m^4-1=0 \Rightarrow m=1,\ m=-1,\ b=-m^4/4m^3 \Rightarrow b=-1/4,\ b=1/4$. o sea

$$y = x - 1/4, \quad y = -x + 1/4.$$

   Puntos dobles: $f(x_0,x_1,x_2) = -x_1^7 + x_1^3x_2^4 - x_1^2x_2^4x_0 - x_2^3x_0^4$

$$\begin{array}{l} f_{x_1}(x_0,x_1,x_2) = -7x_1^6 + 3x_1^2x_2^4 - 2x_1x_2^4x_0 = 0, \\ f_{x_2}(x_0,x_1,x_2) = 4x_1^3x_2^3 - 4x_1^2x_2^3x_0 - 3x_2^2x_0^4 = 0, \\ f_{x_0}(x_0,x_1,x_2) = -x_1^2x_2^4 - 4x_2^3x_0^3 = 0, \end{array}$$

   ecuaciones que son satisfechas para los puntos: $(1,0,0), (0,0,1)$, origen y punto impropio del eje OY.

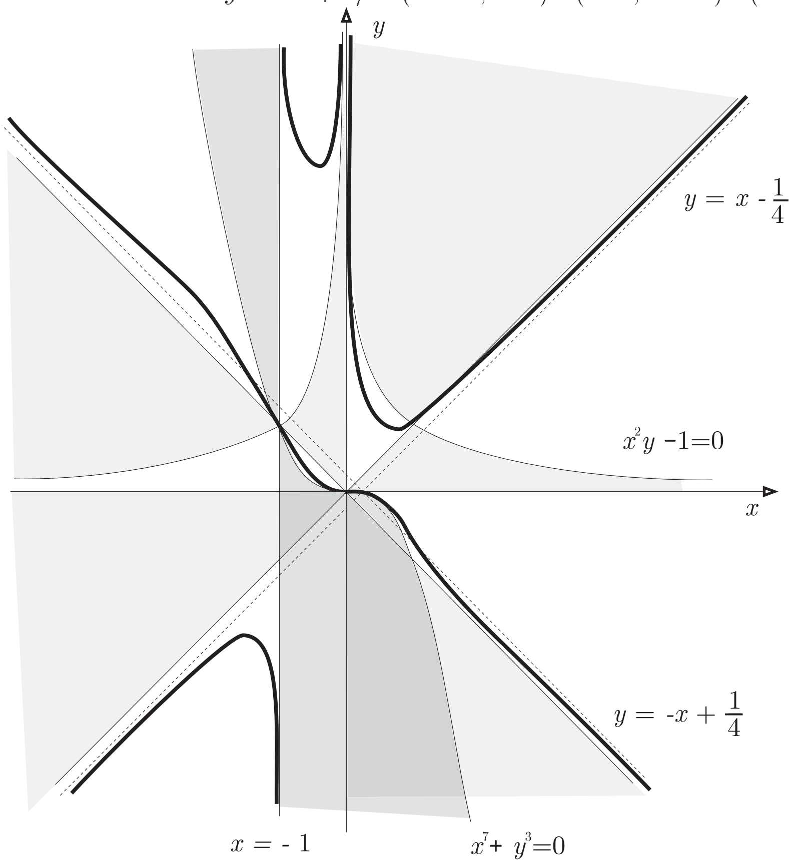
   Información complementaria con Mathematica:

   Tangentes horizontales: $(-0.66, 6.74)$ $(0.91, 0.97)$ $(0,0)$ $(-1.56,-2.22)$

   Cortes con la asíntota $y=-x+1/4$: $(-1.36, 1.61)$ $(0.31,-0.06)$ $(1.09,-0.84)$

   Cortes con la asíntota $y = x - 1/4:$ $(0.22,-0.03)$.

   Cortes de $x^7+y^3=0$ con la asíntota $y=-x+1/4$: $(-1.15, 1.40)$ $(0.32,-0.07)$ $(0.72,-0.48)$



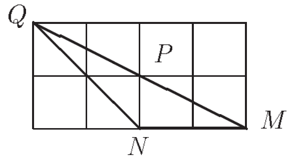
⊡

2. Representar gráficamente $x^4 + x^2 - 6x^2y + y^2 = 0$.

   SOLUCIÓN:

   El origen es un punto aislado: punto doble con tangentes imaginarias. No hay asíntotas y es simétrica respecto al eje OY.

Ramas asintóticas.

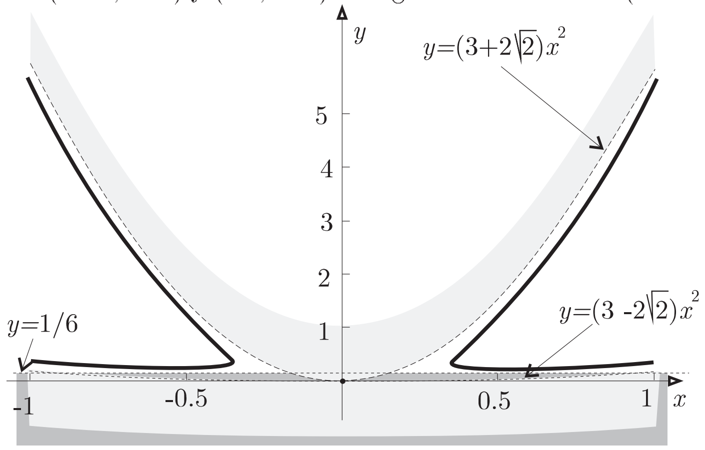


Determinatriz MPQ: $x^4 - 6x^2y + y^2 = 0$, o sea $y - (3+\sqrt{8})x^2 = 0$ y $y - (3-\sqrt{8})x^2 = 0$, son curvas que se aproximan a la dada en el infinito.

La descomposición $(y - (3+\sqrt{8})x^2)(y - (3-\sqrt{8})x^2) = -x^2$, nos permite encontrar regiones donde no existe curva.

Información complementaria:

Tangentes horizontales en $(-0.5, 0.25)$ y $(0.5, 0.25)$. Tangentes verticales en $(-0.35, 0.37)$ y $(0.35, 0.37)$.



$\boxdot$

3. Representar gráficamente $x^4 + x^3y - x^2y^2 - 4x^2y + 2xy^2 + 4y^2 = 0$.

SOLUCIÓN:

Las dos descomposiciones

$$(x^2 - 2y)^2 = -xy(x^2 - xy + 2y), \qquad x^2(x^2 + xy - 4y) = y^2(x - (1+\sqrt{5}))(x - (1-\sqrt{5})),$$

permiten sombrear zonas donde no exite curva. Las hiperbolas que aparecen en estas descomposiones tienen como asíntotas, la primera, $x = 2, y = x + 2$; y la segunda, $x = 4, y = -x - 4$, lo cual nos peremite pintarlas con más exactitud.

Asíntotas de la curva dada:

Verticales: $x = 1 + \sqrt{5} \simeq 3.24$ y $x = 1 - \sqrt{5} \simeq -1.24$

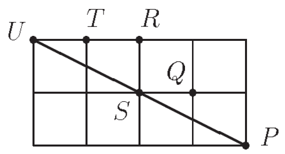
Oblícuas: Pendientes, $m^2 - m - 1 = 0$, $m_1 \simeq 2.6$ y $m_2 \simeq -0.6$.

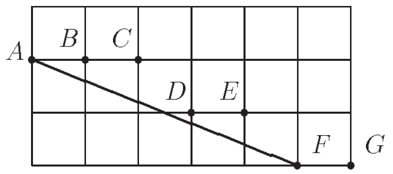
Ordenadas en el origen $b_1 = -(-4m_1 + 2m^2)/(-2m_1 + 1) \simeq -0.55$ y $b_2 \simeq -1.4$.

El origen es un punto doble, con tangente doble $y = 0$, se trata de un punto de retroceso de segunda especie, como se observa por las zonas que no hay curva.

Si acudimos al método de Newton-Cramer, para estudiar la curva en el origen, obtenemos este mismo resultado:

Las curvas que pueden sustituir aproximadamente en un entorno del origen a la curva dada, surgen de las determinatriz PSU que deja a los restantes puntos en el semiplano distinto del origen, según el diagrama de la izquierda siguiente





Determinatriz PSU: $x^4 - 4x^2y + 4y^2 = (x^2 - 2y)^2 = 0$. Una rama de la curva puede sustituirse en un entorno del origen, por $y = \dfrac{x^2}{2}$.

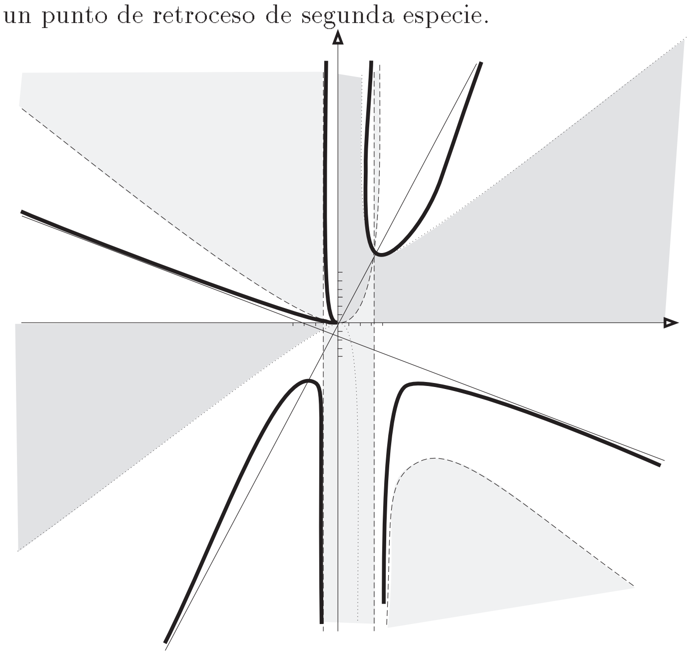
Si queremos mayor aproximación, pogamos $y = x^2/2 + u$, que sustituyendo en la ecuación propuesta, se obtiene:

$$4u^2 + 2u^2x - u^2x^2 + 3ux^3 - ux^4 + x^5 - \frac{x^6}{4} = 0.$$

Del segundo diagrama anterior, deberemos tomar la determinatriz AF, $4u^2 + x^5$, que deja a los restantes puntos en el semiplano distinto del que contiene al origen. Por lo que tenemos como curva que se aproxima a la dada en el origen:

$$y = \frac{x^2}{2} \pm \frac{(-x)^{5/2}}{2},$$

se trata, por tanto, de un punto de retroceso de segunda especie.



Información complementaria:

Cortes con la asíntota $y = -0.6x - 1.4$, no hay. Con $y = 2.6x - 0.55$ en los puntos $(-2.25, -6.4)$ y $(3.5, 8.6)$.

Tangentes horizontales en los puntos $(-2.4, -6.4)$, $(4, 8)$, $(5.5, -6.4)$ y en $(0, 0)$, doble.

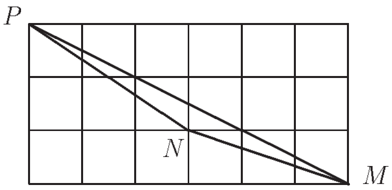
Tangentes verticales en el punto $(3.2, 25.6)$.

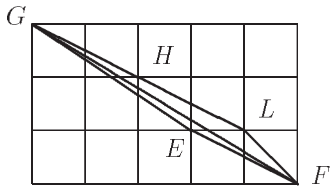
⊡

4. Representar gráficamente la curva $x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Las curvas que pueden sustituir aproximadamente en un entorno del origen a la curva $\mathcal{C}$ dada, surgen de las determinatrices MN y PN que dejan a los restantes puntos en el semiplano distinto del origen, según el diagrama de la izquierda siguiente





Determinatriz MN: $x^6 + 2a^2x^3y = 0$. Una rama de la curva $\mathcal{C}$ se puede sustituir, en un entorno del origen, por $y = -\dfrac{x^3}{2a^2}$.

Determinatriz PN: $2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$, o sea, $y^2 = \dfrac{2a^2x^3}{b^3}$, es otra aproximación de $\mathcal{C}$ en el origen.

Para obtener ramas asintóticas que se aproximen a la curva $\mathcal{C}$, sirven las determinatrices que dejen los puntos que no están en ellas en el mismo semiplano que el origen.

Determinatriz PM: $x^6 - b^3y^3 = 0$, es decir, la curva que tiene el mismo punto impropio que la curva $\mathcal{C}$ o curva asintótica es $y = \dfrac{x^2}{b}$.

Si queremos mayor aproximación, pongamos $y = x^2/b + u$, que sustituyendo en la ecuación propuesta, se obtiene

$$\frac{2a^2x^5}{b} + 2a^2x^3u - b^3u^3 - 3bx^4u - 3b^2x^2u^2 = 0.$$

En el segundo diagrama, siguiendo el método de Newton-Cramer, deberemos tomar las determinatrices LF y GHL, que dejan a los restantes puntos en el mismo semiplano que contiene al origen.

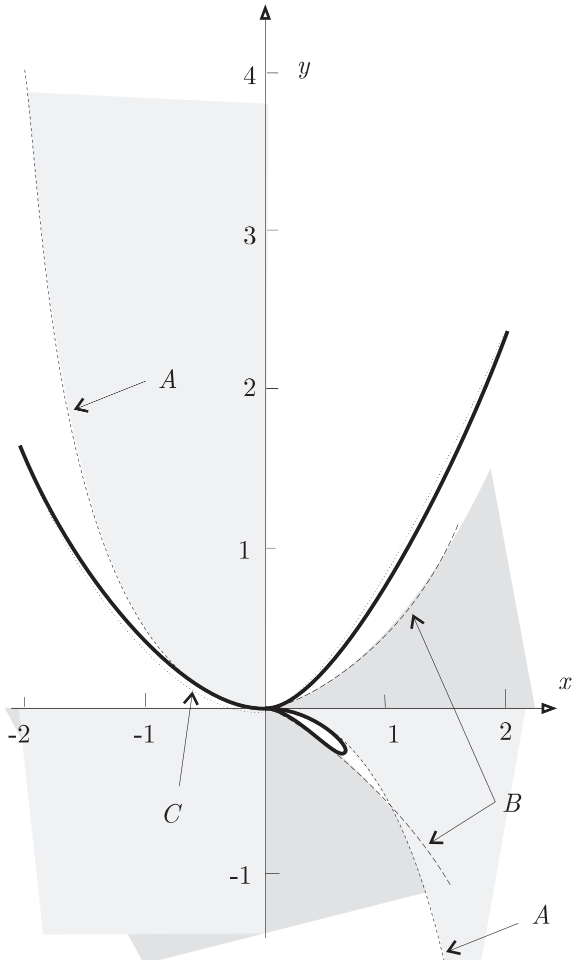
Determinatriz LF: $\dfrac{2a^2x^5}{b} - 3bx^4u = 0$, de donde $u = \dfrac{2a^2x}{3b^2}$. Por lo que la curva asintótica que se aproxima a la curva $\mathcal{C}$ es:

$$y = \frac{x^2}{b} + \frac{2a^2x}{3b^2}.$$

Determinatriz GHL: $-b^3u^3 - 3b^2x^2u^2 - 3bx^4u = 0$, es decir $b^2u^2 + 3bx^2u + 3x^4 = 0$, que da para u valores imaginarios; luego, no nos sirve.

Representemos la curva $\mathcal{C}$, dibujando previamente la ramas obtenidas:

$$\begin{aligned} \text{Curva } A: &\quad y = -\frac{x^3}{2a^2} \\ \text{Curva } B: &\quad y^2 = \frac{2a^2x^3}{b^3} \\ \text{Curva } C: &\quad y = \frac{x^2}{b} + \frac{2a^2x}{3b^2}. \end{aligned}$$



La gráfica ha sido extaida usando el comando de Mathematica:

```
ImplicitPlot[{x^6+2x^3*y-8y^3==0,2y+x^3==0,4y^2-x^3==0,
                  y-x^2/2-x/6==0},{x,-2,2},AspectRatio->2]
```

y tomando los valores particulares de $a = 1$ y $b = 2$:

$$\mathcal{C}: \; x^6 + 2x^3y - 8y^3 = 0, \quad A: \; 2y + x^3 = 0, \quad B: \; 4y^2 - x^3 = 0, \quad C: \; y - x^2/2 - x/6 = 0.$$

Información complementaria: Las tangentes horizontales están en los puntos de coordenadas $(0, 0)$ y $(0.5, -0.12)$. La tangente vertical en $(0.52, -0.11)$. Puntos de intersección de las curvas A y B, $(0, 0)$ y $(1, -0.5)$.

Con las dos descomposiciones $xx^2(x^3 + 2y) = yy^2$ y $2y(x^3 - y^2) = -x^6$, obtenemos las zonas sombreadas donde no hay curva.

$\boxdot$

5. Representar gráficamente la curva $y^2(x^2 + 1) - 6x^2y + x^4 = 0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Si ponemos $f(x, y, t) = y^2(x^2 + t^2) - 6x^2yt + x^4 = 0$, los puntos singulares se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$f_x(x, y, t) = 2xy^2 - 12xyt + 4x^3 = 0, \quad f_y(x, y, t) = 2(x^2 + t^2) - 6xt = 0, \quad f_t(x, y, t) = 2ty^2 - 6x^2y = 0.$$

Obteniéndose como puntos dobles, el origen de coordenadas $(0, 0)$ y el impropio de del eje OY. En éste las tangentes son imaginarias, luego se trata de un punto aislado; y en el origen, existe una tangene doble $y = 0$.

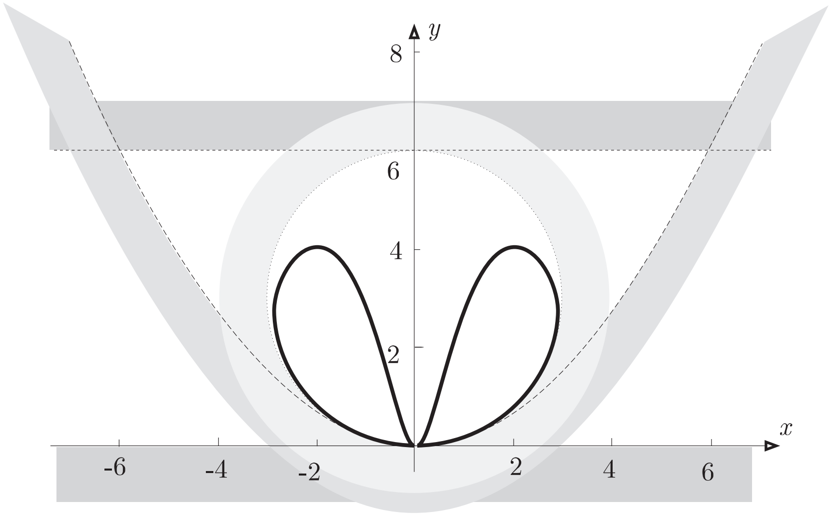
La curva no tiene ningun tipo de asíntotas y es simétrica respecto al eje OY.

Las tres descomposiciones en factores:

$$y^2(x^2 + 1) = x^2(6y - x^2), \qquad x^2y(y - 6) = -y^2 - x^4, \qquad x^2(x^2 + y^2 - 6y) = -y^2,$$

permiten sombrear donde no existe curva.

Tangentes horizontales en $(0, 0), (2, 4)$ y $(-2, 4)$. Tangentes verticales en $(-2.8, 2.6)$ y $(2.8, 2.6)$.



$\boxdot$

6. Representar gráficamente la curva $x^4 + y^4 - 7x^2 - 3y^2 + 14 = 0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

En las tres descomposiciones

$$x^2(x^2 - 7) = -(y^4 - 3y^2 + 14), \qquad y^2(y^2 - 3) = -(x^4 - 7x^2 + 14), \qquad x^4 + y^4 = 3y^2 + 7x^2 - 14,$$

los segundos miembros de las dos primeras no tienen soluciones reales, lo que nos permite acotar la curva al rectángulo comprendido entre las rectas $x = \pm\sqrt{7}$ y $y = \pm\sqrt{3}$, y en la tercera el segundo miembro representa una elipse, dentro de la cual no existe curva.

La curva es simétrica respecto respecto a los ejes coordenados y no corta a estos.

Cortes con rectas $y = b$, paralelas al eje OX (tangentes horizontales):

$$x^4 - 7x^2 + b^4 - 3b^2 + 14 = 0, \qquad x^2 = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{49 - 4(b^4 - 3b^2 + 14)}).$$

Los puntos de tangencia horizontal se obtienen para los valores de b que dan una única solución para x^2: $4b^4 - 12b^2 + 7 = 0$. Estos son

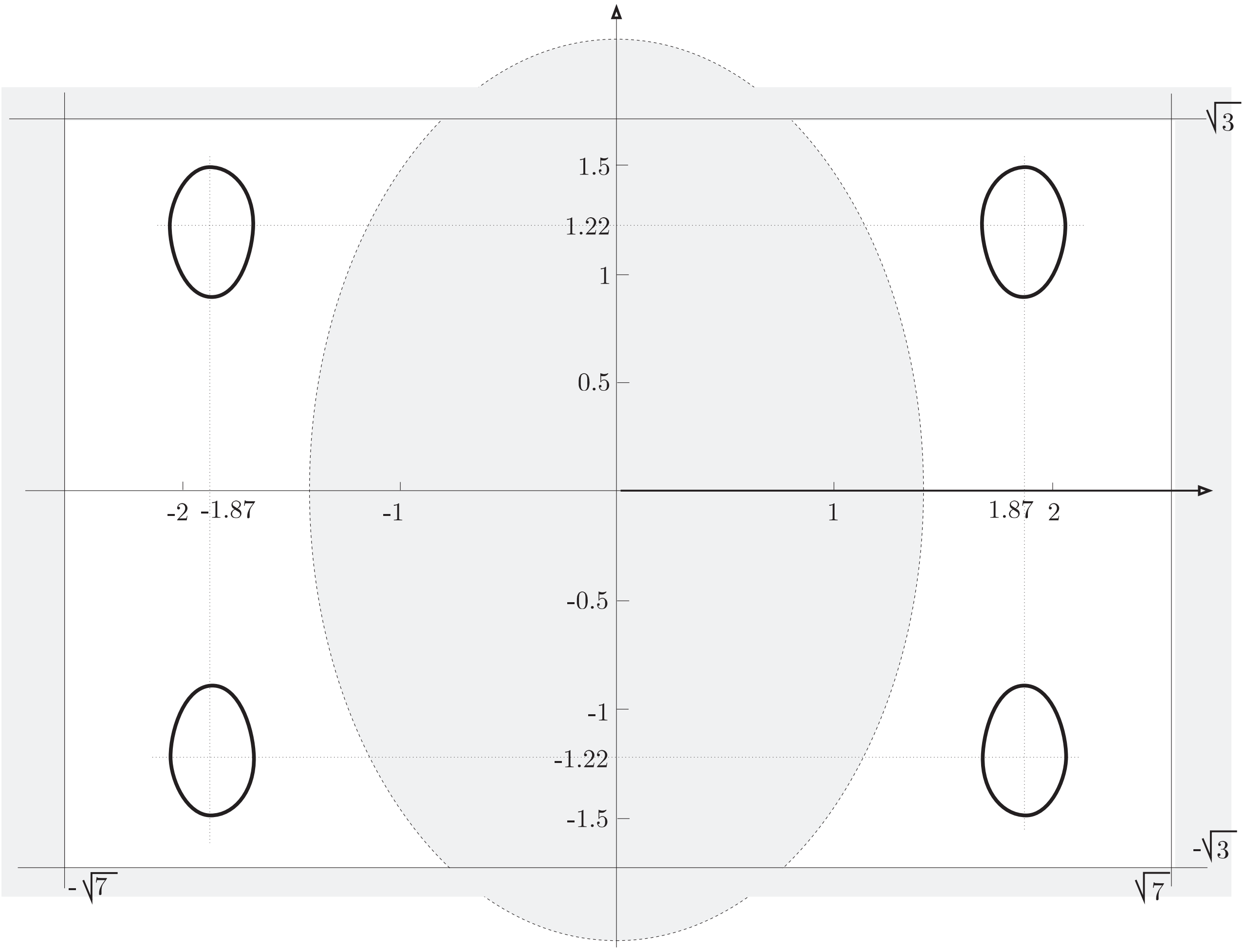
$$\text{Como} \quad b^2 = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{4}, \qquad \left(\pm\frac{14}{2}, \pm\sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{8}}{4}}\right) \simeq (\pm 1.87, \pm 1.48), (\pm 1.87, \pm 0.89)$$

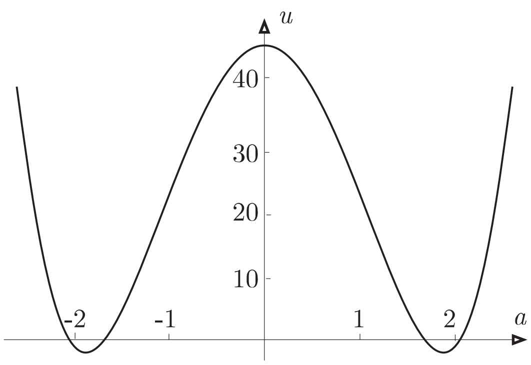
Cortes con rectas $x = a$, paralelas al eje OY (tangentes verticales):

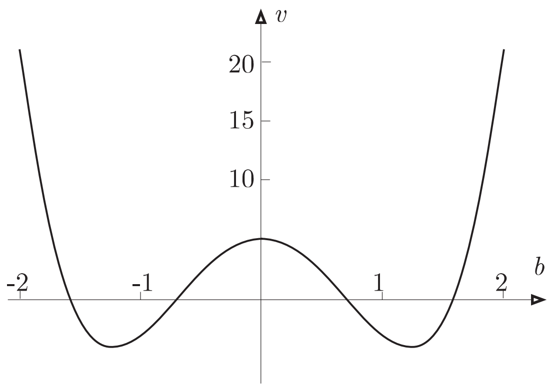
$$y^4 - 3y^2 + a^4 - 7a^2 + 14 = 0, \qquad y^2 = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9 - 4(a^4 - 7a^2 + 14)}).$$

Los puntos de tangencia vertical se obtienen para los valores de a que dan una única solución para y^2: $4a^4 - 28a^2 + 47 = 0$. Estos son

$$\text{Como} \quad a^2 = \frac{14 \pm \sqrt{8}}{4}, \qquad \left(\pm\sqrt{\frac{14 \pm \sqrt{8}}{4}}, \pm\frac{6}{2}\right) \simeq (\pm 1.67, \pm 1.22), (\pm 2.05, \pm 1.22)$$







$\boxdot$

7. Desde el punto $A(-a,0)$, donde $a>0$, se traza una recta variable que corta al eje OY en B, a ambos lados del punto B y sobre la recta AB se consideran dos puntos M y N, tales que los segmentos MB y NB tienen la misma longitud, igual a r, al girar la recta variable los puntos M y N describen una curva llamada concoide. (Ver Ejercicio 15)allar su ecuación, primero, en coordenadas polares tomando el punto A por polo y dirigiendo el eje polar en la dirección positiva del eje OX; y, después, en coordenadas cartesianas respecto al sistema dado.

SOLUCIÓN:

Solución:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm r$$

$$x^2y^2 + (x+a)^2(x^2-r^2) = 0$$

Representación gráfica en forma implícita

```
f[a_,r_][t_,x_,y_]:=x^2y^2+(x+a*t)^2(x^2-r^2*t^2)
```

Simétrica respecto al eje OX: `f[a,r][1,-x,y]==f[a,r][1,x,y]`

Asíntota vertical doble: $x=0$. La curva no corta a la asíntote $x=0$, $f[a,r][1,0,y]=-a^2r^2$.

Puntos singulares en $(0,0,1)$, que ya se sabe con la asíntota vertical doble, y $(1,-a,0)$:

```
Solve[D[f[a,r][t,x,y],t]==D[f[a,r][t,x,y],x]==D[f[a,r][t,x,y],y]==0,
      {t,x,y}]
```

```
                          2             2                          2   2      2
D[f[a,r][t,x,y],t]=-2 r  t (a t + x)  + 2 a (a t + x) (-(r  t ) + x )=0

                                    2                     2   2      2      2
D[f[a,r][t,x,y],x]=2 x (a t + x)  + 2 (a t + x) (-(r  t ) + x )+2xy =0

                         2
D[f[a,r][t,x,y],x]=2 x y =0
```

Haciendo un traslación de ejes al punto $(-a,0)$, queda

$$f[a,r][1,x-a,y] = a^2x^2 - r^2x^2 - 2ax^3 + x^4 + a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = 0$$

Y las tangentes en este nuevo origen resultan de $(a^2-r^2)x^2 + a^2y^2 = 0$, que será una tangente doble $y=0$ si $a=r$; dos tangentes reales, si $a>r$; y dos tangenes imaginarias (punto aislado) si $a<r$.

Estudiamos la representación de la curva en los tres casos:

(A) $a=r=1$.

Regiones de existencia: $(1+x)^2(x^2-1) = -x^2y^2$.

La única tangente horizontal es en $(-1,0)$, doble (es un punto de retroceso de primera especie). Hay una tangente vertical en $(1,0)$.

(B) $r=2, a=3$.

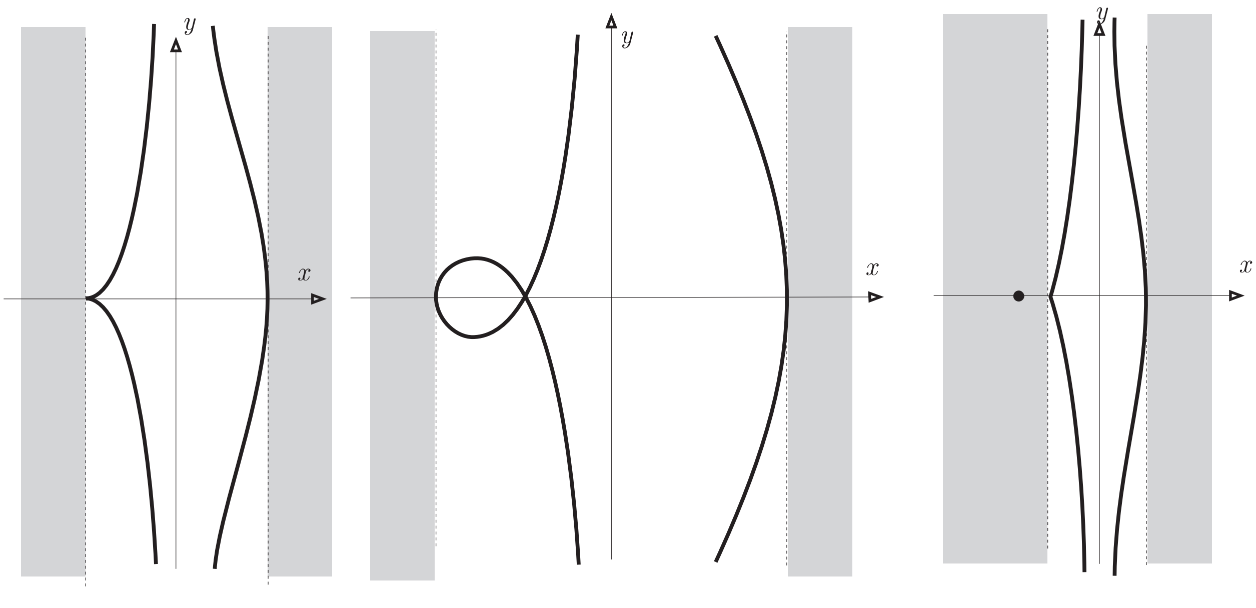
Regiones de existencia: $(2+x)^2(x^2-9) = -x^2y^2$.

Tangentes horizontales en $(-2.62074, \pm 0.345821)$. Y tangentes verticales en $(3,0)$ y $(-3,0)$. Pendientes de las tangentes en el punto doble: $m=\pm\sqrt{5}/2$.

(C) $a=3, r=2$.

Regiones de existencia: $(3+x)^2(x^2-4) = -x^2y^2$.

El punto $(-3,0)$ es aislado. No hay tangentes horizontales. Tangentes verticales en $(-2,0)$ y $(2,0)$.

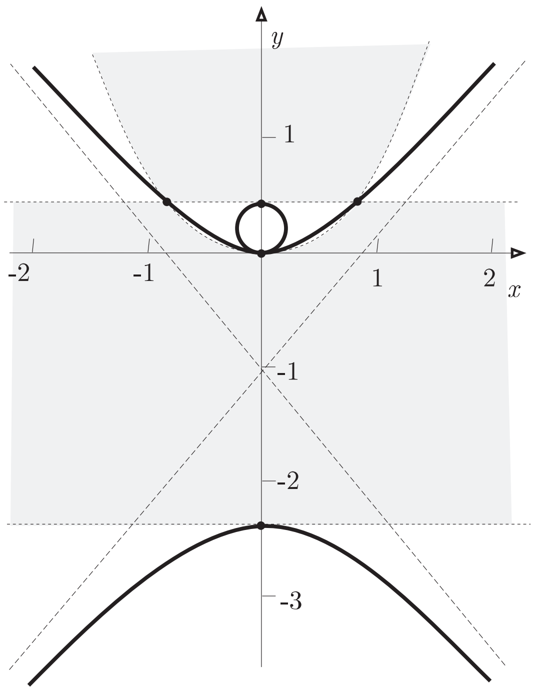


(A) (B) (C)

□

8. Representar gráficamente la curva $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 - y^4 = 0$.

   SOLUCIÓN:



□

9. Representar gráficamente la curva $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$.

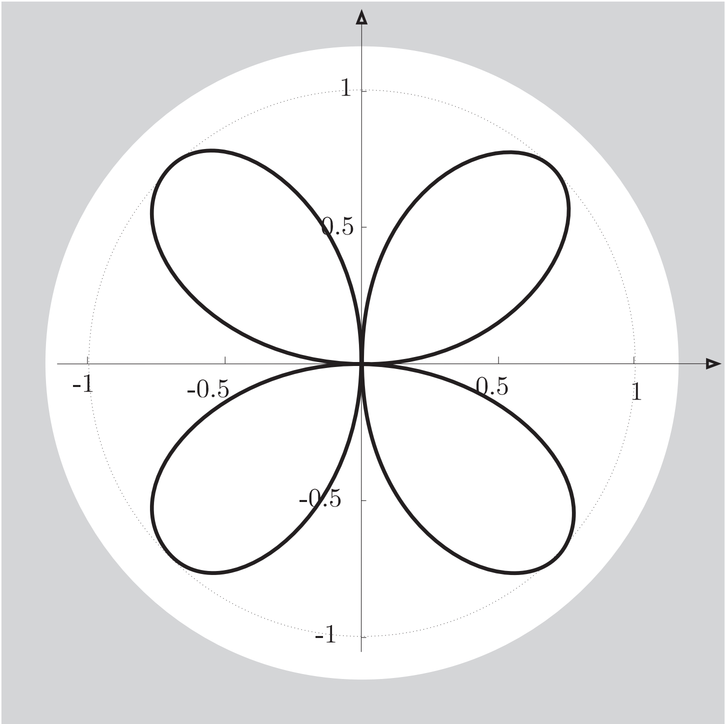
   SOLUCIÓN:

   $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 4x^2y^2 = 3x^2y^2(x^2 + y^2 - 4/3) + x^6 + y^6 = 0$, por lo que la la circunferencia de centro el origen y radio $2\sqrt{3}/3$ delimita regiones.

   Es fácil pasar a coordenadas polares y nos da como ecuación $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$, con lo que la curva está dentro de la circunferencia de centro el origen y radio 1.

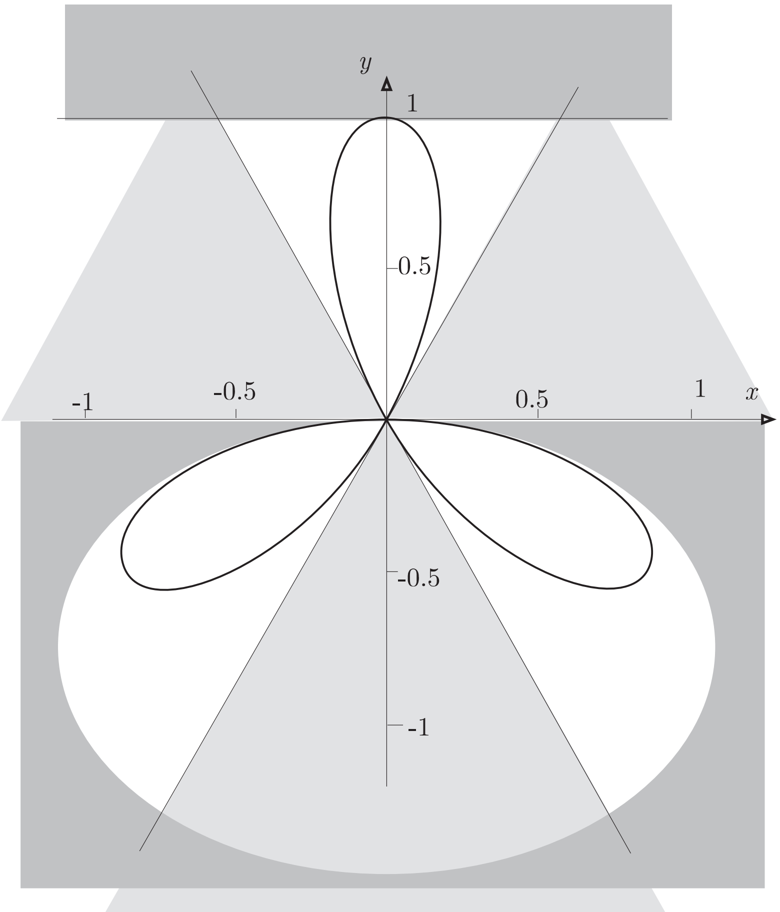
   La curva es simétrica respecto alos ejes coordenados, y también respecto a las dos diagonales del primer y segundo cuadrante.

   Corta a los ejes sólo en el origen. En este punto presenta dos tangentes dobles, que coinciden con los ejes. Corta a las diagonales $y = \pm x$ en los puntos $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$.



$\boxdot$

10. Representar gráficamente la curva $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$.
    SOLUCIÓN:



$\boxdot$

11. Representar gráficamente la curva $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$.
    SOLUCIÓN:

Descomposiciones para buscar regiones de existencia:

$$y^2(x-1) = x^2(x^2+y^2-2y), \qquad xy(xy-2x-y) = -(x^4+y^2).$$

En la primera descomposición la recta $x=1$ y la circunferencia $x^2+y^2-2y=0$, delimitan regiones. Y en la segunda las regiones quedan delimitadas por los ejes coordenados y la hipérbola $xy-2x-y=0$ de asíntotas $x=1$ e $y=2$.

Puntos singulares de $f(t,x,y) = x^4 - 2tx^2y + t^2y^2 - txy^2 + x^2y^2 = 0$:

$$\begin{aligned} f_t(t,x,y) &= -2x^2y + 2ty^2 - xy^2 = 0, \\ f_x(t,x,y) &= 4x^3 - 4txy - ty^2 + 2xy^2 = 0, \\ f_y(t,x,y) &= -2tx^2 + 2t^2y - 2txy + 2x^2y = 0. \end{aligned}$$

Sistema que tiene como solución, el origen $(1,0,0)$ y el punto impropio del eje OY $(0,0,1)$.

Las tangentes en el origen son $y^2=0$. Como la curva no tiene asíntotas el punto impropio del eje OY es aislado.

Tangentes horizontales (ademas de en el origen) en $(0.96, 1.16)$:

$$x^4 - 2x^2y + y^2 - xy^2 + x^2y^2 = 0, \qquad 4x^3 - 4xy - y^2 + 2xy^2 = 0.$$

Tangentes verticales en $(1,1)$:

$$x^4 - 2x^2y + y^2 - xy^2 + x^2y^2 = 0, \qquad -2x^2 + 2y - 2xy + 2x^2y = 0.$$

Estudio de la curva en el origen por el método de Newton-Cramer:

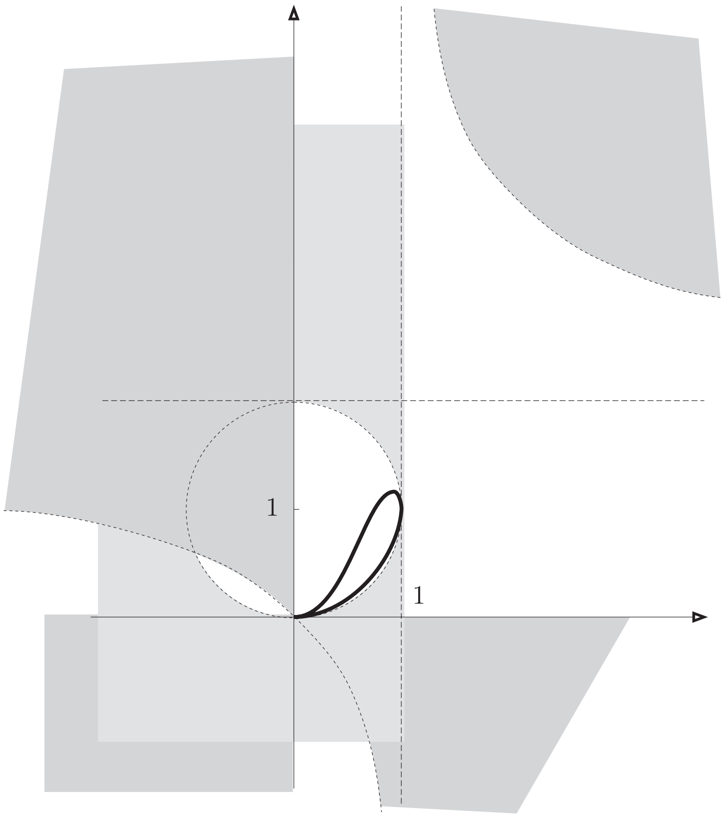
La determinatriz en el origen es $x^4 - 3x^2y + y^2 = (y-x^2)^2 = 0$. Se aproxima a la parábola $y=x^2$. Una mayor aproximación se logra sustituyendo en la ecuación de la curva $y = x^2+u$, obteniéndose

$$u^2 - u^2x + u^2x^2 - 2ux^3 + 2ux^4 - x^5 + x^6 = 0.$$

La determinatriz en el origen ahora es $-x^5+u^2$, por lo que queda que la curva dada se aproxima en el origen a:

$$y = x^2 \pm x^{5/2}.$$

El origen es pues un punto de retroceso de segunda especie.



$\square$

12. Representar gráficamente la curva $(x^2+y^2)^3 = 4xy(x+y)(x-y)$. (Ver Ejercicio 59)

SOLUCIÓN:

Regiones delimitadas por las rectas $x=0, y=0, y=x, y=-x$

Asíntotas no tiene. Simétrica respecto al origen. Tangentes en el origen $xy^3 - x^3y = xy(x-y)(x+y) = 0$, las mismas rectas que delimitan regiones.

Pasando a coordenadas polares, mediante el cambio, $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho \operatorname{sen}\theta$, se obtiene la ecuación $\rho^2 = \operatorname{sen} 4\theta$.

Información complementaria usando MATHEMATICA:

```
f[x_,y_]:=(x^2+y^2)^3-4x*y(x+y)(x-y)
```

Tangentes horizontales:

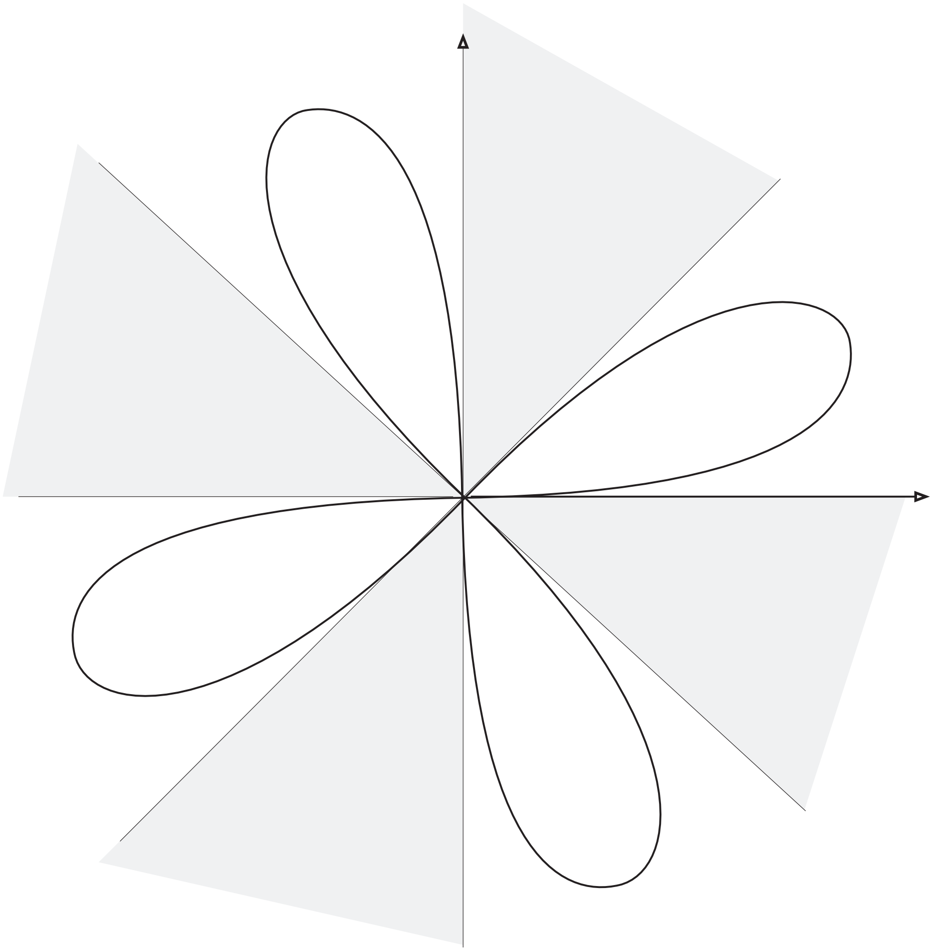
```
Solve[{f[x,y]==0,D[f[x,y],x]==0}]
```

en los puntos $(-0.34, 0.93)$, $(0.75, 0.47)$ y sus simétricos respecto al origen.

Tangentes verticales:

```
Solve[{f[x,y]==0,D[f[x,y],y]==0}]
```

en los puntos $(-0.47, 0.75)$, $(0.93, 0.34)$ y sus simétricos respecto al origen.



□

13. Representar gráficamente la curva $(x^2+y^2)(y^2+x(x+b)) = 4axy^2$.

SOLUCIÓN:

Las dos composiciones siguientes permiten sombrear la parte del plano donde no hay curva:

$$(x^2+y^2)(y^2+x(x+b)) = 4axy^2, \qquad x(\sqrt{b}x+\sqrt{4a-b}y)(\sqrt{b}x-\sqrt{4a-b}y) = -(x^2+y^2)^2.$$

Asíntotas no hay.

La curva es simétrica respecto al eje OX.

Tangentes en el origen: $x(\sqrt{b}x+\sqrt{4a-b}y)(\sqrt{b}x-\sqrt{4a-b}y) = 0$ (punto triple).

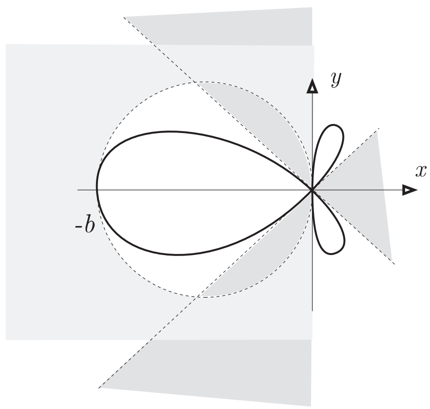
Cortes con los ejes: $(0,0), (-b,0)$.

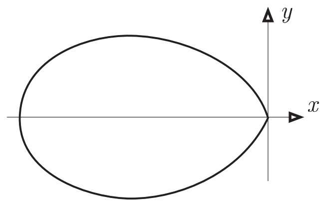
En el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$, las tangente horizontales están en los puntos $(0.207, \pm 0.5)$ y $(-1, 207, \pm 0.5)$. Y las tangentes verticales en $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$ y $(-2, 0)$. Cálculos hechos usando MATHEMATICA:

```
f[a_,b_][x_,y_]:=(x^2+y^2)(y^2+x(x+b))-4axy^2
Solve[{f[1,2][x,y]==0,D[f[1,2][x,y],x]==0}]
Solve[{f[1,2][x,y]==0,D[f[1,2][x,y],y]==0}]
```

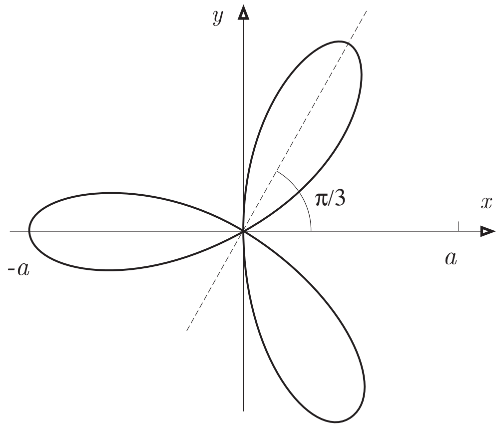
En el caso particular en que $b = 4a$, no hay curva para las $'x'$ positivas, como se observa en la sugunda descomposición hecha más arriba. Y el comportaminento de la curva en el origen se aproxima al de la curva $bx^3 + y^4 = 0$ con tangente vertical.

En el caso en que $b = 0$, en la misma segunda descomposición se observa que no hay curva para las $'x'$ negativas. Las tangentes en el origen son $x = 0$ e $y = 0$, ésta doble, corresponde a un punto de retroceso de primera especie, dada la simetría.

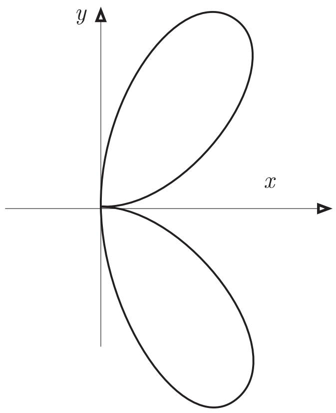




b=4a



a=b



b=0

Cuando $a = b$ la curva además es simétrica respecto a las rectas $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$. Pues, aplicando las fórmulas siguientes de la simetría respecto a una recta, que dista del origen p y la perpendicular a ella forma con el eje OX un ángulo α:

$$X = -x\cos 2\alpha - y \operatorname{sen} 2\alpha + 2p\cos\alpha$$
$$Y = -x \operatorname{sen} 2\alpha + y\cos 2\alpha + 2p \operatorname{sen}\alpha,$$

como para la recta $y = \sqrt{3}x$, $p = 0$ y $\alpha = \pi/3$, resulta

$$X = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2}, \qquad Y = \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2}.$$

Haciendo los cálculos, por ejemplo con MATHEMATICA, se obtiene que `f[a,a][x,y]=f[a,a][X,Y]`.

En coordenadas polares, las ecuaciones son:

$$\rho = -b\cos\theta + 4acos\theta \operatorname{sen}^2\theta, \quad \text{si } a = b \quad \rho = a\cos\theta(4\operatorname{sen}^2\theta - 1).$$

$\boxdot$

14. Representar gráficamente la curva $y^4 - x^4 - 16y^2/25 + x^2 = 0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Regiones delimitadas por los factores de las dos descomposiciones:

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = (\frac{4}{5}y + x)(\frac{4}{5}y - x), \qquad y^2(y^2 - \frac{16}{25}) = x^2(x^2 - 1).$$

Pasa, por tanto, por los cuatro puntos $(\pm 1, \pm 4/5)$.

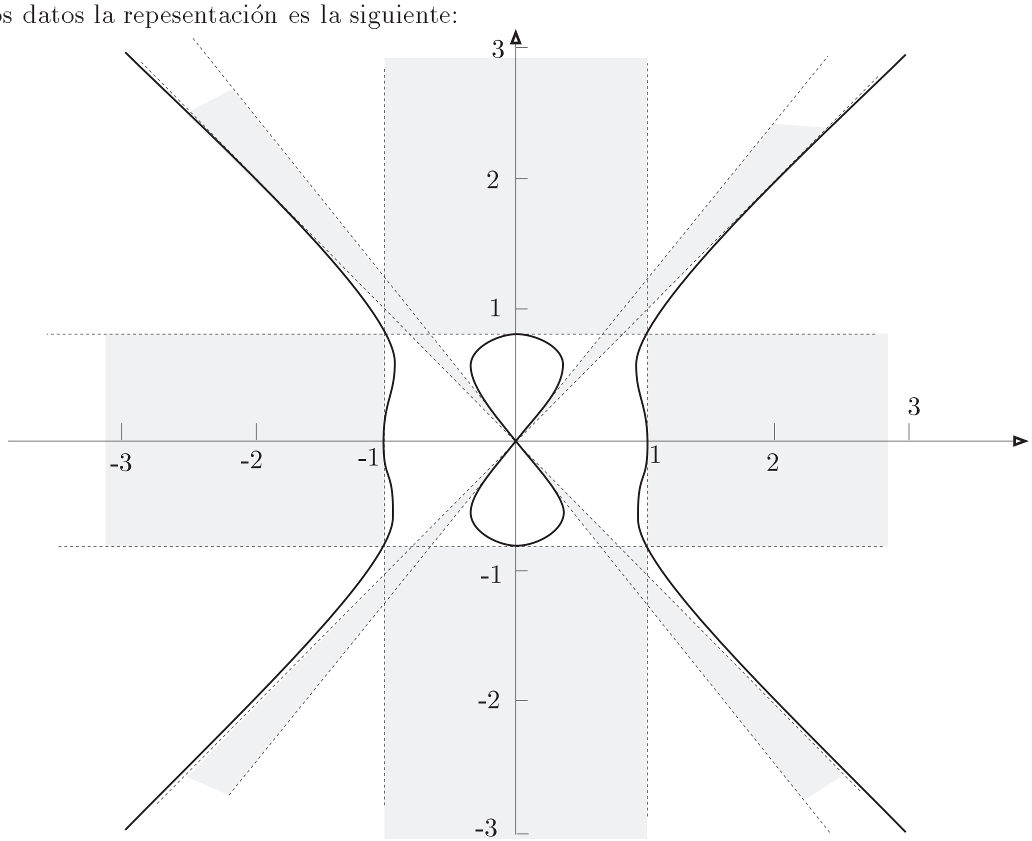
Simétrica respecto a los ejes coordenados (respecto al origen).

Tangentes en el origen $-16y^2 + 25x^2 = (4y + 5x)(-4y + 5x) = 0$ (punto doble).

Cortes con los ejes $(0,0), (1,0), (-1,0), (0,4/5), (0,-4/5)$.

Las pendientes de las asíntotas vienen dadas por $m^4 - 1 = 0$ y las ordenadas en el origen para $m = \pm 1$ son ambas $b = 0$.

Con estos datos la repesentación es la siguiente:



□

15. Desde el origen de coordenadas se traza una recta ℓ que corta a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ en el punto B; en dicha recta, a ambos lados del punto B, se toman dos puntos M y N, tales que los segmentos BM y BN tengan la misma longitud, igual a b. Hallar el lugar geométrico de los puntos M y N al girar la recta ℓ alrededor del origen. (Ver Ejercicio 7)caracol de Pascal

<u>SOLUCIÓN</u>:

Tomemos la parametrización de la circunferencia dada como

$$x = a + a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t,$$

y la ecuación de la recta ℓ: $(a + a\cos t)y = a \operatorname{sen} t x$.

La ecuación de la circunferencia con centro en la circunferencia dada y radio b corta la la recta ℓ en los puntos M y N. Para determinar el lugar geométrico de estos puntos debemos eliminar el parámetro t, o lo que es lo mismo si llamamos $u = \cos t$ y $v = \operatorname{sen} t$, deberemos eliminar u y v de las tres ecuaciones:

$$(c - a(1+u))^2 + (y - av)^2 - b^2 = 0, \quad a(1+u)y = avx, \quad u^2 + v^2 = 1.$$

Utilizando el commando `Eliminate` de MATHEMATICA

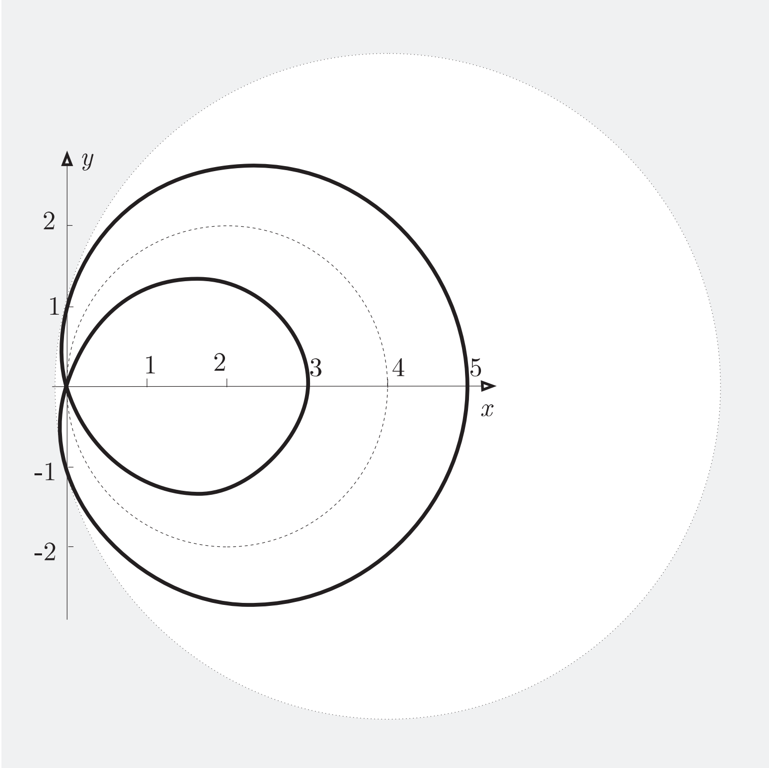
```
Eliminate[{(x-a(1+u))^2+(y-av)^2==b^2,a(1+u)y==a*v*x,u^2+v^2==1},{u,v}]
```

resulta la ecuación implícita del lugar geométrico pedido

$$4a^2x^2 + ax(-4x^2 - 4y^2) - b^2x^2 + x^4 - b^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4 = 0 \quad \text{ó} \quad (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Para su representación gráfica, observemos que las expresión de la derecha permite sombrear zonas del plano donde no hay curva: fuera de la circunferencia cuya ecuación vienen dada por el primer miembro igualado a cero.

La curva es simétria respecto al eje OX. Los cortes con los ejes están en $(0, 0), (2a \pm b, 0), (0, \pm b)$. Las tangentes en el origen resultan de $4a^2x^2 - b^2x^2 + y^2 = 0$, o sea, $y = \pm\sqrt{4a^2 - b^2}x$ (punto doble).



En coordenadas polares la obtención de la ecuación del lugar geométrico es más sencilla pues, teniendo en cuenta que $\rho = 2a\cos\theta$ es la ecuación de la circunferencia dada, resulta

$$\rho = 2a\cos\theta \pm b.$$

Para su representación en coordenadas polares, observemos que $\rho(\theta)$ es de periodo 2π y es simétrica respecto al eje polar: $\rho(\theta) = 2a\cos\theta \pm b = -(2a\cos\theta \pm b) = -\rho(-\theta)$.

Se verifica además que los puntos de coordenadas $(\theta, 2a\cos\theta + b)$ y $(\theta + \pi, 2a\cos\theta - b)$ coinciden, por lo que basta estudiar la curva $\rho = 2a\cos\theta + b$ en el intervalo $[0, \pi]$ y luego hacer una simetría respecto al eje polar.

Puntos de tangencia horizontal $\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \rho = f(\theta)$:

$$2a\cos^2\theta - 2a\operatorname{sen}^2\theta + b\cos\theta = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones $2au^2 - 2av^2 + bu = 0, \quad u^2 + v^2 = 1$, para $a = 2, b = 1$, resulta $u = -0.647, v = \pm 0.762$ y $u = 0.772, v = \pm 0.635$. por lo que tenemos tangentes horizontales para los ángulos, entre $=$ y π, $\theta = 0.72\pi$ y $\theta = 0.21\pi$.

Puntos de tangencia vertical $-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta = 0, \quad \rho = f(\theta)$:

$$4a\operatorname{sen}\theta\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones $4auv + bv = 0, \quad u^2 + v^2 = 1$, para $a = 2, b = 1$, resulta $u = -0.125, v = \pm 0.992$, además de los cortes con el eje de simetría $(0, 5)$ y $(\pi, -3)$.

Los corte de la curva con la perpendicular al eje polar por el polo son $(\pi/2, b)$ y $(3\pi/2, b)$.

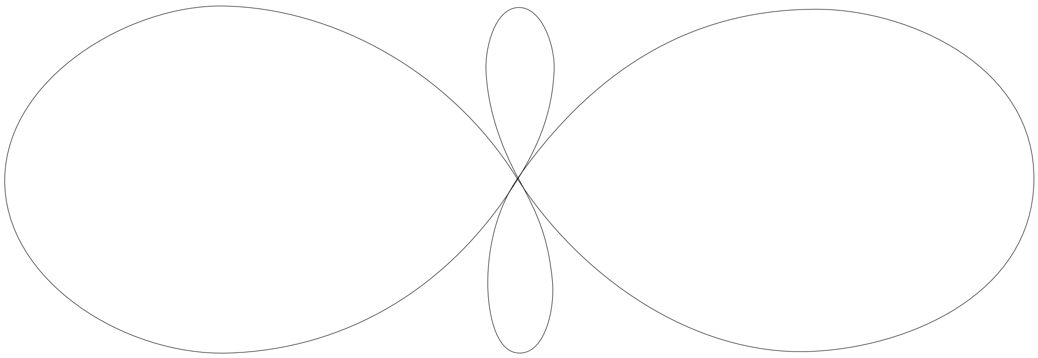
Tomando el polo de las coordenadas polares en el origen de coordenadas cartesianas rectangulares y el eje polar en la dirección positiva del eje de las $'x'$, tenemos la misma gráfica que la obtenida para la expresión implícita.

$\boxdot$

16. Sean una circunferencia de centro O y radio r y una recta pasando por O, la trisectriz de Ceva es el lugar geométrico de los puntos M tales que $OP = PQ = QM$ con P sobre la circunferencia, Q sobre la recta y tales que O, P y M están alineados. El ángulo $\widehat{xQM}$ es el triple del ángulo $\widehat{xOM}$, de hay el nombre de trisectriz.
<u>SOLUCIÓN</u>:

$$\rho = a(1 + 2\cos 2\theta) = a\frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(3x^2 - y^2)^2$$



□

17. Se dan dos puntos O y S, la trisectriz de Maclaurin de polo S ($S(3a, 0)$) y punto doble O es el lugar geométrico de los puntos M tales que $OP = PA = AM$ donde A está definido por $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$ y tal que O, P y M están alineados. El ángulo $\widehat{SAM}$ es el triple del ángulo $\widehat{SOM}$ de donde el nombre de trisectriz.
<u>SOLUCIÓN</u>:

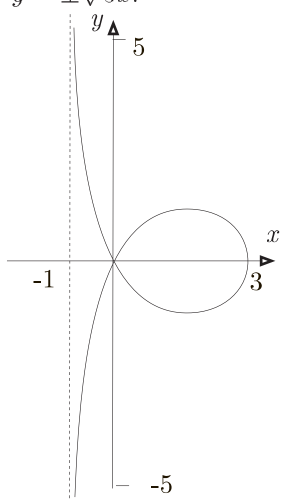
$$\rho = 2a\frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = a\left(4\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right).$$

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2) \qquad \text{ó} \qquad y^2(a + x) = x^2(3a - x).$$

$$x = a\frac{3 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = a\frac{t(3 - t^2)}{1 + t^2}.$$

Gráfica del lugar según su ecuación implícita:

Tangentes en el origen $-3ax^2 + ay^2 = 0$, $y = \pm\sqrt{3}x$.



□

18. Representar gráficamente la curva $y^3x + y^2x^2 - y^3 - 2x^2 = 0$.
<u>SOLUCIÓN</u>:

Asíntotas vericales y horizontales: $x = 1$, $y = \pm\sqrt{2}$. Asíntotas oblicuas: $y = -x - 1$.

Tangente en el origen: doble $x = 0$.

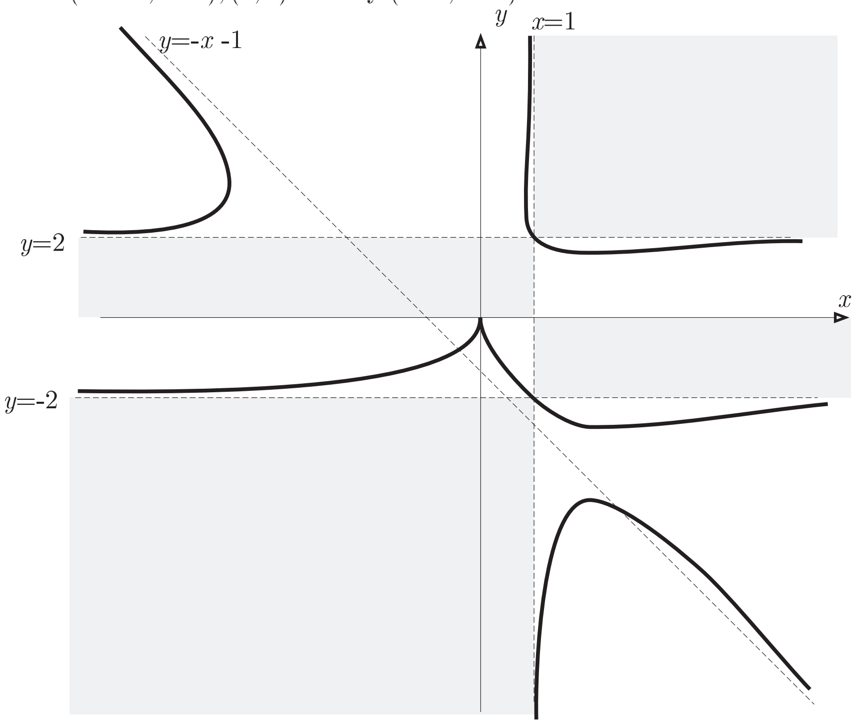
Regiones de existencia: $y^2y(x-1) = -x^2(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})$.

Información complementaria con MATHAMATICA:

Cortes con la asíntota $y = -x - 1$: $(-0.41, -0.58)$ y $(2.41, -3.41)$.

Tangentes horizontales: $(2, 1.23), (2, -2)$ y $(2, -3.2)$.

Tangentes verticales: $(-4.99, 2.45), (0, 0)$ doble y $(0.81, 2.44)$.

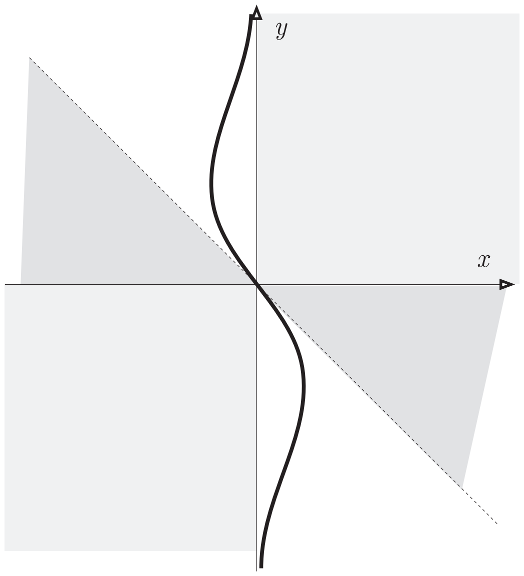


⊡

19. Representar gráficamente la curva $xy^4 + y + x = 0$.

SOLUCIÓN:

Simétrica respecto al origen. Asíntotas: Vertical $x = 0$. Tangente en el origen: $y = -x$. Tangentes verticales en $(\pm 0.56, \mp 0.76)$. Las regiones de existencia correspondientes a las descomposiones $xy^4 = -(y+x)$ y $x(y^4+1) = y$, son las sombreadas.



El punto impropio del eje OX es doble aislado, pues si se homogeniza la ecuación de la curva, se anulan las tres primeras derivadas:

$$f(t,x,y) = xy^4 + yt^4 + xt^4 = 0,\ f_t(t,x,y) = 4yt^3 + 4xt^3 = 0,\ f_x(t,x,y) = y^4 + t^4 = 0,\ f_y(t,x,y) = 4xy^3 + t^4 = 0.$$

Otra forma de ver que dicho punto es aislado, consiste en hacer el cambio de coordenadas $t->x, x->t, y->y$. Con lo que queda la ecuación de la curva $y^4 + x^4 + yx^4 = 0$, cuyas tangentes en el origen vienen dadas por $x^4 + y^4 = 0$, que da tangentes imaginarias.

$\boxdot$

---

20. Representar gráficamente la curva $y^2 - 4x^2y + 3x^4 + x^8 = 0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Las dos descomposiciones siguientes nos permiten marcar zonas donde no existe curva:

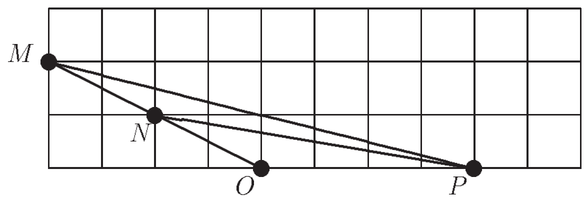
$$y(y - 4x^2) = -x^2(3 + x^4), \qquad y^2 + x^8 = x^2(4y - 3x^2).$$

La curva es simétrica respecto al eje OY.

El origen es un punto doble con tangente $y = 0$.

El método de Newton-Cramer,

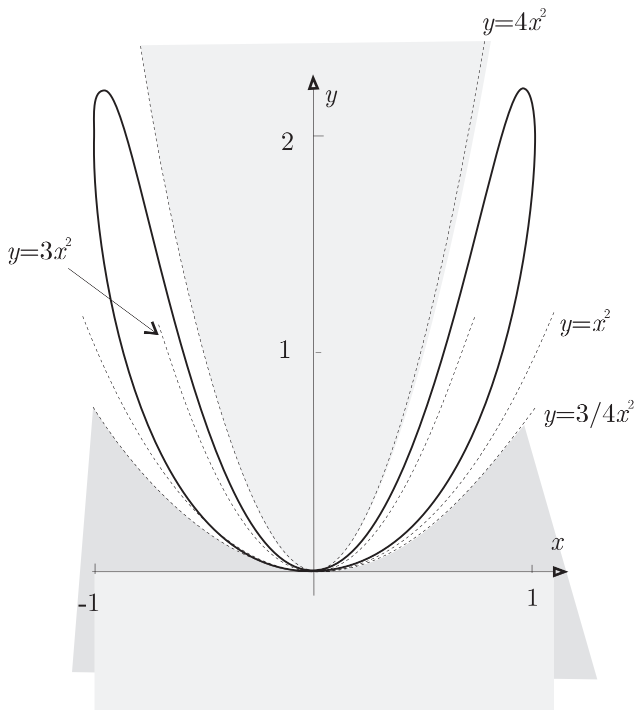
$$\underbrace{y^2}_{M} - \underbrace{4x^2y}_{N} + \underbrace{3x^4}_{O} + \underbrace{x^4}_{P} = 0$$



nos da la determinatriz MNO en el origen, que nos proporciona una aproximación de las dos ramas de la curva en el origen:

$$y^2 - 4x^2y + 3x^4 = 0 \qquad \text{o sea} \qquad y = 3x^2 \text{ e } \ y = x^2.$$

Información complementaria: Tangentes horizontales en $(0.96, 2.20)$, $(-0.96, 2, 20)$ y $(0, 0)$. Tangentes verticales en $(1, 2)$ y $(-1, 2)$.



$\boxdot$

---

21. Representar gráficamente la curva $y^2 - x(x-1)(x-a) = 0$.

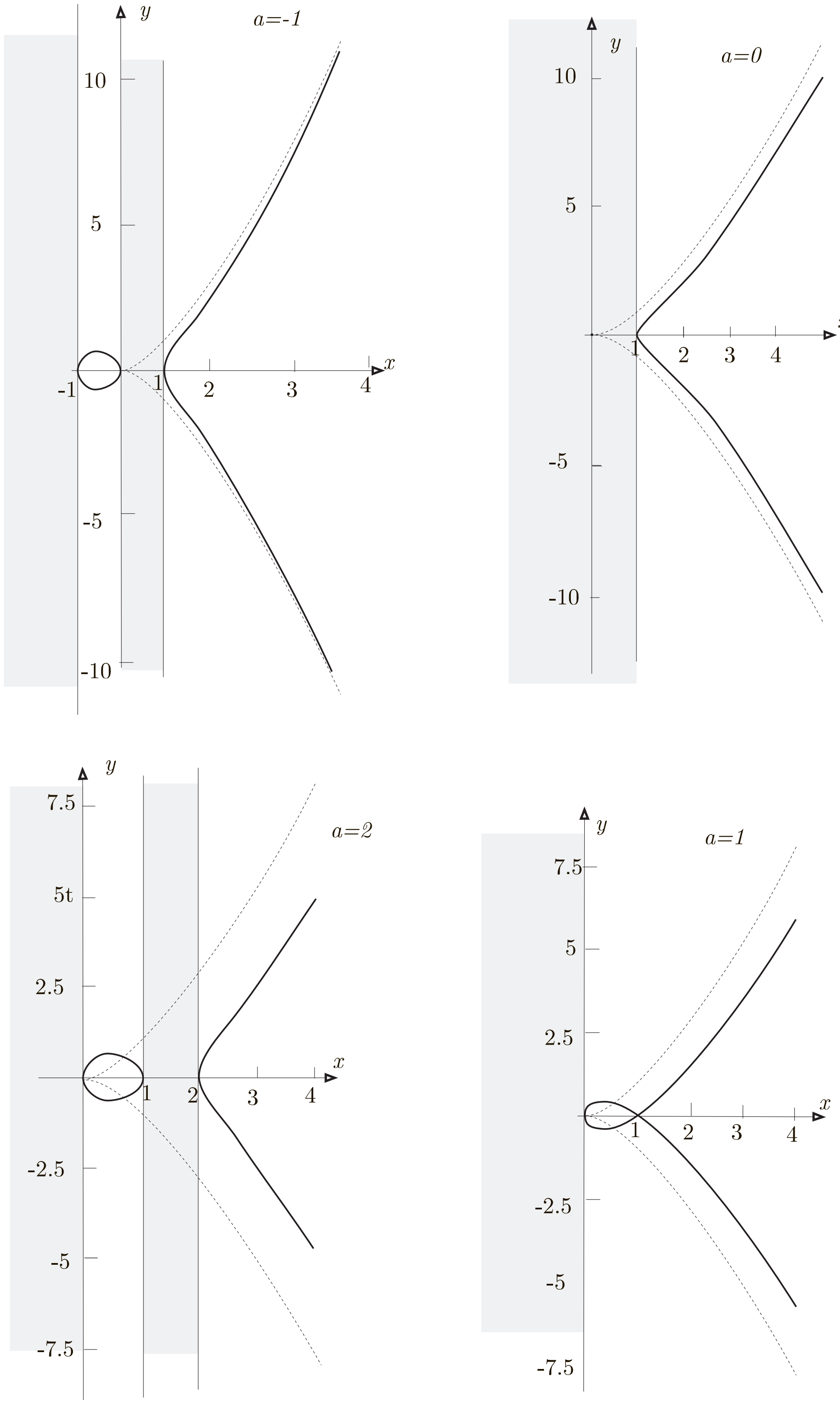
<u>SOLUCIÓN</u>:

La curva es simétrica respecto al eje OX.

Tangentes verticales: $f(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, en los puntos $(0, 0), (1, 0), (a, 0)$. Cuando $a = 0$, el origen es un punto doble aislado.

Tangentes horizontales: $f(x,y)=0$, $f'_x(x,y)=0$. Para $a=1$ en los puntos $(0.33,\pm 0.38)$ y el punto $(1,0)$ doble (nodal). Para $a=2$ en los puntos $(0.42,\pm 0.62)$. Para $a=-1$ en los puntos $(-0.57,\pm 0.62)$.

Determinatriz en el punto impropio: $y^2=x^3$, cúbica asintótica.



⊡

22. Representar gráficamente la curva $x^3y^3=(x-3)^2$.

SOLUCIÓN:

Asintotas: $x=0$ e $y=0$.

Tangente horizontal en $(9,\sqrt[3]{(2/9)^2})\simeq(9,0.36)$

Puntos singulares: Poniendo $f(t,x,y) = -(-3t+x)^2t^4 + x^3y^3 = 0$,

$f'_t(t,x,y) = 6(-3t+x)t^4 - 4(-3t+x)^2t^3 = 0, \quad f'_x(t,x,y) = -2(-3t+x)t^4 + 3x^2y^3 = 0, \quad f'_y(t,x,y) = 3x^3y^2 = 0,$

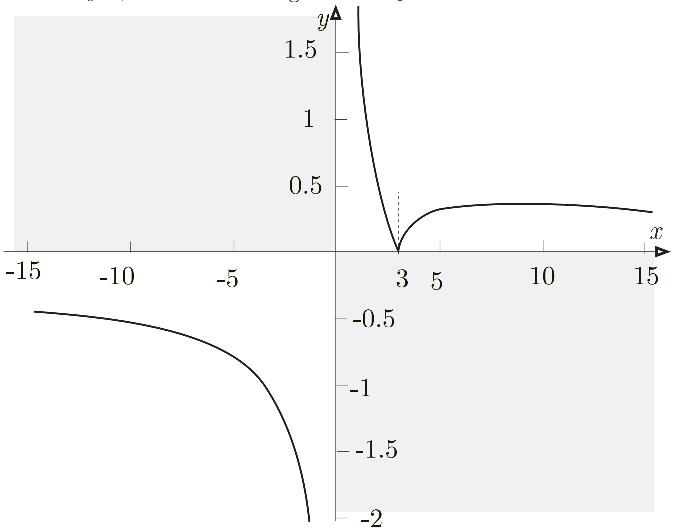
Resultan los puntos dobles $(1,3,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Haciendo una traslación al punto $(3,0)$ como nuevo origen, obtenemos la ecuación:

$$-x^2 + (3+x)^3y^3 = 0, \quad \text{o sea} \quad -x^2 + 27y^3 + 27xy^3 + 9x^2y^3 + x^3y^3 = 0,$$

curva que presenta una tangente vertical en el origen y la determinatriz en el origen es $27y^3 = x^2$. Se trata de un punto de retroceso de primera especie.

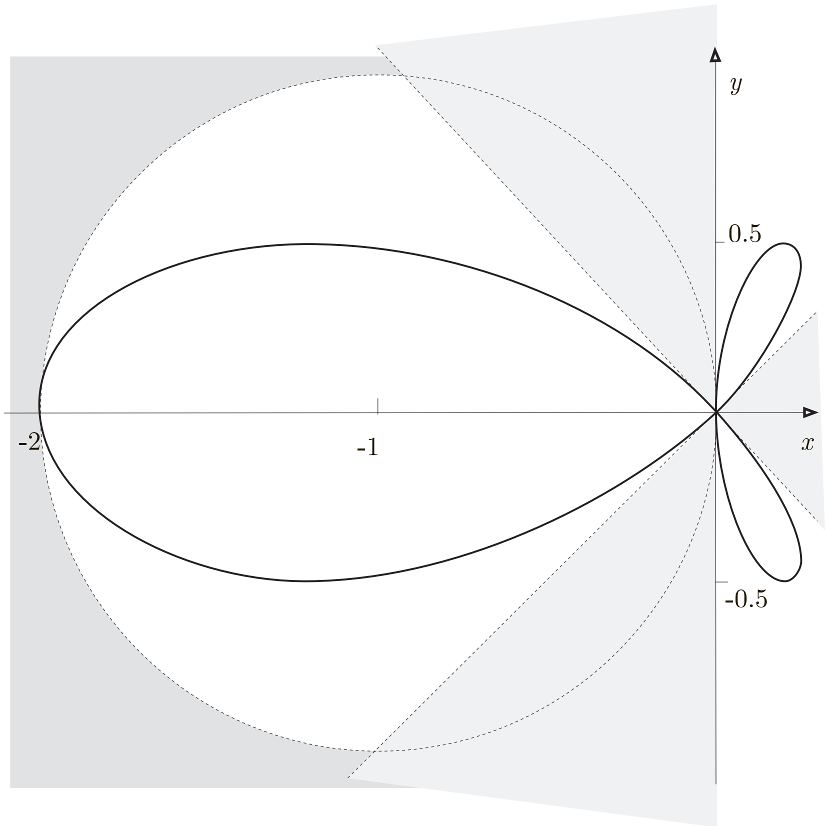
En lospuntos impropios de los ejes, éstos son tangentes triples.



⊡

23. Representar gráficamente la curva $(x^2+y^2)(x(2+x)+y^2) - 4xy^2$. En polares ver Ejercicio 67 .En paramétricas Ejercicio 50 .

SOLUCIÓN:



Las descomposiciones $(x^2+y^2)(x(2+x)+y^2) = 4xy^2$ y $2x(x-y)(x+y) = -(x^2+y^2)^2$, nos permiten sombrear zonas delpano donde no existe curva.

La curva es simétrica respecto al eje OX.

El origen es un punto triple con tangentes: $2x(x^2 - y^2) = 0$.

Puntos de tangencia horizontal: $(\pm 0.21, \pm 0.5)$.

Puntos de tangencia vertical: $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$.

⊡

24. Representar gráficamente la curva $y^2 - y^3 + x^4 = 0$.

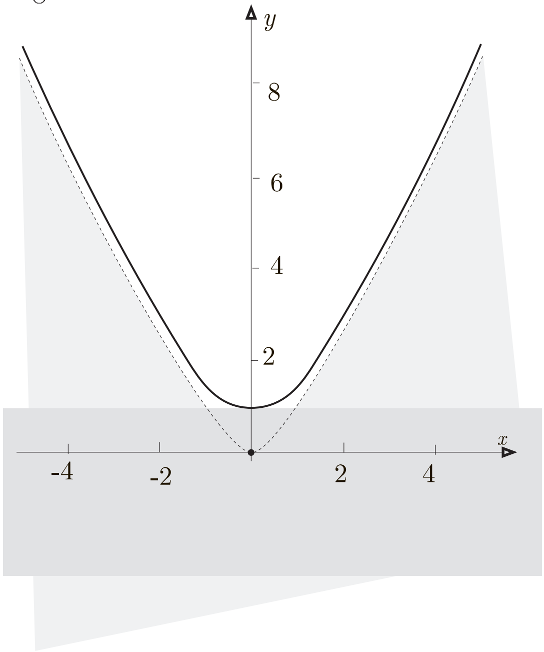
<u>SOLUCIÓN</u>:

La curva es simétrica respecto al ej OY.

La determinatriz en el origen es $y^2 + x^4 = 0$, se trata de un punto aislado. La determinatriz en el infinito es $y^3 = x^4$, parábola asíntotica.

Las descomposiciones $y^2 = y^3 - x^4$ y $x^4 = y^2(y-1)$, permiten sombrar las regiones donde no hay curva.

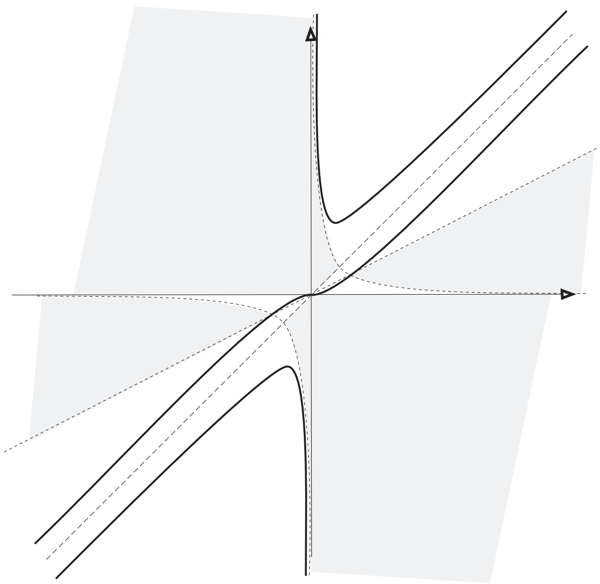
En el punto $(0, 1)$ posee una tangente horizontal.



⊡

25. Representar gráficamente la curva $xy^2 - 2x^2y + x^3 - 4y = 0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:



Regiones de existencia: $x^2(x - 2y) = y(4 - xy)$.

Simétrica respecto al origen.

Asintota vertical $x = 0$. Asíntota oblícua $y = x$, doble.

Tangentes horizontales: $(0, 0)$ de inflexión y $(\pm 1.73, \pm 5.19)$.

□

26. Representar gráficamente la curva $x^2y^3 + x^2 + y^2 = 0$.

SOLUCIÓN:

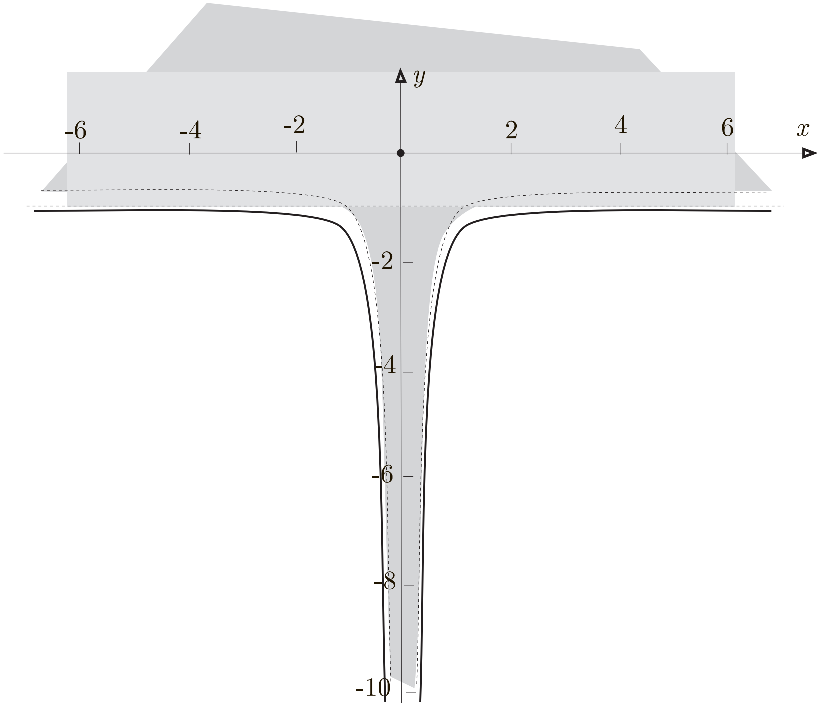
Simétrica respecto al eje OY: $f(x, y) = f(-x, y)$.

Tangentes en el origen $x^2 + y^2 = 0$: imaginarias. Punto asilado.

Asintotas. Horizontales: $y^3 + 1 = 0$, $\boxed{y = -1}$. Verticales: $x^2 = 0$, $\boxed{x = 0}$, doble.

Regiones de existencia: $x^2(y^3 + 1) = -y^2$.

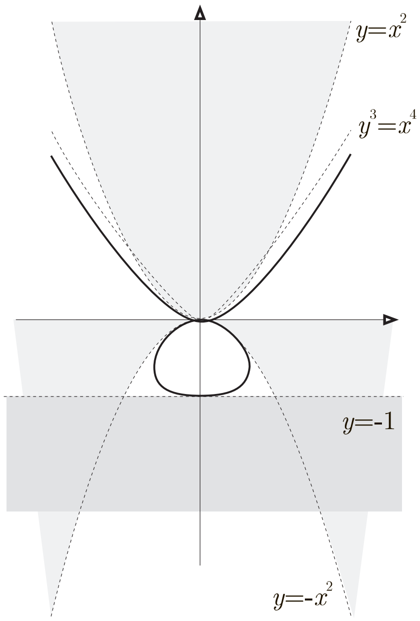
Corte con $y = x$, $x^5 + 2x^2 = 0$: $x = 0, x = \sqrt[3]{-2} \simeq -1.26$.



□

27. Representar gráficamente la curva $y^2 + y^3 - x^4 = 0$.

SOLUCIÓN:



Simétrica respecto al eje OY.

Las descomposiciones $x^4 = y^2(y+1)$ y $(y-x^2)(y+x^2) = -y^3$, nos permiten sombrear las regiones donde no hay curva.

Ramas que aproximan a la curva en el origen: $y = x^2$ e $y = -x^2$. Rama infinita $y^3 = x^4$.

Puntos de tangencia horizontal: $y^2 + y^3 - x^4 = 0, -4x^3 = 0$, $(0,0), (0,-1)$.

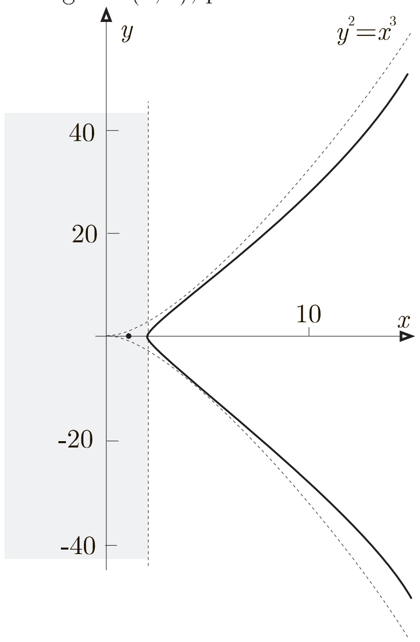
Puntos de tangencia vertical: $y^2 + y^3 - y^4 = 0, 2y + 3y^2 == 0$, $(\pm 0.62, -0.66)$.

⊡

28. Representar gráficamente la curva $y^2 - (x-1)^2(x-2) = 0$.

SOLUCIÓN:

Simétrica respecto al eje OX. Punto singular $(1,0)$, punto aislado. Tangente vertical en $(2,0)$.



⊡

29. Representar gráficamente la curva $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$.

SOLUCIÓN:

La curva es simétrica respecto al eje OY.

Los puntos singulares de la curva se obtienen resolviendo el sistema obtenido anulando sus derivadas parciales:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x = 4x^3 - 4a^2xt^2 = 0 \\ f_y = -6ay^2t - 6a^2yt^2 = 0 \\ f_t = -2ay^3 - 6a^2y^2t - 4a^2x^2t + 4t^3a^4 = 0 \end{array}\right.$$

Resultando, de las dos primeras: $(t,0,0), (t,0,at), (t,at,0), (t,at,at), (t,-at,0)$ y $(t,-at,at)$, de los cuales, sólo satisfacen a la tercera, o la ecuación de la curva, los puntos $(0,-a), (a,0)$ y $(-a,0)$, que son los puntos singulares.

Para hallar las tangentes, por ejemplo, en el punto $(1,a,0)$ se ha de calcular las derivadas segundas y sustituirlas en este punto, para formar la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} 8a^4 & -8a^3 & 0 \\ -8a^3 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -6a^2 \end{pmatrix} = 0,$$

que da lugar al ecuación cuadrática $4x^2 - 3y^2 - 8a^3x + 4a^4 = 0$, que degenera en dos rectas, que son las tangentes cuyo punto en común es el punto singular $(a,0)$, de ecuaciones:

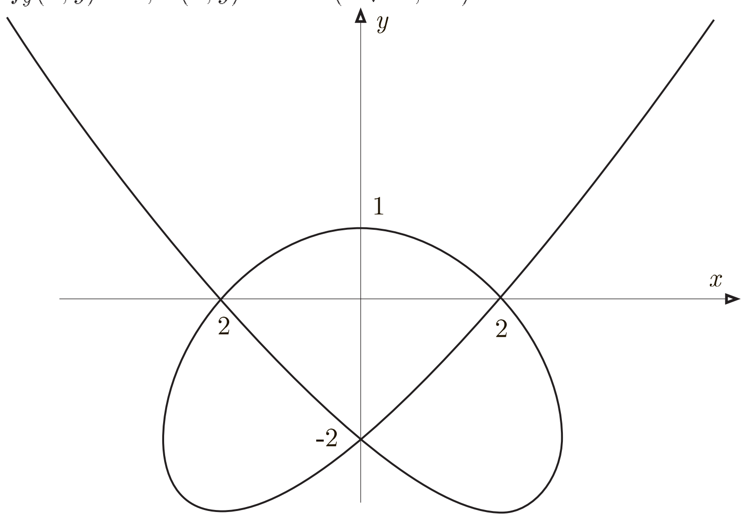
$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(x-a).$$

También se pueden determinar las tangentes en el punto singular $(a,0)$, tomando éste como nuevo origen de coordenadas, haciendo el cambio $x- > x+a, y- > y$, e igualando a cero los términos de menor grado (dos):

$4a^2x^2 - 3a^2y^2 = 0$; o sea, el producto de rectas $(y + \sqrt{2}x)(y - \sqrt{2}x) = 0$, que deshaciendo el cambio, se llega a las mismas rectas tangentes de arriba.

Tangentes horizontales: $f_x(x,y) = 0, f(x,y) = 0$, en $(0, a/2)$ y $(\pm a, -3a/2)$.

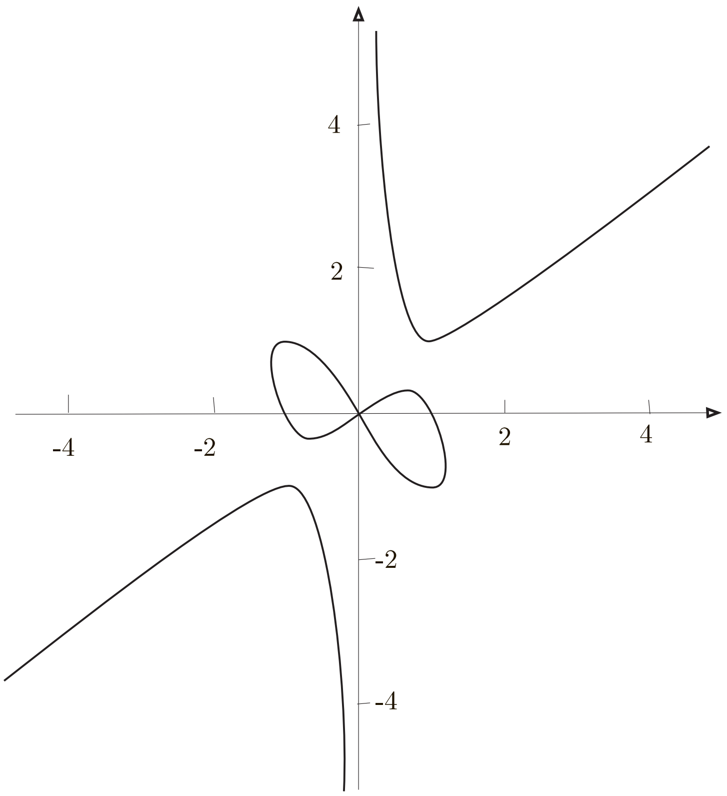
Tangentes verticales: $f_y(x,y) = 0, F(x,y) = 0$ en $(\pm\sqrt{2}a, -a)$.



□

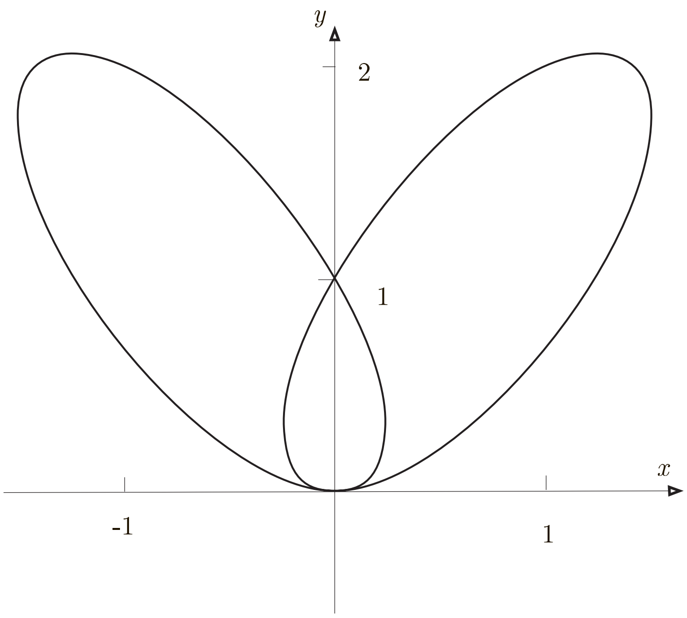
30. Representar gráficamente la curva: $(x^2 - 1)(x^2 - y^2) = xy(y^2 - 1)$.
SOLUCIÓN:

```
ImplicitPlot[(x^2-1)(x^2-y^2)==x*y(y^2-1),{x,-10,10},\
  AspectRatio->Automatic]"
```

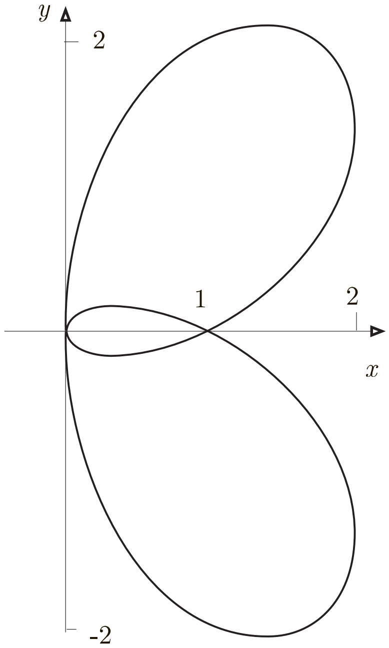


□

31. Representar gráficamente la curva $x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$.
SOLUCIÓN:



32. Representar la curva $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 4x^2(2 - x)$.
SOLUCIÓN:



33. Sea una circunferencia tangente en el origen de coordenadas. Tracemos una tangente a la circunferencia paralela al eje OX. Tracemos una recta desde el origen que corta a la circunferencia en un punto A y a la tangente en un B. Lugar geométrico del punto P con la ordenada de A y con la abscisa de B (curva de Agnesi).
SOLUCIÓN:
Ecuación de la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ y ecuación de la recta que pasa por el origen $y = tx$. El punto A, intersección de la circunferencia y recta tiene de coordenadas $\left(\frac{2at}{1+t^2}, \frac{2at^2}{1+t^2)}\right)$. Las coordenadas del punto B, intersección de recta y tangente, son $\left(\frac{2a}{t}, 2a\right)$. Por lo que las coordenadas del punto pedido P son:

$$x = \frac{2a}{t}, \qquad y = \frac{2at^2}{1+t^2}.$$

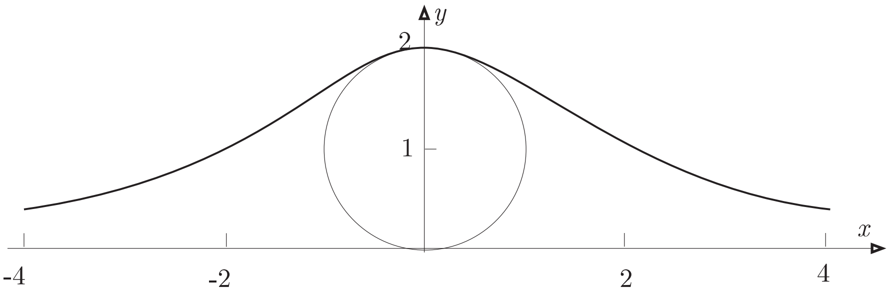
Haciendo $t = \operatorname{tag}\theta$, obtenemos estas otras ecuaciones paramétricas:

$$x = 2a \operatorname{cotg}\theta, \quad y = 2a \operatorname{sen}^2\theta.$$

Elimindo t tenemos las ecuaciones explícitas e implícitas de la curva buscada:

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, \qquad yx^2 = 4a^2(2a - y).$$

Esta curva es simétrica respecto al eje OY, tien el eje OX como asíntota y el punto impropio del eje OY es aislado.



MARÍA GAETANA AGNESI (1718 - 1799)

María G. Agnesi fue una distinguida lingüista , matemática y filósofa; remplazó a su padre en la cátedra de matemáticas de la Universidad de Bologna cuando éste estuvo enfermo, y fue la primera mujer en ocupar una cátedra de matemáticas. En 1748, se publicó su libro, recopilación de los trabajos de Euler, "Instituzioni Analithe" sobre cálculo diferencial, que fue muy popular; se tradujo a muchos idiomas y se usó en Europa durante muchos años.

Fue conocida también como La Bruja de Agnesi por confundir en su libro la palabra versoria (nombre latino de la curva de una función), por versiera otra palabra que significa abuela del diablo o bruja, de ahí viene el nombre adoptado también por la curva.

$\boxdot$

34. Representar gráficamente la curva $y^2(a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a)^2$. (Bicornio o Sombrero de tres picos)
<u>SOLUCIÓN</u>:

$$f(x, y) = y^2(a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a)^2.$$

Simétrica respecto al eje OY: $f(x, y) = f(-x, y)$.

Cortes con el eje OY, $x = 0, f(x, y) = 0$: $(0, 1), (0, 1/3)$, independientes del valor de a.

Cortes con el eje OY, $y = 0, f(x, y) = 0$: $(\sqrt{a}, 0), (-\sqrt{a}, 0)$, puntos dobles.

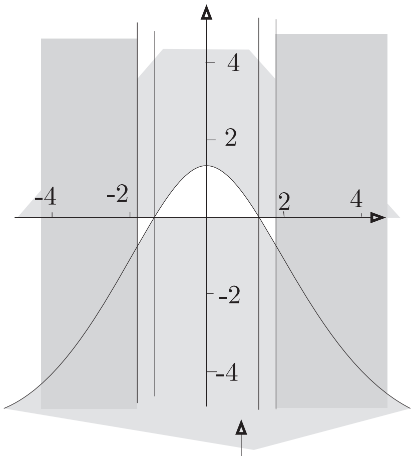
Regiones de existencia delimitadas por las rectas $x = a$ y $x = -a$. Entre estas dos rectas existe curva.

Usando MATHEMATICA para encontrar los puntos dobles:

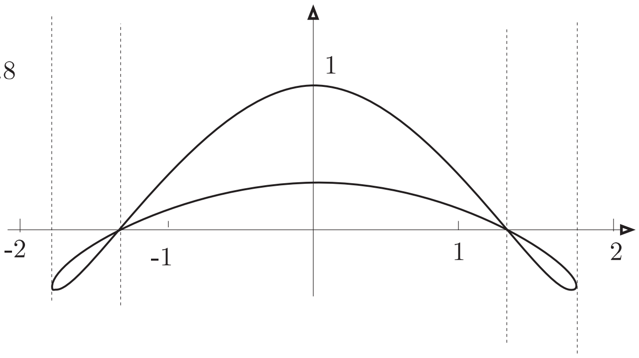
```
f[a_][t_,x_,y_]:=y^2(a^2*t^2-x^2)-(x^2+2a*y*t-a*t^2)^2

Solve[{D[f[a][t,x,y],t]==0,D[f[a][t,x,y],x]==0,
       D[f[a][t,x,y],y]==0},{t,x,y}]

{{y -> 0, x -> Sqrt[a] t},{y -> 0, x -> -(Sqrt[a] t)},{x -> 0, t-> 0}}
```

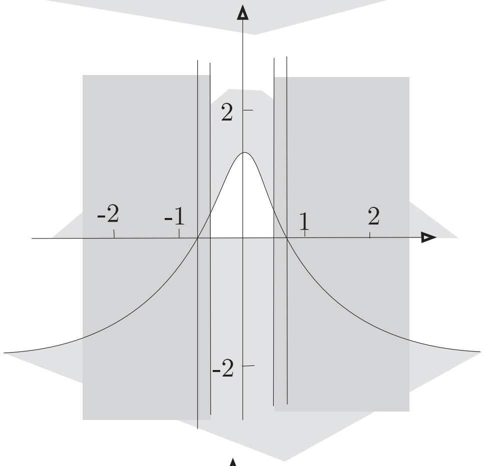
Resulta que el punto impropio del eje OY es doble y los puntos $(\pm\sqrt{a}, 0)$. Estos últimos serán aislados si $a > 1$, pues estarían en las regiones de no existencia de curva. O bien, haciendo una traslación para considerar uno de ellos como origen, resulta

$$(a - (-\sqrt{a} + x)^2)y^2 - (-a + (-\sqrt{a} + x)^2 + 2ay)^2 = 0.$$

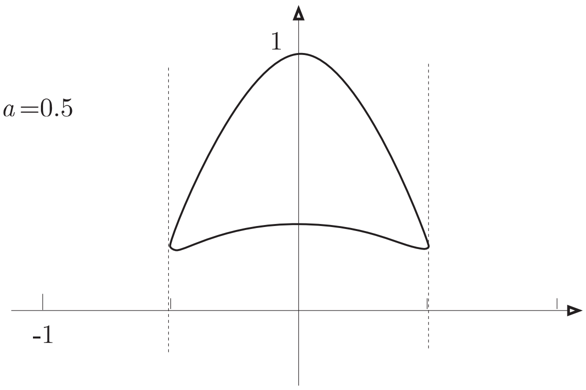


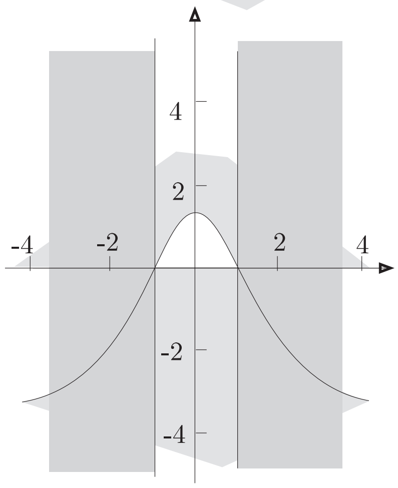
$a = 1.8$



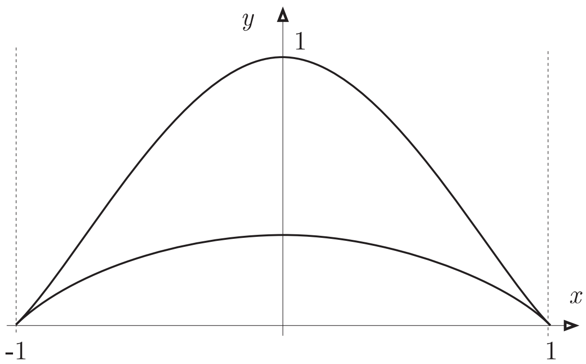


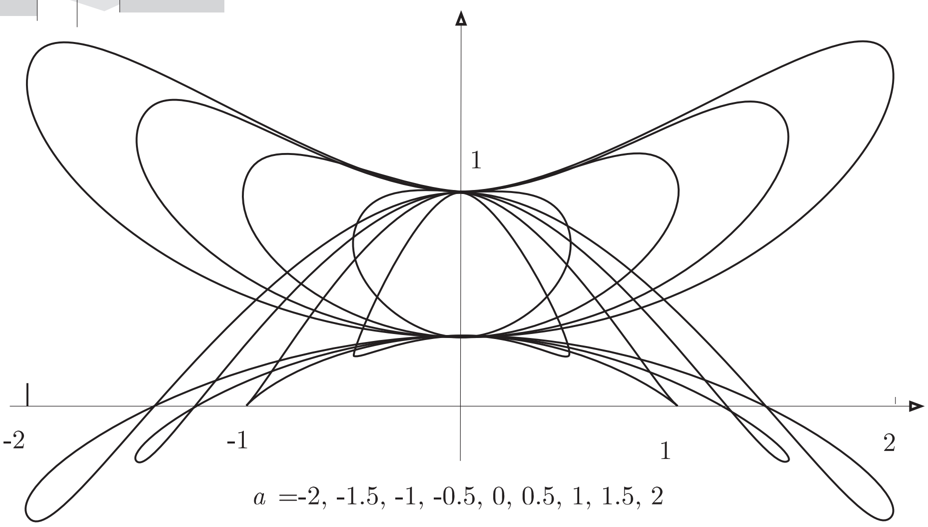
$a = 0.5$





$a = 1$





a =-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2

Tomando los términos de menor grado, igualados a cero:

$$(a+3a^2)y^2 - 8a\sqrt{a}xy + 4ax^2 = 0, \qquad y = \frac{4a\sqrt{a} \pm 2a\sqrt{a-1}}{a+3a^3}x$$

resulta tener una tangente doble $y = x$, si $a = 1$ (punto de retroceso); dos tangentes reales distintas si $a > 1$ (punto nodal); y tangentes imaginarias si $a < 1$ (punto aislado).

Tangentes verticales:$(a,(1-a)/2)$, $(-a,(1-a)/2)$, para $a \neq 1$; que resultan de:

$$(a^2-x^2)y^2 - (-a+x^2+2ay)^2 = 0, \qquad 2(a^2-x^2)y - 4a(-a+x^2+2ay) = 0$$

Obtenemos una gráfica conjunta para los valores de $a = -2, -1, 5, -1, 0.5, 0.5, 1, 1.5, 2$, utilizando Mathematica como sigue:

```
Show[Table[
ImplicitPlot[{f[a][1,x,y]==0,y==1,y==0},{x,-2,2}],{a,-2,2,.4}]]
```

⊡

35. Sean dos puntos $Q(q,0)$ y $R(0,r)$ con la suma de q y r constante (a). Ahora se construyen los puntos P sobre la recta RQ, tal que PQ es igual a una constante (b). Establecer que el lugar geométrico de P es la concoide de Dürer de ecuación implícita: $(x^2+xy+ax-b^2)^2 = (b^2-x^2)(x-y+a)^2$. Hacer la representación gráfica.

SOLUCIÓN:

Puntos dobles, usando Mathematica:

```
f[a_,b_][x_,y_,t_]:=(x^2+x*y+a*x*t-b^2*t^2)^2-(b^2-x^2)(x-y+a*t)^2

        N[Solve[{D[f[1,4][x,y,t],x]==0,
              D[f[1,4][x,y,t],y]==0,f[1,4][x,y,t]==0},{x,y,t}]]
```

$$(2.37, 3.37, 1) \qquad (-3.37, -2.37, 1) \qquad (0,1,0).$$

Tangentes horizontales:

`N[Solve[{D[f[1,4][x,y,1],x]==0,f[1,4][x,y,1]==0},{x,y}]]` $(-3.87, -0.69)$, $(-1.25, -3.29)$.

Tangente verticales: `N[Solve[{D[f[1,4][x,y,1],y]==0,f[1,4][x,y,1]==0},{x,y}]]` $(4,-1)$, $(-1,-4)$.

Cortes con los ejes:

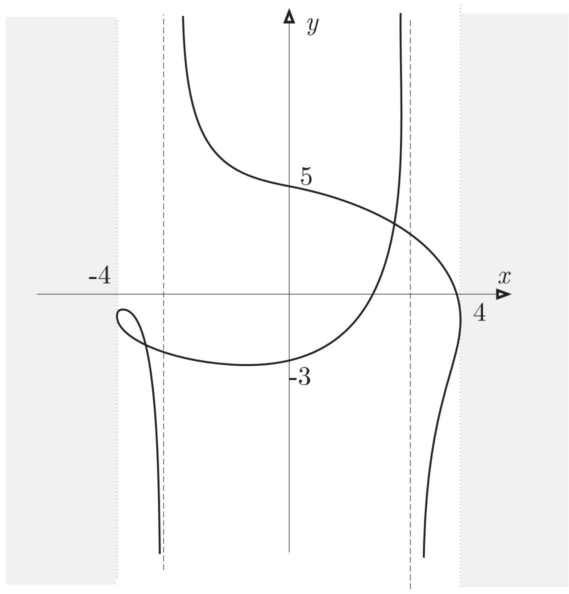
`N[Solve[{y==0,f[1,4][x,y,1]==0},{x,y}]]` `N[Solve[{x==0,f[1,4][x,y,1]==0},{x,y}]]`

$$(3.94, 0), (1.94, 0), (0, -3), (0, 5)$$

Regiones de existencia:

Las rectas $x = \pm 4$ dividen al plano en tres regiones, existiendo curva sólo en la región limitada por ellas.

Asíntotas verticales: $x = \pm 4/\sqrt{2}$.



36. Representar gráficamente la curva $y^2(4x-1) = x^2(x-1)$.

SOLUCIÓN:

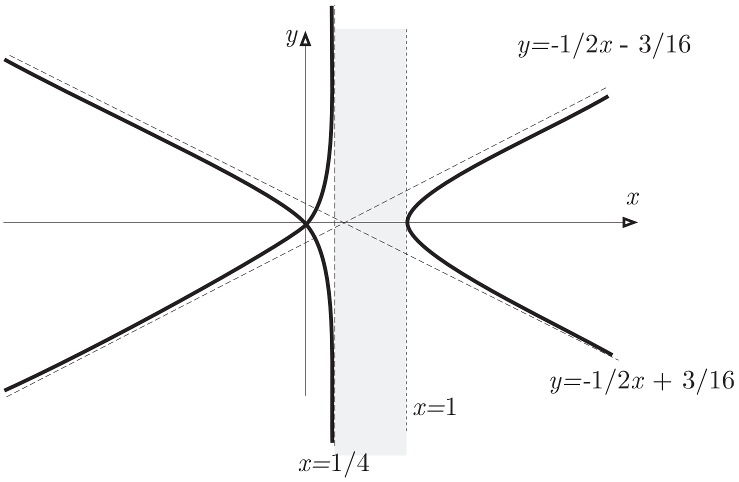
Simétrica respecto al eje OX: $f(x,y) = f(x,-y)$.

Cortes con el eje OX: $f(x,y) = 0, y = 0$, los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. Tangentes en el origen: $y^2 - x^2 = 0$, o sea $y = \pm x$. Tangente en $(1,0)$, $x = 1$, pues $f_y(1,0) = 2y(4x-1)_{|(1,0)} = 0$.

Asintotas: $f(x,y) = (4x-1)y^2 - x^2(x-1) = 0$, $\boxed{4x-1=0}$ asíntota vertical.

Asíntotas oblicuas: $\varphi(1,a) = 4a^2 - 1 = 0$, pendientes $a = \pm 1/2$. Ordenada en el origen $b = -\varphi_2(1,a)/\varphi_3'(1,a) = -(-a^2+1)/8a = \pm 3/16$. Existes dos aíntotas: $\boxed{y = x/2 - 3/16}$ y $\boxed{y = -x/2 + 3/16}$

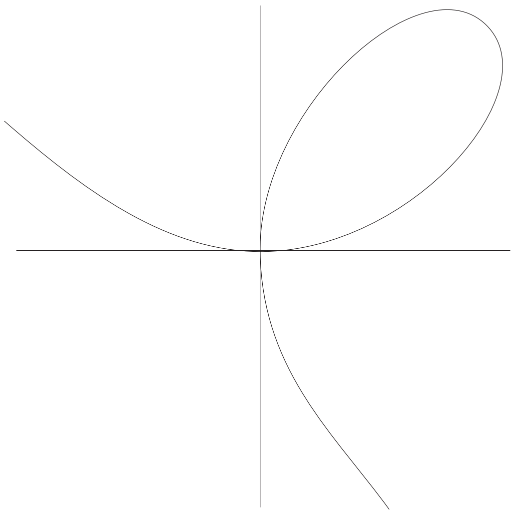
Los cortes de las asíntotas oblicuas con la curva son sólo los puntos de coordenadas $(3/28, \pm 15/112)$.



⊡

37. Representar gráficamente la curva $x^3 + y^3 = xy$ (folium de Descartes).

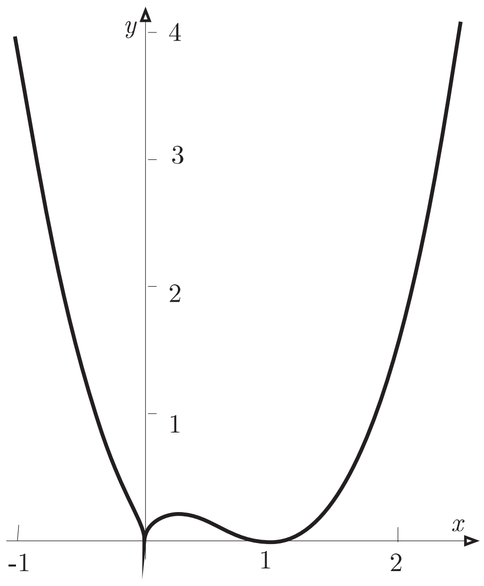
SOLUCIÓN:



⊡

38. Representar gráficamente la curva $y = x^{2/3}(x-1)^2$.

SOLUCIÓN:



$\boxdot$

39. Representar gráficamente la curva $x(x+3)(y+3x-1) = y^2(x+y)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Puntos de corte de las rectas que delimitan regiones por donde pasa la curva:

$$(0,0), \quad (-3,0), \quad (-3,3), \quad (\frac{1}{3},0), \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

No hay asíntotas verticales ni horizontales.

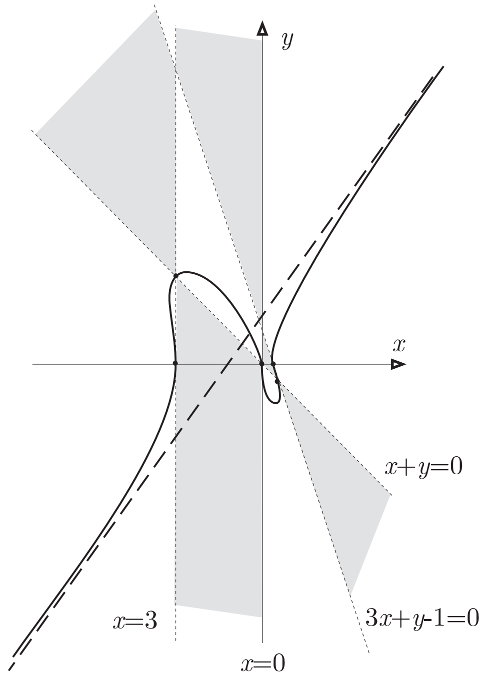
Asíntotas del tipo $y = ax+b$:

$$f(x,y) = (3x^3 + x^2y - xy^2 - y^3) + (8x^2 + 3xy) + (-3x) = 0,$$

$$\varphi_3(x,y) = 3x^3 + x^2y - xy^2 - y^3, \quad \varphi_2(x,y) = 8x^2 + 3xy, \quad \varphi_1(x,y) = -3x, \quad \varphi_0(x,y) = 0.$$

$$\varphi_3(1,a) = -a^3 - a^2 + a + 3 = 0, \Rightarrow a = 1.36, a = -1.18 \pm 0.9i. \qquad b = -\frac{\varphi_2(1,a)}{\varphi_3'(1,a)} = -\frac{3a+8}{-3a^2-2a+1}_{|a=1.36} = 1.66$$

La única asíntota es $y = 1.36x + 1.66$.



No hay puntos dobles, ni propios ni impropios, pues la única solución común de

$$f_x(x,y,t) = -3t^2 + 16tx + 9x^2 + 3ty + 2xy - y^2 = 0,$$

$$f_y(x,y,t) = 3tx + x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \qquad f_t(x,y,t) = -6tx + 8x^2 + 3xy = 0,$$

es la trivial, que no representa ningún punto.

Tangentes horizontales en:

$$f_x(x,y) = -3 + 16x^2 + 9x + 3y^2 + 2xy - y = 0, \quad f(x,y) = 0 \Rightarrow (0.49, -1.32), \quad (-2.63, 3.18)$$

Tangentes verticales en:

$$f_y(x,y) = 3x + x^2 - 2xy^2 - 3y = 0, \quad f(x,y) = 0, \quad f(x,y) = 0 \Rightarrow (-3, 0), \quad (0,0)$$

⊡

40. Representar gráficamente la curva $a^2y^2 = x^4(a^2 - x^2)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Las regiones de existencia resultan de las dos descomposiones:

$$a^2y^2 = x^4(a-x)(a+x), \qquad a^2(y - x^2)(y + x^2) = -x^6.$$

La curva es simétrica respecto a los dos ejes coordenados.

Puntos singulares:

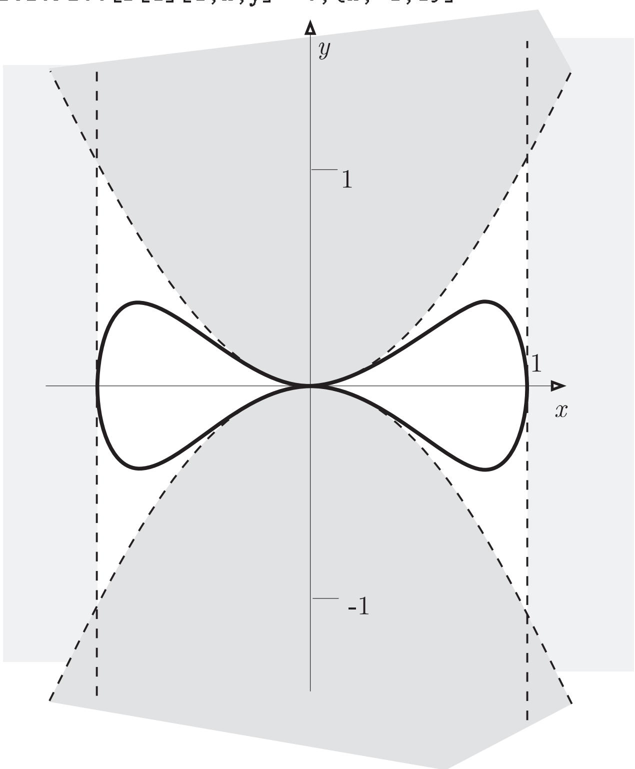
```
        f[a_][t_,x_,y_]:=a^2y^2t^4-x^4(a^2t^2-x^2)
Solve[D[f[a][t,x,y],t]==D[f[a][t,x,y],x]==D[f[a][t,x,y],y]==0,{t,x,y}]

 D[f[a][t,x,y],t] =  -2 a^2  t x^4  + 4 a^2  t^3  y^2 = 0
 D[f[a][t,x,y],x] = 2 x^5  - 4 x^3  (a^2  t^2  - x^2 ) = 0
 D[f[a][t,x,y],y] = 2 a^2  t^4  y = 0
```

El origen y el punto impropio del eje OY son puntos dobles.

Como las tangentes en el origen vienen dadas por $y^2 = 0$, y por las simetrías de la curva, se trata de un punto tacnodal. El punto doble impropio es aislado.

La gráfica siguiente está extraida de MATHEMATICA con

`ImplicitPlot[f[1][1,x,y]==0,{x,-1,1}]`



⊡

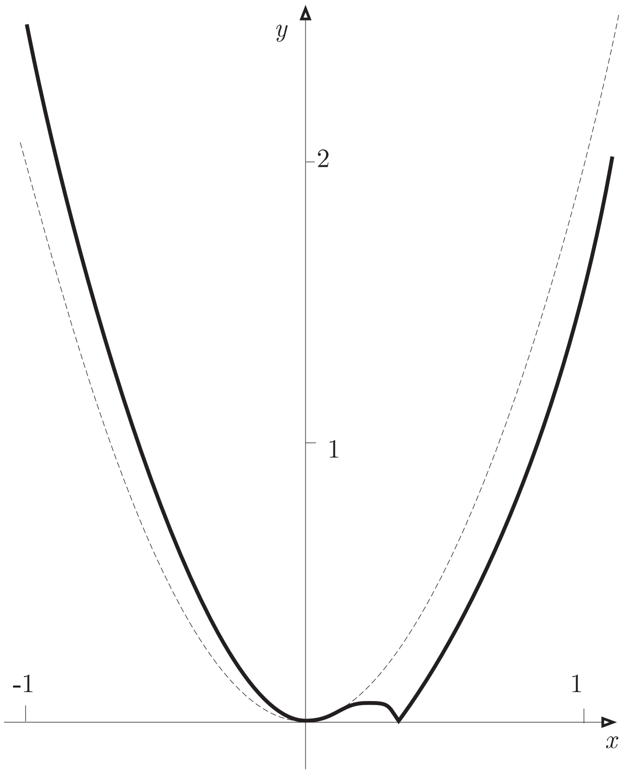
41. Representar gráficamente la curva $y^3 - (1-3x)^2x^4 = 0$. (Ver Ejercicio 22)

<u>SOLUCIÓN</u>:

$(0, 1/3)$ punto doble de retroceso. Rama parabólica en la dirección del eje OY: $y = \sqrt[3]{9}x^2$. El origen punto triple con tangente horizontal.

Gráfica extraida de Mathematica con

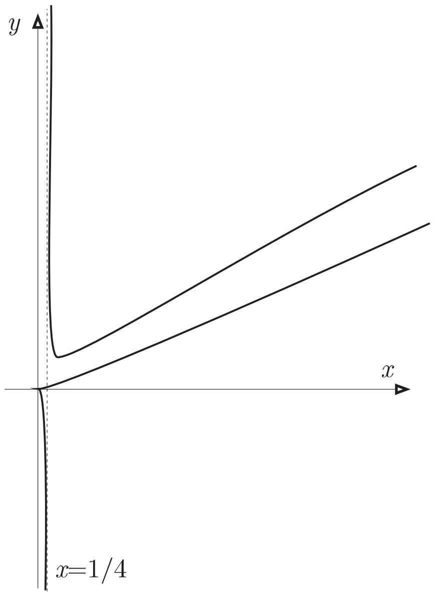
```
f[t_,x_,y_]:= -((t - 3 x)^2  x^4 ) + t^3  y^3
ImplicitPlot[{f[1,x,y]==0,y==9^{1/3}x^2},{x,-.1,.5}]
```



□

42. Representar gráficamente la curva $x^3 - 4x^2y - y^2 + 4xy^2 = 0$. (Ver Ejercicio 47 , eliminando el parámetro y tomando como origen $(-1, 0)$.)

<u>SOLUCIÓN</u>:



□

43. Representar gráficamente la curva $x = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)}$; $\quad y = \dfrac{t^2-2t}{t-1}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

<u>Asíntotas</u>:

$t = 1$

$$m = \lim_{t\to 1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{(t^2-2t)(t+2)}{t^3} = -3.$$

$$b = \lim_{t\to 1}(y-mx) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-2t}{t-1} + 3\frac{t^3}{(t-1)(t+2)}\right) = \lim_{t\to 1}\frac{4t(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+2)} = \frac{8}{3}$$

$$y = -3x + \frac{8}{3}.$$

Posición de la curva respecto a la aíntota en el punto del infinito:

$$y_c - y_a = \frac{3(t^2-2t)(t+2)+3t^3-8(t-1)(t+2)}{3(t-1)(t+2)} = \frac{(12t+16)(t-1)}{3(t+2)}.$$

$$\begin{array}{lll} t\to 1^+ & x\to\infty, y\to -\infty & y_c-y_a>0 \\ t\to 1^- & x\to -\infty, y\to\infty & y_c-y_a<0 \end{array}$$

$t = -2$

$$\lim_{t\to -2} x(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to -2} y(t) = \lim_{t\to -2}\frac{t^2-2t}{t-1} = -\frac{8}{3}. \qquad y = -\frac{8}{3}, \text{ asíntota horizontal.}$$

Posición de la curva respecto a la aíntota en el punto del infinito:

$$y_c - y_a = \frac{t^2-2t}{t-1} + \frac{8}{3} = \frac{(t+2)(3t-4)}{3(t-1)}.$$

$$\begin{array}{lll} t\to -2^+ & x\to\infty & y_c-y_a>0 \\ t\to -2^- & x\to -\infty & y_c-y_a<0 \end{array}$$

$t \to \infty$

$$m = \lim_{t\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2t)(t+2)}{t^3} = 1.$$

$$b = \lim_{t\to\infty}(y-mx) = \lim_{t\to\infty}(\frac{t^3-4t-t^3}{(t-1)(t+2)} = 0$$

$$y = x.$$

Posición de la curva respecto a la aíntota en el punto del infinito:

$$y_c - y_a = \frac{t^2-2t}{t-1} - \frac{t^3}{(t-1)(t+2)} = -\frac{4t}{(t-1)(t+2)}.$$

$$\begin{array}{lll} t\to\infty & x\to\infty & y_c-y_a<0 \\ t\to -\infty & x\to -\infty & y_c-y_a>0 \end{array}$$

<u>Puntos dobles</u>:

$$\frac{t^3}{(t-1)(t+2)} = \frac{t_0^3}{(t_0-1)(t_0+2)} \Rightarrow t^3t_0^2 + t^3t^0 - 2t^3 = t_0^3t^2 + t_0^3t - 2t_0^3,$$

$$t^2t_0^2(t-t_0) + tt_0(t-t_0)(t+t_0) - 2(t^2+tt_0+t_0^2)(t-t_0) = 0, \quad p^2+ps-2s^2+2p = 0.$$

$$\frac{t^2-2t}{t-1} = \frac{t_0^2-2t_0}{t_0-1} \Rightarrow t^2t_0 - 2tt_0 - t^2 + 2t = t_0^2t - 2tt_0 - t_0^2 + 2t_0,$$

$$tt_0(t-t_0)-(t-t_0)(t+t_0)+2(t-t_0)=0, \quad p-s+2=0.$$

Resolviendo el sistema en s y p, se obtiene $s=0$ y $p=-2$.

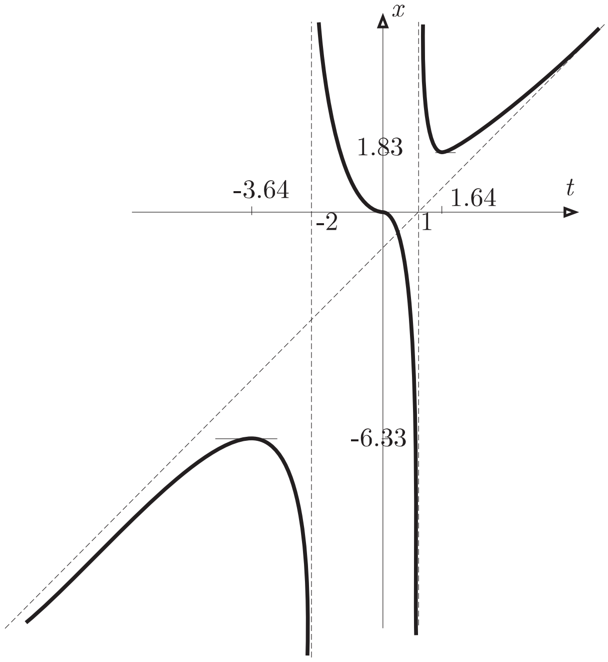
Los puntos doble surgen de la ecuación $t^2-2=0$: $t=\pm\sqrt{2}$, $(2.001,-2)$

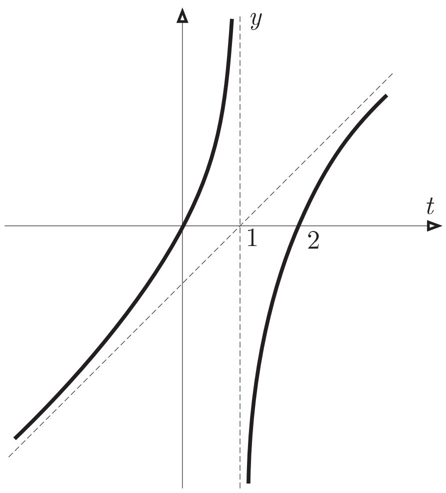
Tangentes horizontales:

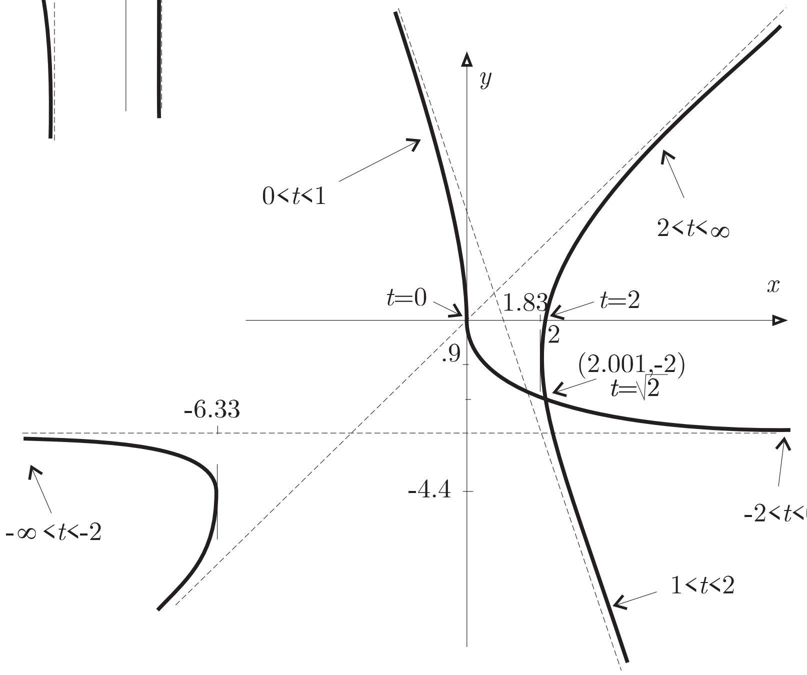
$$\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{(2t-2)(t-1)-t^2+2t}{(t-1)^2}=0 \Rightarrow t^2-2t+2=0. \quad \text{No hay.}$$

Tangentes verticales:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2(t-1)(t+2)-t^3(t+2)-t^3(t-1)}{(t-1)^2(t+2)^2}=0 \Rightarrow t^2(t^2+2t-6)=0 \Rightarrow t=0, t=-1+\sqrt{7}, t=-1-\sqrt{7}.$$







∎

44. Representar gráficamente la curva $x=t+\dfrac{1}{t+1}, \quad y=t^2+\dfrac{1}{t^2+1}$.

SOLUCIÓN:

Asíntota horizontal: $t=-1$, que da la recta $y=3/2$.

Puntos múltiples:

$$\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{t_0^2+t_0+1}{t_0+1}\Rightarrow t^2t_0-t_0^2t+t^2-t_0^2=0\Rightarrow tt_0(t-t_0)+(t+t_0)(t-t_0)=0\Rightarrow p+s=0.$$

$$\frac{t^4+t^2+1}{t^2+1}=\frac{t_0^4+t_0^2+1}{t_0^2+1}\Rightarrow t_0^2t^4-t^2t_0^4+t^4-t_0^4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2t_0^2(t^2-t_0^2)+(t^2+t_0^2)(t^2-t_0^2)=0\Rightarrow t_0^2t^2+t^2+t_0^2-2tt_0+2tt_0=0\Rightarrow p^2+s^2-2p=0.$$

$$p+s=0,\quad p^2+s^2-2p=0\Rightarrow 2p(p-1)=0\Rightarrow p=0,s=0;\quad p=1,s=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2=0(t=0,\text{ doble})\text{ y } t^2+t+1=0\text{ (imaginarias)}.$$

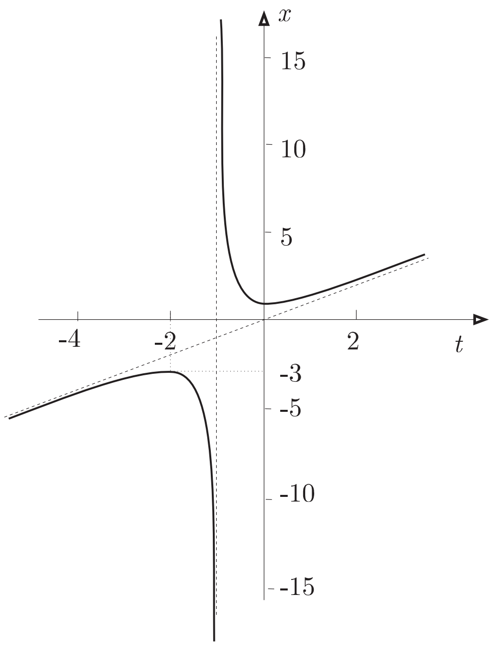
Tangentes en $(1,1)$, correspondiente a $t=0$:

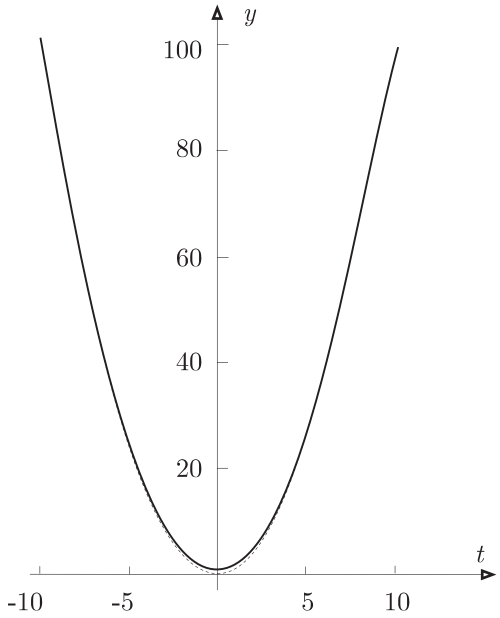
$$\overrightarrow{\alpha}(t)=\left(\frac{t^2+t+1}{t+1},\frac{t^4+t^2+1}{t^2+1}\right),\ \overrightarrow{\alpha'}(t)=\left(\frac{2t+t^2}{(1+t)^2},\frac{2(2t^3+t^5)}{(1+t^2)^2}\right),\ \overrightarrow{\alpha''}(t)=\left(\frac{2}{(1+t)^3},\frac{2(6t^2+3t^4+t^6)}{(1+t^2)^3}\right),$$

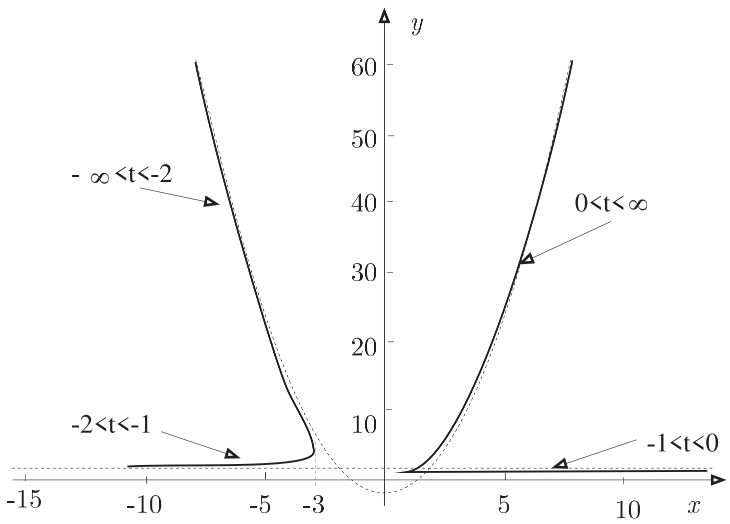
$$\overrightarrow{\alpha'''}(t)=\left(\frac{-6}{(1+t)^4},\frac{24(t-t^3)}{(1+t^2)^4}\right),\quad \overrightarrow{\alpha^{(iv}}(t)=\left(\frac{24}{(1+t)^5},\frac{24(1-10t^2+5t^4)}{(1+t^2)^5}\right).$$

$$\overrightarrow{\alpha'}(0)=(0,0),\quad \overrightarrow{\alpha''}(0)=(2,0),\quad \overrightarrow{\alpha'''}(0)=(-6,0),\quad \overrightarrow{\alpha^{(iv}}(0)=(24,24).$$

se trata de un punto de retroceso de segunda especie con tangente $(2,0)$.







Rama parabólica:

$$y = t^2+\frac{1}{t^2+1},\ x = t+\frac{1}{t+1} \Rightarrow y-x^2 = -2-\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{1+t}+\frac{1}{1+t^2} \Rightarrow y-x^2+2 = -\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{1+t}+\frac{1}{1+t^2}$$

La expresión $y - x^2 + 2$ tiende a cero cuando $t \to \infty$, se tiene una parábola asintótica $y = x^2 - 2$.

Tangente vertical: $2t + t^2 = 0$, $t = -2$, que corresponde al punto $(-3, 13/5)$.

$\boxdot$

---

45. Representar gráficamente la curva $x = \dfrac{t^2+t+1}{t+1}, y = \dfrac{t^2-1}{2-t}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Asíntotas:

$$t = -1; \qquad \lim_{t\to -1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to -1} y(t) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0 \quad \text{asíntota horizontal}}$$

$$t = 2; \qquad \lim_{t\to 2} x(t) = \frac{7}{3}, \quad \lim_{t\to 2} y(t) = \infty \Rightarrow \boxed{x = 7/3 \quad \text{asíntota vertical}}$$

Posición de la curva respecto a la síntota "$y = 0$" en el punto del infinito:

$$y_a - y_c = \frac{t^2-1}{2-t} - 0 = \frac{t^2-1}{2-t}$$

$$t \to -1^+, \quad x \to +\infty, \quad y_c - y_a < 0. \qquad t \to -1^-, \quad x \to -\infty, \quad y_c - y_a > 0.$$

Posición de la curva respecto a la síntota "$x = 7/3$" en el punto del infinito:

$$x_a - x_c = \frac{t^2+t+1}{t+1} - \frac{7}{3} = \frac{3t^2-4t-4}{3(t+1)}$$

$$t \to 2^+, \quad y \to -\infty, \quad x_c - x_a > 0. \qquad t \to 2^-, \quad y \to +\infty, \quad x_c - x_a < 0.$$

Puntos dobles:

$$\frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{t_0^2+t_0+1}{t_0+1} \Rightarrow (t-t_0)(tt_0+t+t_0) = 0 \Rightarrow p+s = 0.$$

$$\frac{t^2-1}{2-t} = \frac{t_0^2-1}{2-t_0} \Rightarrow 2(t+t_0) - tt_0 - 1 = 0 \Rightarrow 2s - p - 1 = 0.$$

con lo que $p = -1/3$ y $s = 1/3$ y de la ecuación $t^2 - pt + s = 0$ o sea de la $t^2 - t/3 - 1/3 = 0$, surge que los parámetros $t_1 = (1+\sqrt{13})/6$ y $t_2 = (1-\sqrt{13})/6$ corresponde al mismo punto $(1.33, -0.33)$, por donde pasa la curva dos veces.

Tangentes horizontales: $y'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{2}$.

Tangentes verticales: $x'(t) = 0 \Rightarrow t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = -2$.

Representación gráfica de $x = \dfrac{t^2+t+1}{t+1}$:

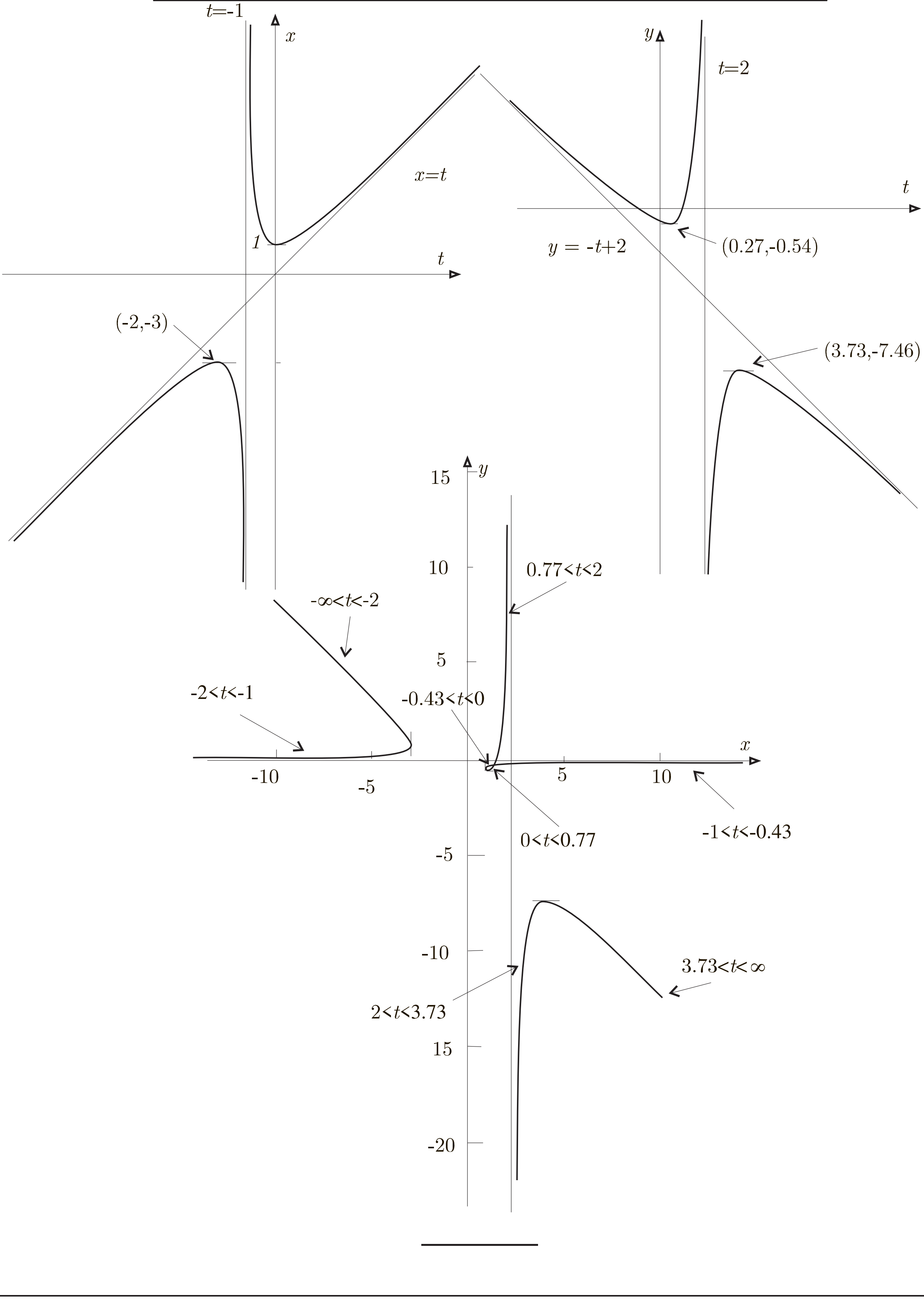
Se trata de una hipérbola de asíntotas $x = t$ y $t = -1$. Con tangentes horizontales en los puntos $(0, 1)$ y $(-2, -3)$.

Representación gráfica de $y = \dfrac{t^2-1}{2-t}$:

Se trata también de un hipérbola de asíntotas $t = 2$ e $y = -t + 2$. Con tangentes horizontales en los puntos $(3.73, -7.46)$ y $(0.27, -0.54)$. Y las siguientes coordenadas del corte con los ejes: $(1, 0), (-1, 0)$ y $(0 - 1/2)$.

Haciendo uso de estas gráficas tenemos el siguiente cuadro de valores:

t	$-\infty$	-2	-1	0	0.27	1	2	3.73	$+\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow -3$	$\searrow \frac{-\infty}{+\infty}$	$\searrow 1$	$\nearrow 1.06$	$\nearrow 3/2$	$\nearrow 7/2$	$\nearrow 3.94$	$\nearrow +\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 3/4$	$\searrow 0$	$\searrow -1/2$	$\searrow -0.54$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow -7.46$	$\searrow -\infty$



□

46. Representar gráficamente la curva $x = \dfrac{3t^2}{t^3+1}$, $y = \dfrac{4t^3}{t^2+1}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

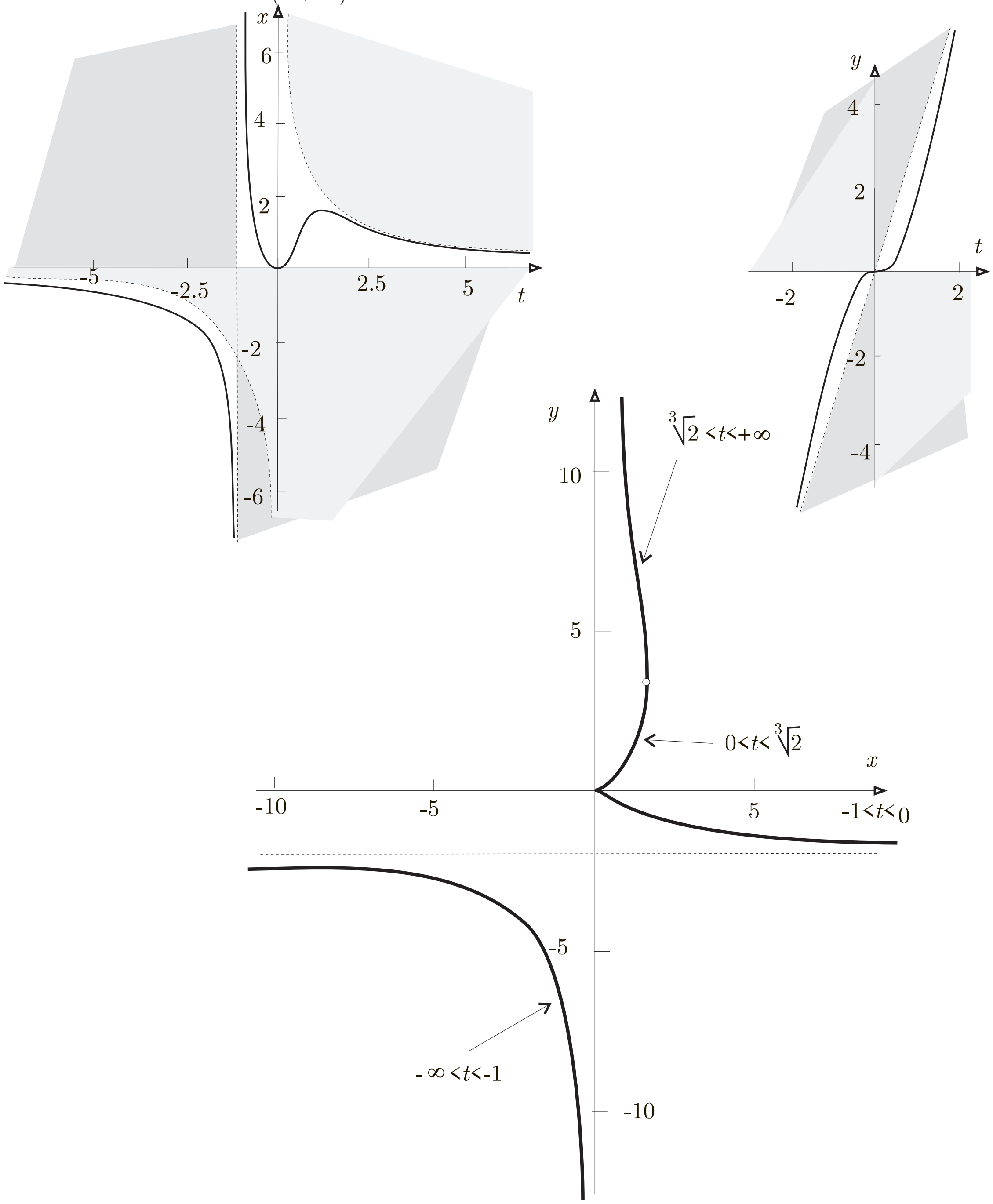
Ramas infinitas:

$$\lim_{t\to -1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to -1} y(t) = -2, \qquad \boxed{y=-2} \text{ Asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{t\to \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to \infty} y(t) = \infty, \qquad \boxed{x=0} \text{ Asíntota vertical.}$$

Tangentes horizontales: $y'(t) = \dfrac{4\,t^2\,\left(3+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t=0 \quad (0,0) \quad (\text{doble})$

Tangentes verticales: $x'(t) = \dfrac{3\,t\,\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t=0 \quad (0,0) \quad (\text{punto singular}); \quad t=\sqrt[3]{2} \quad (1.59, 3.09)$



Tipo de punto singular en $(0,0)$:

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}'(0) = (0,0), \qquad \overrightarrow{\mathbf{x}}''(0) = (6,0), \qquad \overrightarrow{\mathbf{x}}'''(0) = (0,24),$$

$p=2$, par y $q=3$, impar: punto de retorceso de primera especie.

Gráficas de las curvas por separado:

1) $xt^3+x-3t^2=0$
Con las dos descomposiciones, $x(t^3+1)=3t^2$ y $t^2(xt-3)=-x$, delimitamos zonas de existencia.
Asíntotas: $t=-1$ y $x=0$.
Tangentes horizontales en $(0,0)$ y $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})\simeq(1.26,1.59)$.

2) $yt^2+y-4t^3=0$
Las regiones de existencia surgen de las dos descomposiciones $y(t^2+1)=4t^3$ y $t^2(y-4t)=-y$.
Asíntota oblicua $y=4t$. Tangente en el origen $y=0$.

$\boxdot$

---

47. Representar gráficamente la curva $x=t^2-1, y=\dfrac{t^3}{2t-1}$ (Ver Ejercicio 42)

SOLUCIÓN:
Ramas infinitas:

$$\lim_{t\to 1/2} x(t)=-\frac{3}{4},\quad \lim_{t\to 1/2} y(t)=\infty,\qquad \boxed{x=-\tfrac{3}{4}}\ \text{Asíntota vertical.}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\infty,\quad \lim_{t\to\infty} y(t)=\infty,\qquad m=\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{1}{2},\quad b=\lim_{t\to\infty}(y(t)-mx(t))=\infty.$$

Rama parabólica en la dirección de la recta $t=x/2$.
Puntos singulares:

$$\vec{\mathbf{x}}\,'(t)=\left(2\,t,\frac{t^2\,(-3+4\,t)}{(-1+2\,t)^2}\right),\qquad \vec{\mathbf{x}}\,''(t)=\left(2,\frac{2\,t\,\left(3-6\,t+4\,t^2\right)}{(-1+2\,t)^3}\right),\qquad \vec{\mathbf{x}}\,'''(t)=\left(2\,t,\frac{t^2\,(-3+4\,t)}{(-1+2\,t)^2}\right).$$

Para $t=0$, $\vec{\mathbf{x}}\,'(0)=(0,0)$, $\vec{\mathbf{x}}\,''(0)=(2,0)$, $\vec{\mathbf{x}}\,'''(0)=(0,-6)$. Se trata de un punto de retroceso de primera especie $(p=2,q=3)$.

Tangentes horizontales: $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t^2\,(-3+4\,t)}{(-1+2\,t)^2}=0$, $t=0$ doble y $t=3/4$, que correspende al punto $(-7/26,27,32)$ $\simeq(-0.43,0.84)$.
Corte con los ejes:

$$x(t)=t^2-1=0,\quad t=\pm1,\quad \text{resultan los puntos}\quad (0,1/3),\quad (0,1).$$

$$y(t)=0,\ \text{si } t=0,\quad \text{obtenemos}\quad (-1,0).$$

Puntos de corte con la asíntota:

$$x=-\frac{3}{4},\quad x(t)=t^2-1=-\frac{3}{4},\quad t=\pm\frac{1}{2},\quad y(-\frac{1}{2})=\frac{1}{16},$$

la curva corta a la asíntota en $(-374,1716)$.

Represetanción de cada curva por separado
$x=t^2-1$ es un parábola de eje el de ordenadas y vértice (mínimo) en $(0,-1)$, correspondiente al valor del parámetro $t=0$.

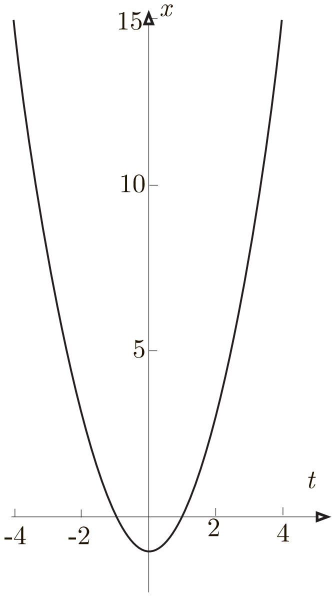
$y=\dfrac{t^3}{2t-1}$

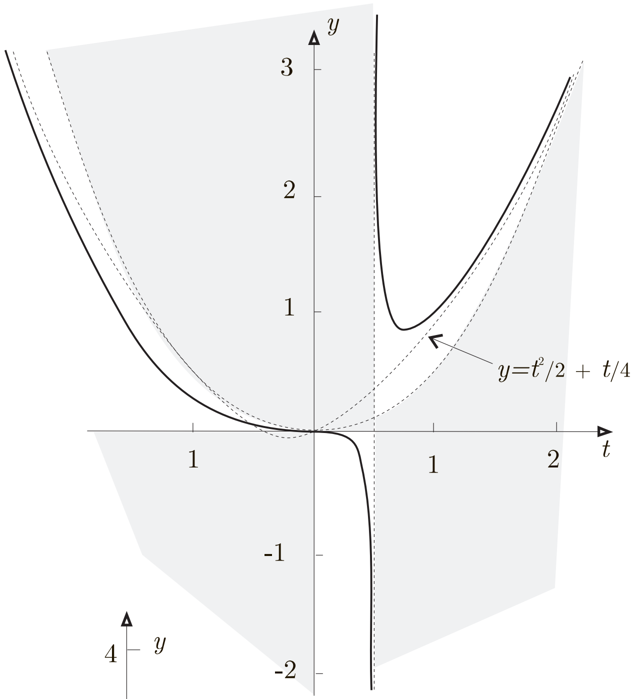
Tangente en eorigen $y = 0$, se aproxima a la curva $y = -t^3$.

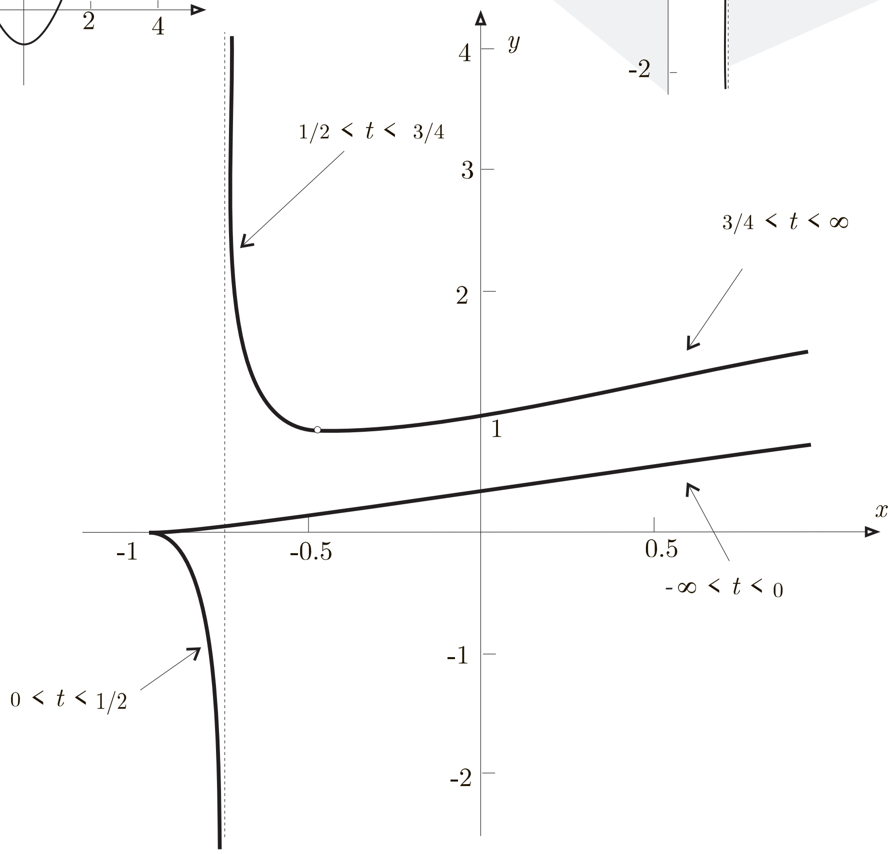
Asíntota vertical $t = 1/2$.

Estudio en el punto del infinito del eje de ordenadas: La detereminatriz $2ty - y = 0$ nos da la asintota $t = 1/2$, y la determinatriz $2ty - t^3 = 0$ que aproximamos con $y = t^2/2 + u$, nos da la nueva determinatriz $2tu - t^2/2 = 0$. Con lo que tenemos la parábola asintótica $y = t^2/2 + t/4$.

Regiones de existencia: $y(2t - 1) = t^3$ o $t(2y - t^2) = y$.







$\square$

48. Representar gráficamente la curva $x = t^2, y = \dfrac{t+1}{t-1}$.

SOLUCIÓN:

Ramas infinitas:

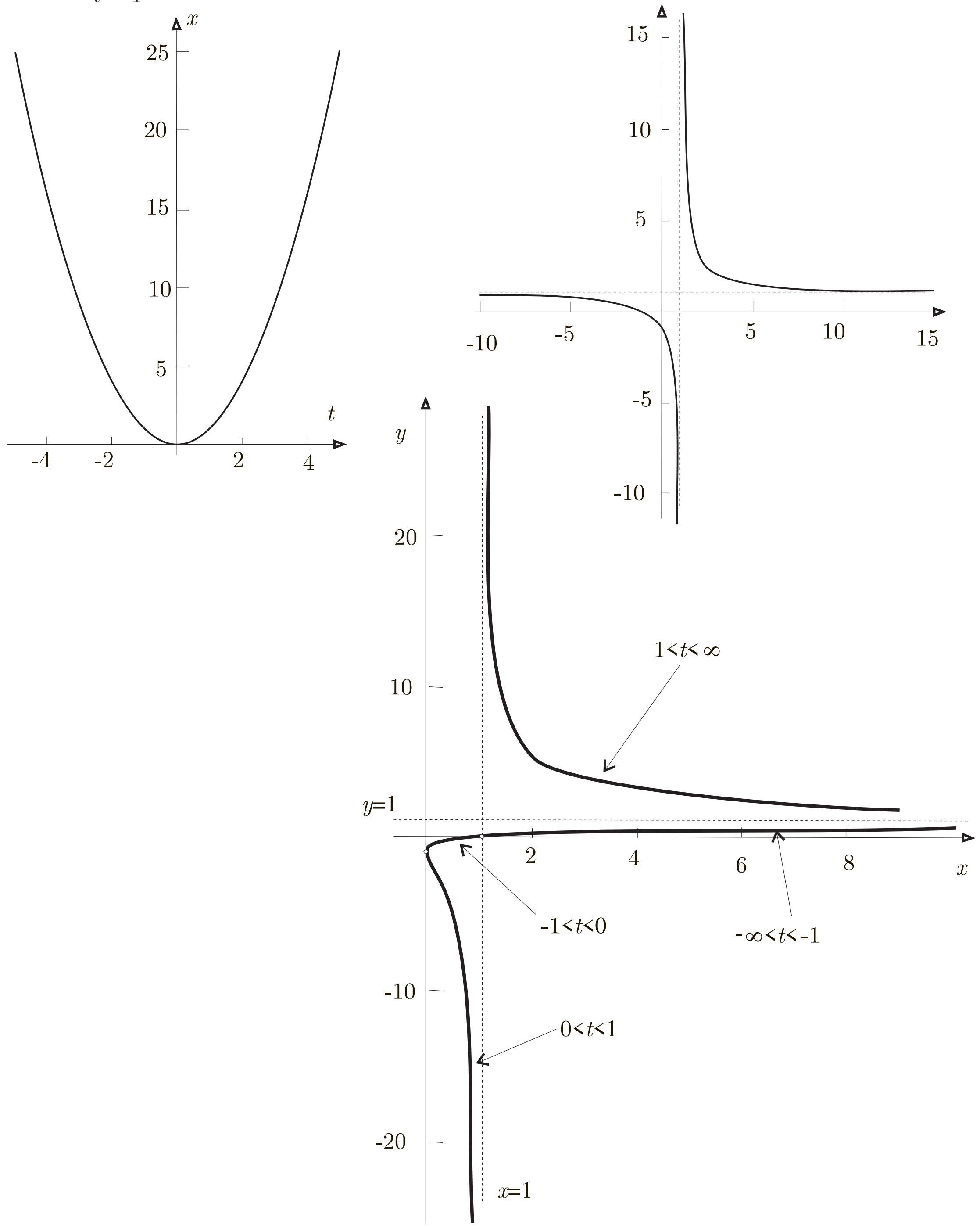
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 1, \qquad \boxed{y = 1} \quad \text{Asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{t\to 1} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to 1} y(t) = \infty, \qquad \boxed{x = 1} \quad \text{Asíntota vertical.}$$

Tangentes verticales: $x'(t) = 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad (0, -1)$

La curva $y = t^2$ es una parábola, vértice en $(0,0)$ y eje el de ordenadas.

La curva $y = \dfrac{t+1}{t-1}$ es una hipérbola de asíntotas $t = 1$ e $y = 1$.



$\boxdot$

49. Representar gráficamente la curva $x = t^2, y = t - \dfrac{t^3}{3}$.

SOLUCIÓN:

La curva es simétrica respecto al eje OX. En este podrían estar los puntos dobles:

$t^2 - t_0^2 = 0 \Rightarrow (t - t_0)(t + t_0) = 0 \Rightarrow s = 0.$

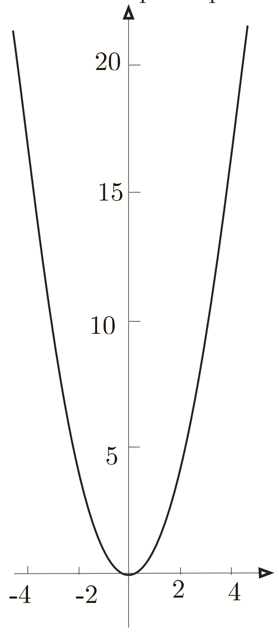
$3t - t^3 = 3t_0 - t_0^3 \Rightarrow (t - t_0)(3 - (t^2 + tt_0 + t_0^2)) = 0 \Rightarrow p - s + 3 = 0.$

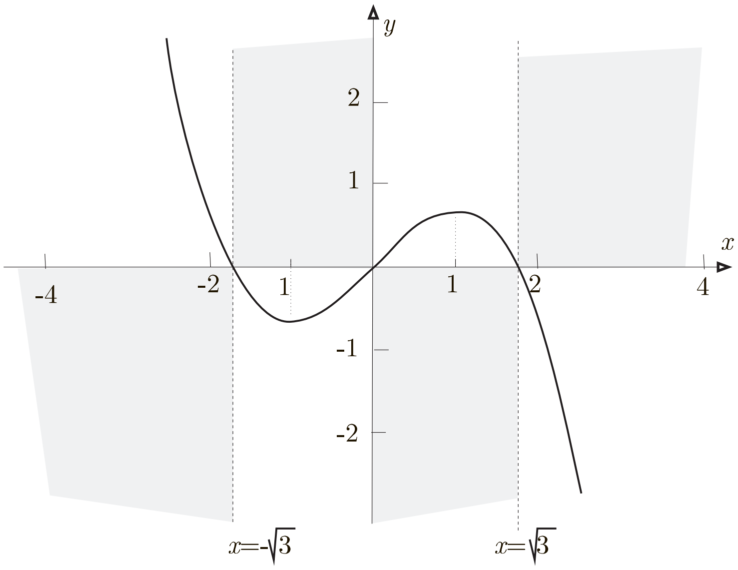
Luego $s = 0, p = -3$ y los puntos dobles correponden a los parámetros solución de la ecuación $t^2 - 3 = 0$, o sea $t = \pm\sqrt{3}$, en el punto $(3, 0)$.

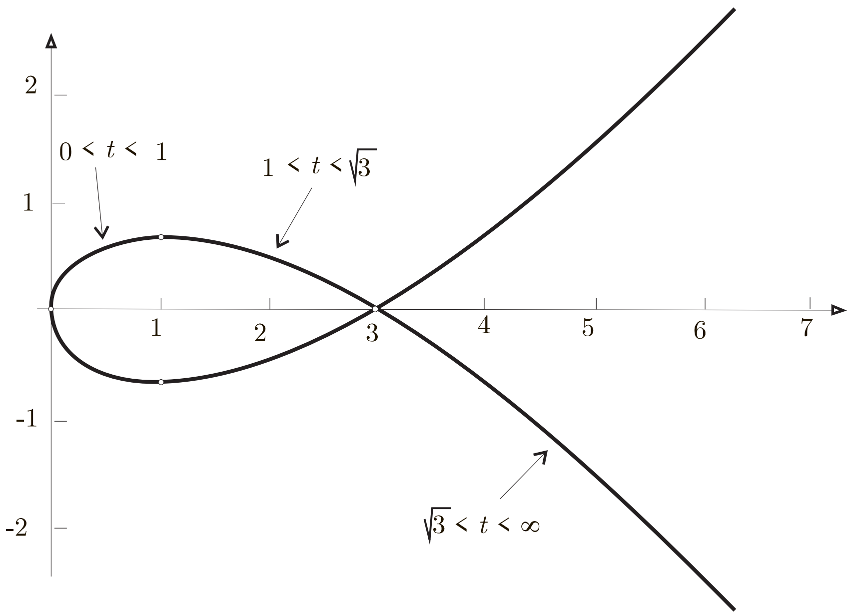
Tangentes horizontales: $dy/dt = 0, t^2 - 1 = 0, t = \pm 1, (1, \pm 2/3)$.

Tangentes verticales: $dx/dt = 0, t = 0, (0, 0)$.

Representando por separado la parábola y la cúbica:







⊡

50. Representar gráficamente la curva: $x = \dfrac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2} y = \dfrac{2t(t^2-1)}{(1+t^2)^2}$. En implícitas ver Ejercicio 23 .En polares ver Ejercicio 67 .

SOLUCIÓN:

Haciendo las gráficas por separado:

$$x = \frac{2(t^2-1)}{t^2+1)^2}$$

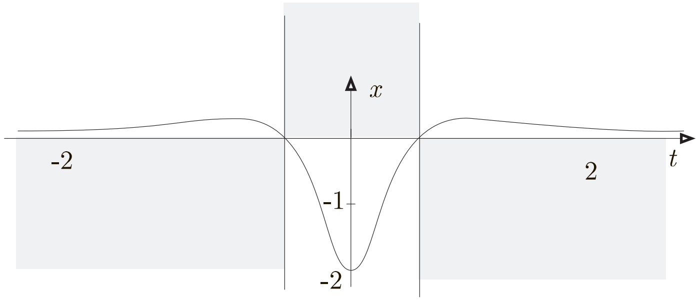
Simétrica respecto a OX.

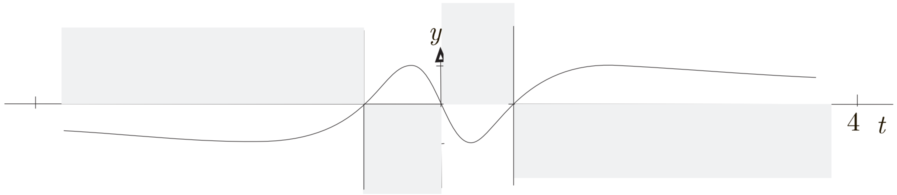
$$x'(t) = \frac{4t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}, x'(t) = 0 \text{ si } \ t = 0, t = \pm\sqrt{3}; \qquad x(0) = -2, \quad x(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{4}$$

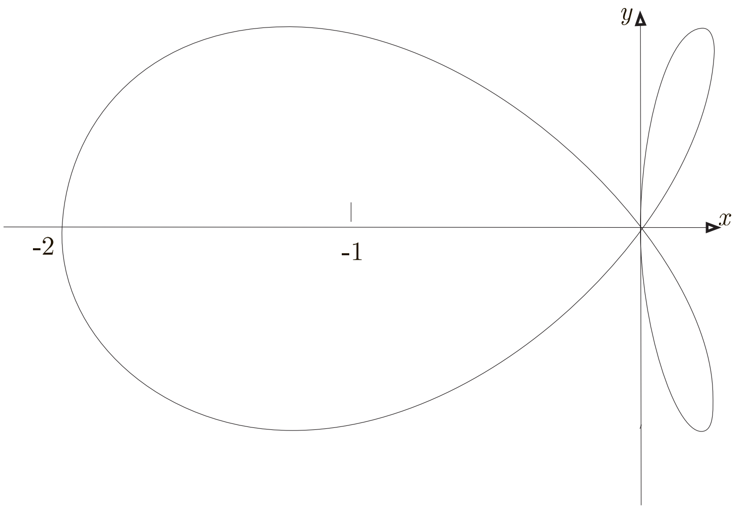
$$y = \frac{2t(t^2-1)}{t^2+1)^2}$$

Simétrica respecto al origen.

$$y'(t) = \frac{2(-1+6t-t^4)}{(1+t^2)^3}, y'(t) = 0 \text{ si } \; t = \pm 2.414, t = \pm 0.414; \qquad y(\pm 0.414) = \mp 0.5, \quad y(\pm 2.414) = \mp 0.5$$







$\boxdot$

51. Representar gráficamente la curva $x = \dfrac{t^2}{t^2-1}, y = \dfrac{t^3}{t^2-1}$.

SOLUCIÓN:

Simétrica respecto al eje OX: $\forall t, \exists t' = -t / x(t) = x(t'), y(t) = -t(t')$.

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{t^2-1}, \frac{t^3}{t^2-1}\right), \qquad \alpha'(t) = \left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}, \frac{t^2(-3+t^2)}{(t^2-1)^2}\right),$$

$$\alpha''(t) = \left(\frac{2(1+3t^2)}{(t^2-1)^3}, \frac{2t(3+t^2)}{(t^2-1)^3}\right), \qquad \alpha'''(t) = \left(\frac{-24t(1+t^2)}{(t^2-1)^4}, \frac{6(1+6t^2+t^4)}{(t^2-1)^4}\right).$$

$\alpha(0) = (0,0), \alpha'(0) = (0,0), \alpha''(0) = (-2,0), \alpha'''(0) = (0,-6)$. Con lo que el origen es un punto de retroceso de primera especie, primeras derivadas no nulas $p = 2$ y $q = 3$, y de vector tangente $\alpha''(0) = (-2,0)$,

Asíntotas:

$$t = \pm 1, \quad \lim_{t \to \pm 1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t \to \pm 1} y(t) = \infty.$$

$$t = 1, \quad m = \lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3/(t^2-1)}{t^2/(t^2-1)} = \lim_{t\to 1} t = 1.$$

$$b = \lim_{t\to 1}(y - mx) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^3}{t^2-1} - \frac{t^2}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to 1}\frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{2}.$$

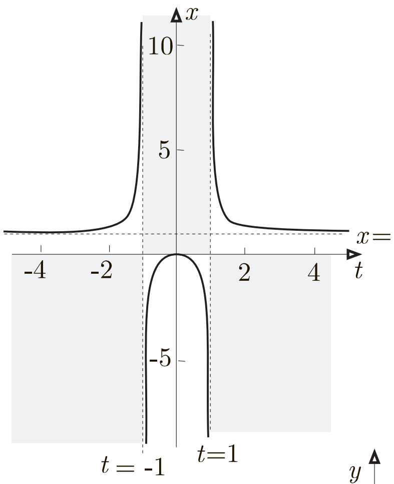
$$\boxed{y = x + \frac{1}{2}} \qquad \text{asíntota oblicua.}$$

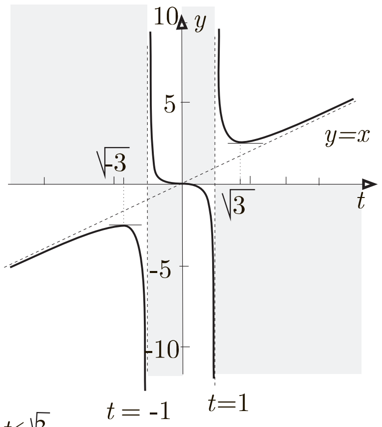
$$t = -1, \quad m = \lim_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to -1} \frac{t^3/(t^2-1)}{t^2/(t^2-1)} = \lim_{t\to -1} t = -1.$$

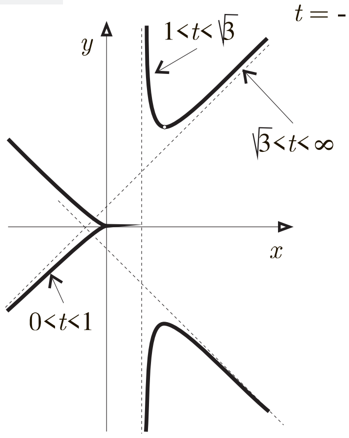
$$b = \lim_{t\to -1}(y - mx) = \lim_{t\to -1}\left(\frac{t^3}{t^2-1} + \frac{t^2}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to -1}\frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{y = -x - \frac{1}{2}} \qquad \text{asíntota oblicua.}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty, \qquad \boxed{x = 1} \quad \text{asíntota vertical.}$$







⊡

52. Representar gráficamente la curva $x = 2t + t^2, y = 2t - \dfrac{1}{t^2}$.

SOLUCIÓN:

Ramas infinitas:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} y(t) = \infty \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \text{asíntota vertical}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty \quad m = \lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \quad \text{dirección de una rama parabólica}$$

$$x - \frac{1}{4}y^2 = 2t + \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^4}, \qquad x - \frac{1}{4}y^2 - y = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4t^4} \quad \Rightarrow \boxed{x = y^2/4 + y} \quad \text{rama parabólica}$$

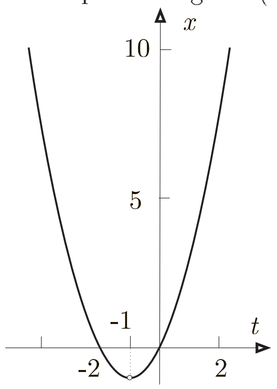
$\alpha(t) = (2t + t^2, 2t - 1/t^2)$, $\alpha'(t) = (2 + 2t, 2 + 2/t^3)$, $\alpha'(-1) = (0, 0)$, $\alpha''(-1) = (2, -6)$, éste es el vector tangente en el punto singular $\alpha(-1) = (-1, -3)$, y como $\alpha'''(-1) = (0, -24)$, se trata de un punto de retroceso de primera especie.

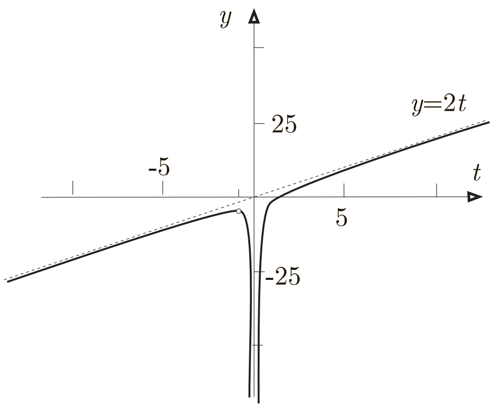
Puntos dobles:

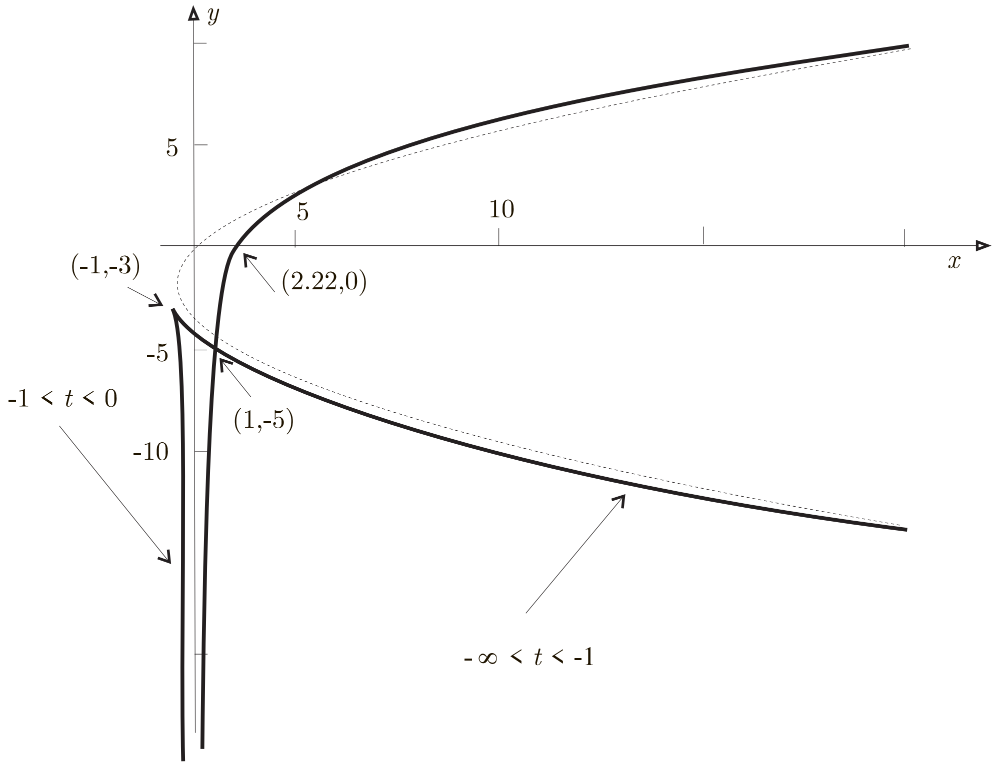
$$2t + t^2 = 2t_0 + t_0^2,\ \frac{2t^3 - 1}{t^2} = \frac{2t_0^3 - 1}{t_0^2} \Rightarrow (t - t_0)(2 + (t + t_0)) = 0,\ (t - t_0)(2t^2t_0^2 + (t + t_0)) = 0 \Rightarrow s = -2,\ 2p^2 + s = 0.$$

$$t^2 - st + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 + 2t \pm 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -1, \quad t = -1 + \sqrt{2} \simeq 0.41, \quad t = -1 - \sqrt{2} \simeq -2.41,$$

que corresponden al punto singular $(-1, -3)$ y al punto doble $(1, -5)$.







53. Representar gráficamente la curva $x = 5(3t^2 - 1), y = 5(3t - t^3)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Para todo t existe $t' = -t$, tal que $x(t) = x(t')$ e $y(t) = -y(t')$, por lo que la curva es simétrica respecto al eje OX.

Puntos dobles:

$5(3t_1^2 - 1) - 5(3t_2^2 - 1) = 10(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0$, de donde $s = 0$. $5(3t_1 - t_1^3) - 5(3t_2 - t_2^3) = 5(-t_1 + t_2)(-3 + t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)$, de donde $-3 + s^2 - p = 0$. Resulta entonces $s = 0$ y $p = -3$. La siluciones de $t^2 - 3 = 0$, o sea $t = \pm\sqrt{3}$, dan como punto doble el $(40, 0)$.

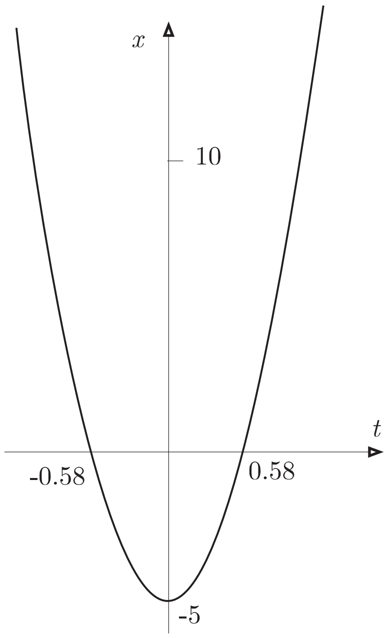
Tangentes horizontales: $15(1 - 2t^2) = 0$, $t = \pm 1$, en los puntos $(5, \pm 10)$.

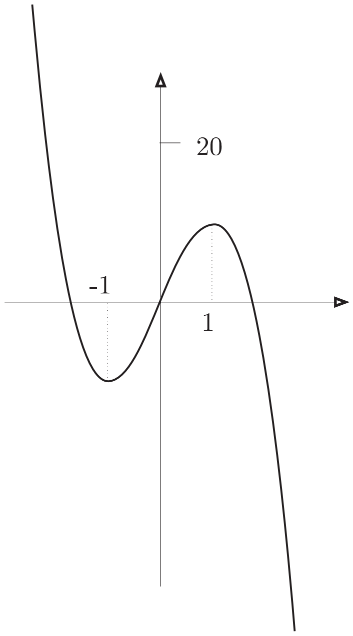
Tangentes verticales: $20t = 0$, $t = 0$, en el punto $(-5, 0)$.

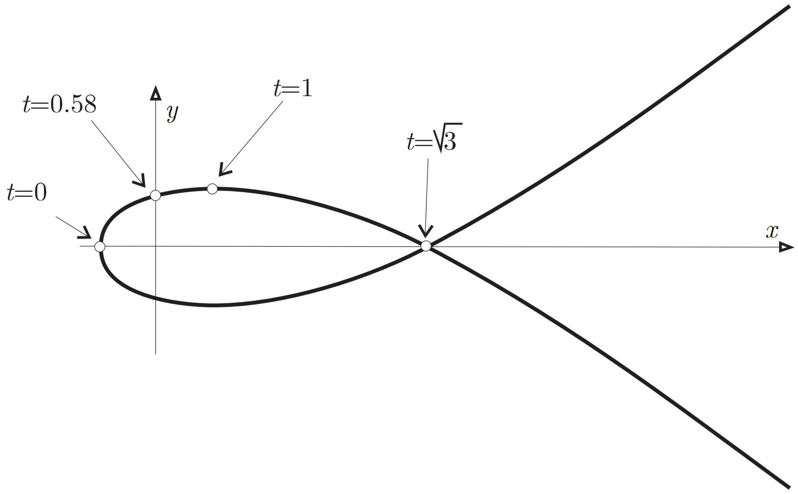
Gráficas de las componentes:

$x = 5(3t^2 - 1)$. Parábola, con mínimo en $(0, -5)$ y corte con el eje OT $(\pm\sqrt{3}/3, 0) \simeq (\pm 0.78, 0)$.

$y = 5(3t - t^3)$. Cortes con el eje OT en $(0, 0)$, $(\sqrt{1}, 0)$ y $(-\sqrt{1}, 0)$. Máximo en $(1, 10)$ y mínimo en $(-1, -10)$.







⊡

54. Representar gráficamente la curva $x = \dfrac{t^2 + 3t - 2}{t^2 - t + 2}$, $y = \dfrac{t - 1}{t^2 + t + 1}$.

SOLUCIÓN:

Puntos dobles:

Si existe un punto que corresponde a dos valores del parámetro t_1 y t_2, estos son solución de una ecuación de segundo grado $at^2 + 2bt + c = 0$, en la que $s = t_1 + t_2 = -2b/a$ y $p = t_1 t_2 = c/a$. Se tiene que verificar que $x(t_1) = x(t_2)$ e $y(t_1) = y(t_2)$, por lo que:

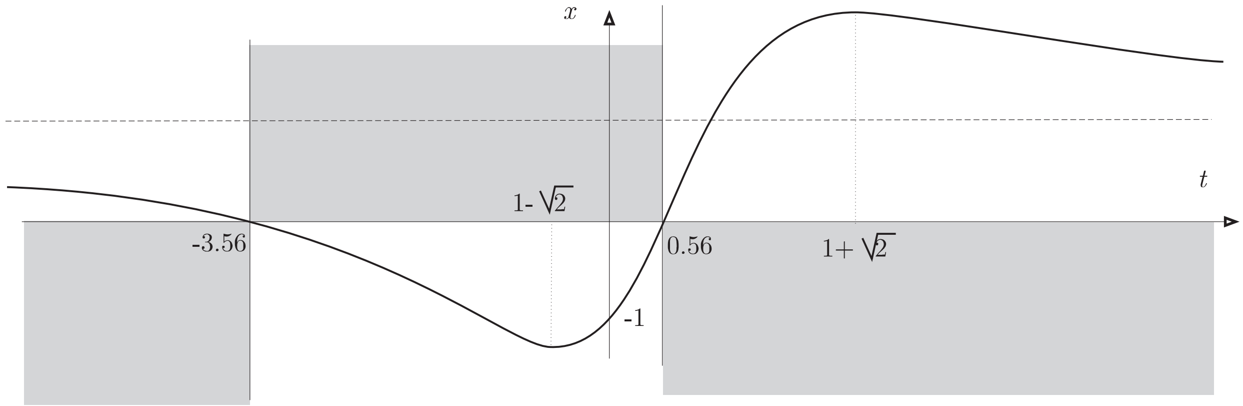
$$\frac{t_1^2 + 3t_1 - 2}{t_1^2 - t_1 + 2} = \frac{t_2^2 + 3t_2 - 2}{t_2^2 - t_2 + 2}$$

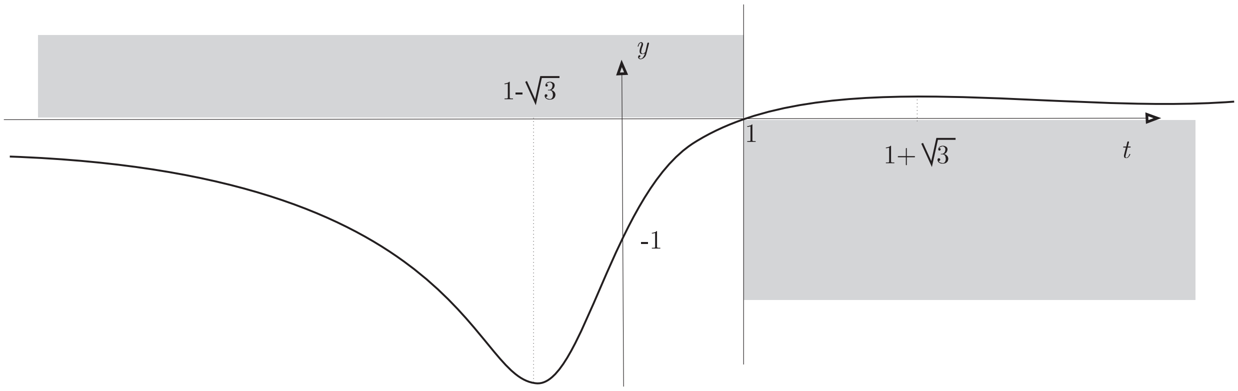
$$t_1^2 t_2^2 - t_1^2 t_2 + 2t_1^2 + 3t_1 t_2^2 - 3t_1 t_2 + 6t_1 - 2t_2^2 + 2t_2 - 4 = t_2^2 t_1^2 - t_2^2 t_1 + 2t_2^2 + 3t_2 t_1^2 - 3t_2 t_1 + 6t_2 - 2t_1^2 + 2t_1 - 4$$

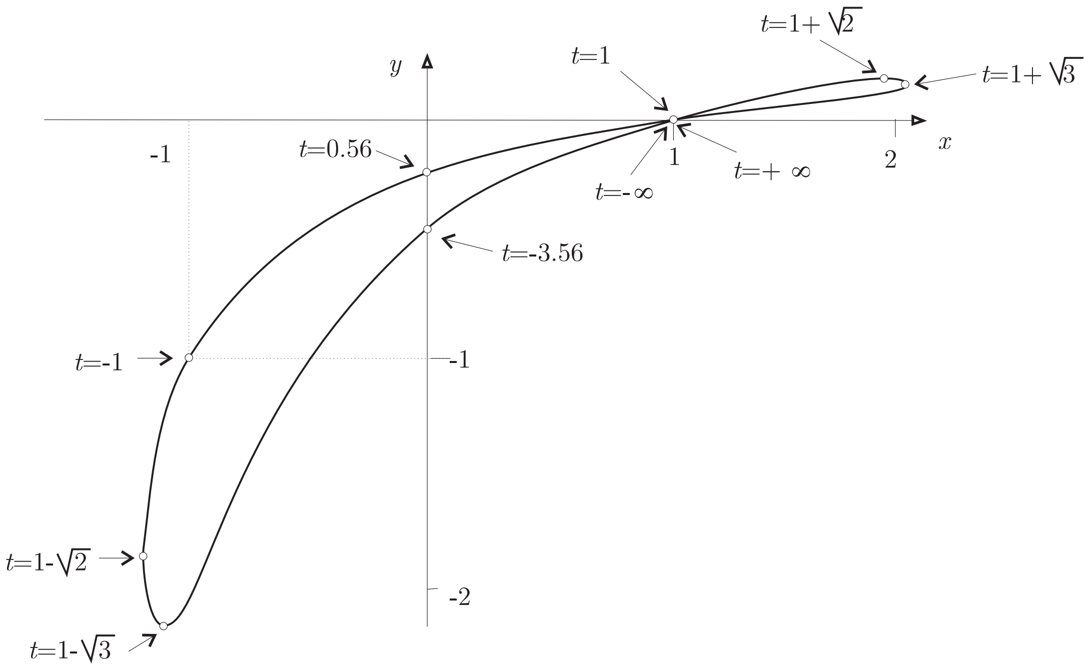
$$4(t_2 - t_1)(t_1 t_2 - (t_2 - t_1) - 1) = 0, \qquad \boxed{p - s - 1 = 0}$$

$$\frac{t_1-1}{t_1^2+t_1+1}=\frac{t_2-1}{t_2^2+t_2+1}$$

$$t_1t_2^2+t_1t_2+t_1-t_2^2-t_2-1=t_2t_1^2+t_2t_1+t_2-t_1^2-t_1-1, \quad (t_2-t_1)(t_1t_2-(t_2+t_1)-2)=0, \quad \boxed{p-s-2=0}$$







Resolviendo estas ecuaciones en p y s:

$$\frac{c}{a}+\frac{2b}{a}-1=0, \quad \frac{c}{a}+\frac{2b}{a}-2=0; \qquad -a+2b+c=0, \quad -2a+2b+c=0,$$

que admite como soluciones:

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-b}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}, \qquad a=0, \quad c=-2b,$$

con lo que los valores de t que dan puntos dobles, resultan de la ecuación $t-1=0$, que por carecer de término de segundo grado, presenta la raiz $t_1=\infty$, además de la $t_2=1$. Para estos valores del parámetro se obtiene el mismo punto, $(1,0)$.

Gráficas de las componentes:

$$x=\frac{t^2+3t-2}{t^2-t+2}$$

Corte con el eje OT: $((-3-\sqrt{17})/2,0)\simeq(-3.56,0)$ y $((3+\sqrt{17})/2,0)\simeq(0.56,0)$.
La derivada $x'=\dfrac{-4(t^2-2t-1)}{t^2-t+2)^2}$ se anula para los valores de $t=1-\sqrt{2}$, $(1-\sqrt{2},-1.19)$ y $t=1+\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{2},2.04)$.
Tiene una asíntota horizontal, $x=1$.

$$y=\frac{t-1}{t^2+t+1}$$

Corte con el eje OT: $(1,0))$.
La derivada $y'=\dfrac{-t^2+2t+2}{t^2+t+1)^2}$ se anula para los valores de $t=1-\sqrt{3}$, $(1-\sqrt{3},-2.15)$ y $t=1+\sqrt{3}$, $(1+\sqrt{3},0.15)$.
Tiene una asíntota horizontal, $y=0$.

$\boxdot$

55. Representar gráficamente la curva $x=\dfrac{t^2}{t-1}, y=\dfrac{t}{t^2-1}$

SOLUCIÓN:
Puntos dobles: $x(t_1)=x(t_2), y(t_1)=y(t_2)$.

$$\frac{t_1^2}{t_1-1}=\frac{t_2^2}{t_2-1}\Rightarrow t_1^2t_2-t_1^2=t_2^2t_1-t_2^2\Rightarrow t_1t_2=t_1+t_2\Rightarrow p=s.$$

$$\frac{t_1}{t_1^2-1}=\frac{t_2}{t_2^2-1}\Rightarrow t_1t_2^2-t_1=t_2t_1^2-t_2\Rightarrow t_1t_2=-1\Rightarrow p=-1.$$

Con lo que resulta $p=s=-1$. Se debe resolver la ecuación $t^2-st+p=0$, o sea, $t^2-t+1=0$; que da $t=(-1\pm\sqrt{5})/2$. Siendo, entonces $(-1,-1)$ un punto doble.
Asíntotas:

$$\lim_{t\to 1}x(t)=\infty,\quad \lim_{t\to 1}y(t)=\infty,\quad m=\lim_{t\to 1}\frac{t(t)}{x(t)}=\frac{1}{2},\quad b=\lim_{t\to 1}(y(t)-\frac{1}{2}x(t))=-\frac{3}{4},$$

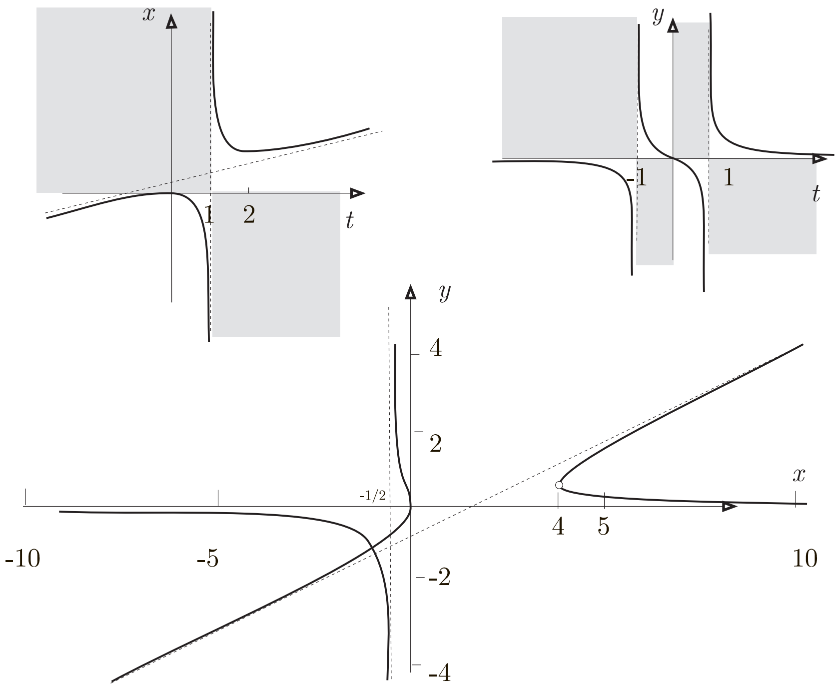
luego $\boxed{y=x/2-3/4}$ es una asíntota oblicua.

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\infty,\quad \lim_{t\to\infty}y(t)=0,\qquad \lim_{t\to -1}x(t)=-\frac{1}{2},\quad \lim_{t\to -1}y(t)=\infty,$$

se tienen, entonces, que $\boxed{y=0}$ es una asíntota horizontal y que $\boxed{x=-1/2}$ es una asíntota vertical.

Representación por separado:
• $x=t^2/(t-1)$.
Se trata de un hipérbola de asíntotas $t=1$ y $x=t+1$. Presentando tangentes horizontales $(2,4)$ y en $(0,0)$.
• $y=t/(t^2-1)$.
Tiene dos asíntotas verticales: $t=\pm 1$ y una horizontal: $y=0$. No tiene tangentes ni verticales ni horizontales.
La representación gráfica está extraida de Mathematica mediante:

```
ParametricPlot[{t^2/(t-1),t/(t^2-1)},{t,-10,10},
AspectRatio->Automatic]
```



⊡

56. Representar gráficamente $\rho = \dfrac{1-2\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

SOLUCIÓN:

La función ρ tiene periodo 2π. Estudiaremos la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$.

El denominador se anula en $3\pi/2$. La rama infinita correspondiente a un entorno de $3\pi/2$ no tiene asíntota, pues

$$\lim_{\theta\to 3\pi/2} \rho(\theta - 3\pi/2) = \lim_{\theta\to 3\pi/2} \frac{(1-2\cos\theta)(\theta-3\pi/2)}{1+\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta\to 3\pi/2} \frac{(2\operatorname{sen}\theta)(\theta-3\pi/2)+1-2\cos\theta}{\cos\theta} = \infty.$$

Para determinar la parábola asintótica cuando θ tiende a $3\pi/2$, pongamos $t = \operatorname{tag}(\theta/2)$, con lo que

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2},$$

y se obtiene la parametrización de la curva:

$$x = \frac{(1-t)(3t^2-1)}{(1+t^2)(t+1)}, \qquad y = \frac{2t(3t^2-1)}{(1+t^2)(t+1)^2}.$$

Se tienen las siguientes aproximaciones:

$$x = \frac{1}{t+1}\left(\frac{(1-t)(3t^2-1)}{1+t^2}_{|t=-1} + \left(\frac{(1-t)(3t^2-1)}{1+t^2}\right)'_{|t=-1}(t+1) + \cdots \right) \sim \frac{2}{t+1}$$

$$y = \frac{1}{(t+1)^2}\left(\frac{2t(3t^2-1)}{1+t^2}_{|t=-1} + \left(\frac{2t(3t^2-1)}{1+t^2}\right)'_{|t=-1}(t+1) + \cdots \right) \sim -\frac{2}{(t+1)^2}.$$

Consideramos

$$2y + x^2 = \frac{(2t^2-1)(3t^3-5t^2+7t-1)}{(1+t^2)(1+t)} \sim \frac{1}{t+1}\left(\frac{(2t^2-1)(3t^3-5t^2+7t-1)}{1+t^2}\right)_{|t=-1} = -\frac{8}{t+1},$$

luego, tomamos

$$2y + x^2 + 4x = \frac{(3t^2-1)(3-t^2)}{(1+t^2)^2} = 1 - \frac{8}{2!}(t+1)^2 + \cdot s$$

En conclusión, la parábola asintótica tiene por ecuación

$$y = -\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}.$$

Además

$$y + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} = -2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2,$$

con lo que la curva estará siempre en el interior de la parábola.

El numerador de $\rho(\theta)$ se anula en $\pi/3$ y $5\pi/3$. El origen es pues un punto doble.

Otros puntos dobles se obtienen cuando $\rho(\theta) = \rho(\theta + 2k\pi)$, que repiten por periodicidad. O bien cuando $\rho(\theta) = -\rho(\theta + (2k+1)\pi)$, esto es, cuando

$$\frac{1-2\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{1+2\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} \quad\Rightarrow\quad 2+4\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}2\theta = -1 \quad\Rightarrow\quad \theta = \frac{3\pi}{4}, \theta = \frac{7\pi}{4}.$$

Luego las coordenadas $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(-\sqrt{2}, 7\pi/4)$, dan el mismo punto de la curva (que en coordenadas cartesianas es el $(-1, 1)$).

Como

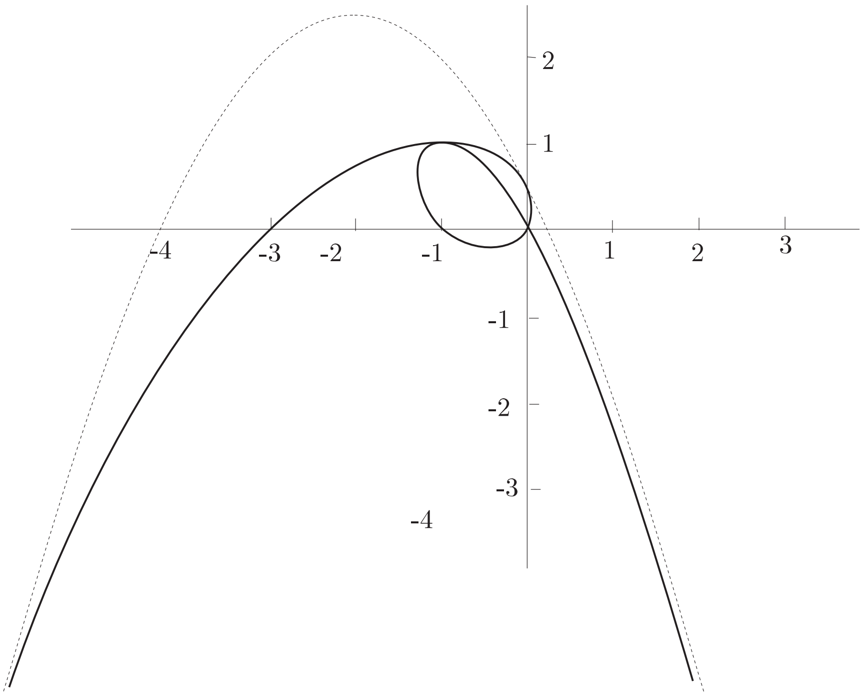
$$\rho' = \frac{2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 2}{(1+\operatorname{sen}\theta)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 2},$$

se tiene que en $3\pi/4$ y en $7\pi/4$, $\rho/\rho' = 1$, las tangentes a las dos ramas en el punto doble coinciden.

ρ' se anula si $2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 2 = 0$, que junto con la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta^2 = 1$, y poniendo $u = \operatorname{sen}\theta$, resulta la ecuación $5u^2 + 8u + 3 = 0$, que admite las soluciones $u = -3/5$ y $u = -1$, que corresponden a $\alpha = arcsen(-3/5) \simeq -36.86°$ y $3\pi/2$, respectivamente. En este último caso ρ' queda indeterminada.

Tenemos el siguiente cuadro de valores:

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	$5\pi/3$	α	2π
ρ'			$+$			$-$	0	$+$
ρ	-1	0	$1/2$	3	∞ | ∞	0	$-3/2$	∞
$\frac{\rho}{\rho'}$	-1	$-*-$	$1/2$	1		$-*-$	∞	-1



□

57. Representar gráficamente la curva $\rho = \operatorname{sen}^3(\theta/3)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Periodocidad: $T = 6\pi$.

Como $\rho(\theta + \frac{T}{2}) = \operatorname{sen}^3(\frac{\theta + 3\pi}{3}) = \operatorname{sen}^3(\frac{\theta}{3} + \pi) = -\operatorname{sen}^3(\frac{\theta}{3}) = -\rho(\theta)$, se obtiene un arco γ de curva correspondiente a los valores de θ en $[0, 3\pi]$, y el arco correspondiente al intervalo $[0, 6\pi]$ se obtiene por un giro de γ de centro en el polo O y ángulo $\pi + T/2 = 4\pi$. Con lo que se obtendría el mismo arco ya trazado.

Como $\rho(-\theta) = \operatorname{sen}^3(-\frac{\theta}{3}) = -\operatorname{sen}^3(\frac{\theta}{3}) = -\rho(\theta)$, la curva es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo. Con lo que se reduce el estudio de la curva al intervalo $[0, 3\pi/2]$.

$$\rho' = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}, \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tag}\frac{\theta}{3} = \operatorname{tag}\mu,$$

siendo μ el ángulo que forma el radio vector con la tangente a la curva.

Tenemos el siguiente cuadro de valores:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
ρ'	0	$+$		0
ρ	0 $\nearrow$	$1/8$ $\nearrow$	$3\sqrt{3}/8$ $\nearrow$	1
$\dfrac{\rho}{\rho'}$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	∞
μ	0°	30°	60°	90°

Puntos dobles:

El origen es punto múltiple si y sólo si la ecuación $\rho(\theta) = \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3} = 0$ posee al menos dos soluciones distintas. Esta ecuación se satisface para $\theta/3 = k\pi$, o sea para $\theta = 0, 3\pi, 6\pi, 9\pi, ...$, solo vale $\theta = 0$, para los demás valores se repite la misma curva.

Otros puntos dobles se obtienen para $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$,

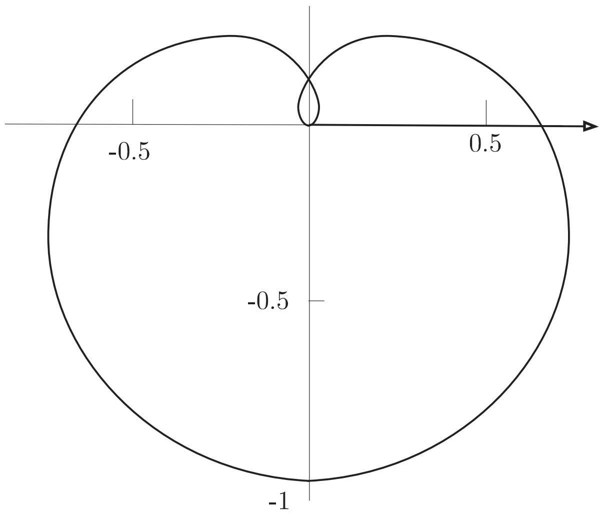
$$\rho(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}^3 \left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\theta}{3}\right)^3, \qquad \rho(\theta) = \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}.$$

De las ecuaciones

$$-\frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\theta}{3} = 0, \qquad \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{3} = 1,$$

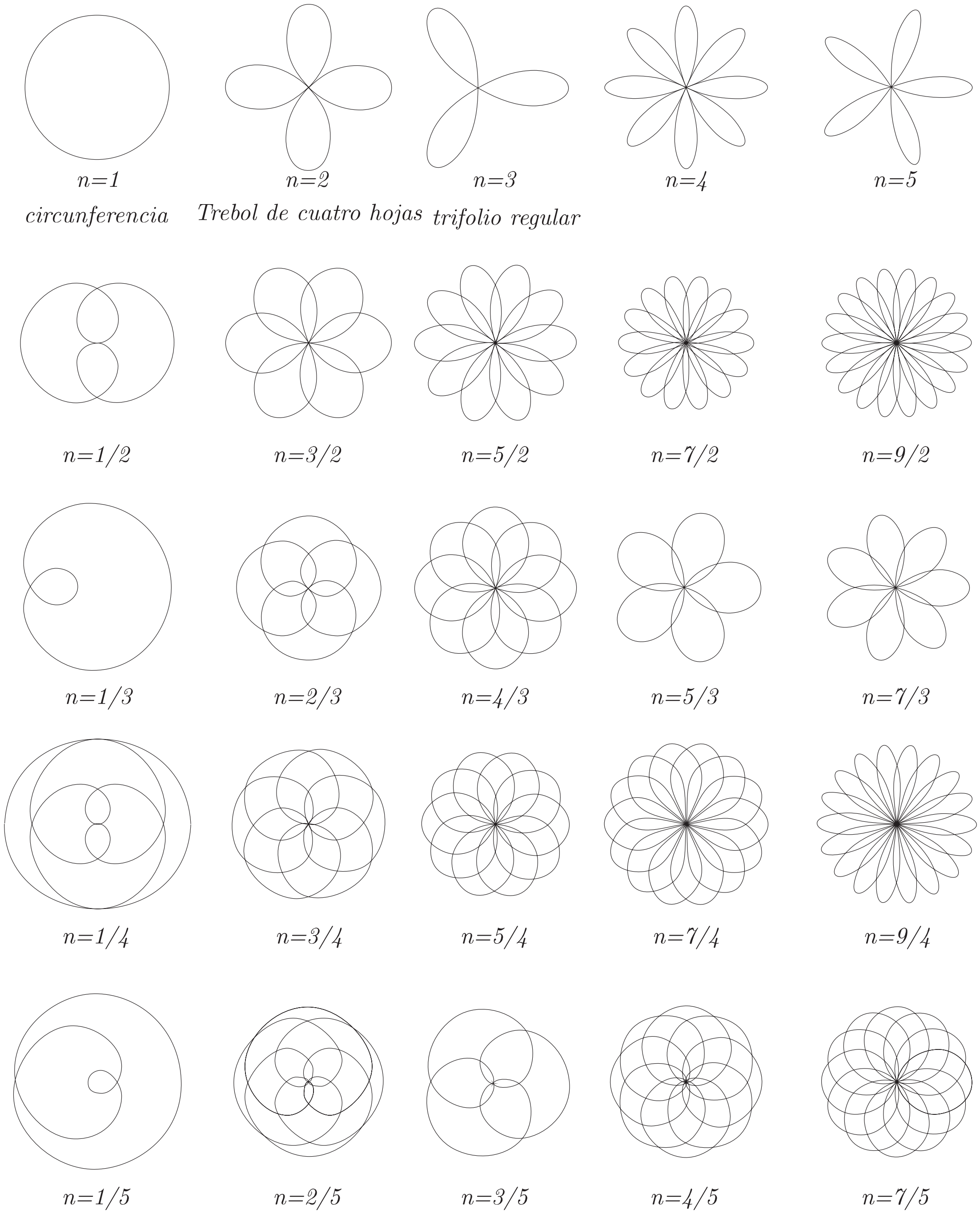
resulta $\operatorname{sen} \theta/3 = 1/2$ y $\cos \theta/3 = \sqrt{3}2$ y también $\operatorname{sen} \theta/3 = -1/2$ y $\cos \theta/3 = -\sqrt{3}/2$. La primera corresponde a $\theta = \pi/2$ y la segunda a $\theta = 7\pi/2$ que queda fuera del intervalo $[0, 3\pi]$, donde la curva se repite.

Obsérvese que por ser la recta perpendicular al eje polar por el polo, un eje de simetría, posibles puntos dobles van a quedar en este eje.



$\boxdot$

58. Representar gráficamente la curva $\rho = a\cos n\theta$.



□

---

59. Representar gráficamente la curva $\rho^2 = \operatorname{sen} 4\theta$. (Ver Ejercicio 12)

<u>SOLUCIÓN</u>:

Representemos primero $\rho = f(\theta) = \operatorname{sen} 4\theta$ y, luego, para aquellos ángulos en lo que ρ es negativo no existe curva.

Periodicidad: $T = \pi/2$, con lo que basta representarla en el intervalo $[0, \pi/2]$ y luego, como $T = 2k\pi/n$ para $k = 1$ y $n = 4$, se obtiene toda la curva haciendo $4 - 1 = 3$ giros de centro en el polo y de amplitud $\pi/2$. Como además $f(\theta + T/2) = f(\theta + \pi/4) = -f(\theta)$, basta representar el arco de curva en el intervalo $[0, \pi/4]$ y luego hacer un giro de centro el polo y amplitud $\pi + \pi/4$. Al arco así obtenido, le aplicamos lo dicho en el párrafo anterior, para obtener toda la curva.

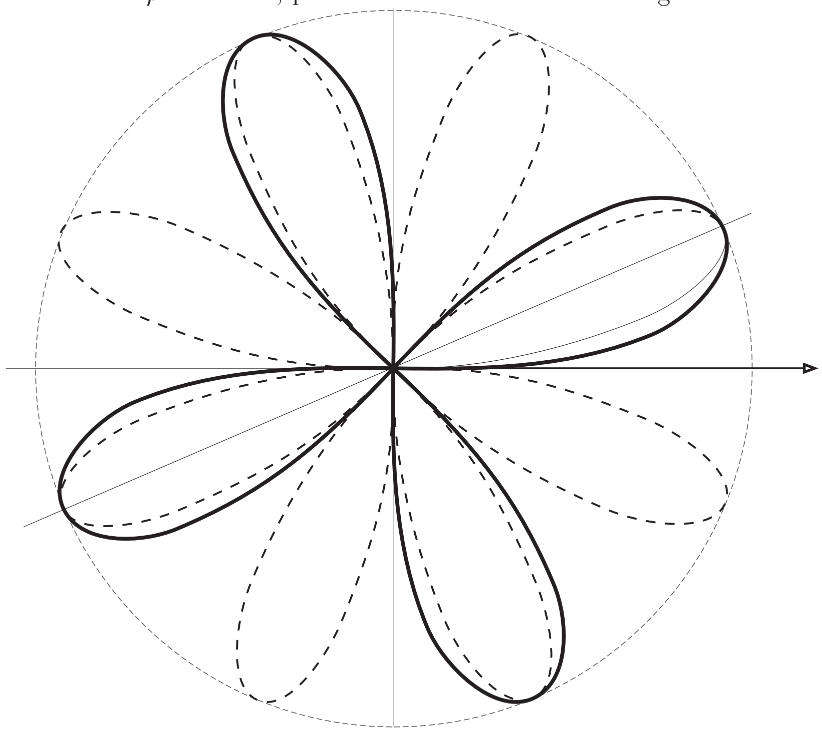
Se tiene que la recta $\theta = \pi/8$ es un eje de simetría, pues $\operatorname{sen} 4(2\,\pi/8 - \theta) = \operatorname{sen} 4\theta$.

Luego sólo hay que estudiar el arco de curva correspondiente al intervalo $[0, \pi/8]$. Hacer la simetría respecto a la recta $\theta = \pi/8$ y terminar la construcción como se ha descrito antes.

$f'(\theta) = 4\cos 4\theta$, que se anula en $\theta = \pi/8$ (la tangente es perpendicular al radio vector), es positiva de 0 a $\pi/8$, con lo que ρ es creciente en este intervalo.

$f(\theta) = 0$ en $\theta = 0$, la tangente en el origen tienen pues la dirección de este ángulo. Además $\rho(\pi/8) = 1$.

La representación de la curva $\rho^2 = \operatorname{sen} 4\theta$, pedida es la del trazo continuo grueso de la siguiente figura.



$\boxdot$

60. Representar gráficamente la curva $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Periodicidad: $T = 2\pi$, basta estudiarla en $[0, 2\pi]$.

Simetrías: $\rho(2k\pi - \theta) = a(1 + \cos(2k\pi - \theta)) = a(1 + \cos\theta) = \rho(\theta)$, simétrica respecto al eje polar; basta estudiarla en $[0, \pi]$.

$\rho' = -a \operatorname{sen}\theta < 0$ en $[0, \pi]$, luego ρ decrece.

Tangentes horizontales: $\rho\cos\theta + \rho' \operatorname{sen}\theta = 0$

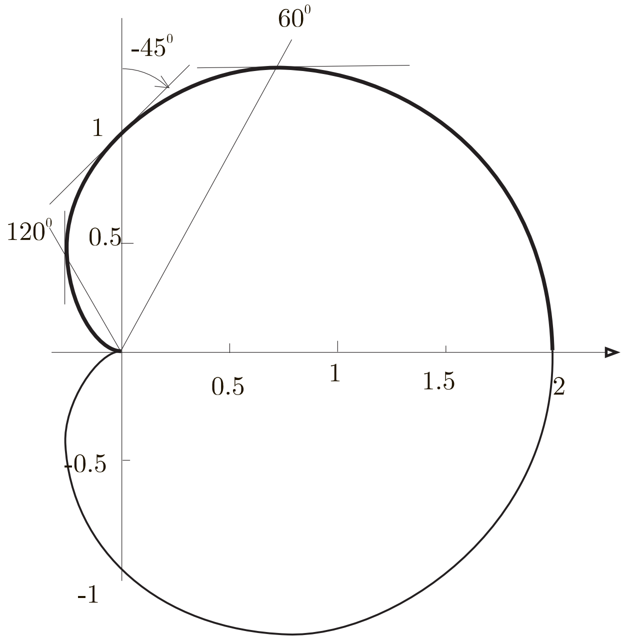
$$(1 + \cos\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta = 0, \qquad 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2},\ -1, \qquad \theta = 60^\circ, \theta = 180^\circ.$$

Tangentes verticales: $-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta = 0$.

$$-(1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0, \qquad -\operatorname{sen}\theta(1 + 2\cos\theta) = 0, \qquad \operatorname{sen}\theta = 0, \cos\theta = -\frac{1}{2} \qquad \theta = 0, \theta = 120^\circ.$$

Cuadro de valores:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
ρ	$2a$ ↘	$\dfrac{a(2+\sqrt{2})}{2}$ ↘	a ↘	$0.3a$ ↘	0
ρ'	0	$-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$-a$		0
ρ/ρ'	∞		-1		



61. Representar gráficamente la curva $\rho = 5\theta/\pi$.

    SOLUCIÓN:

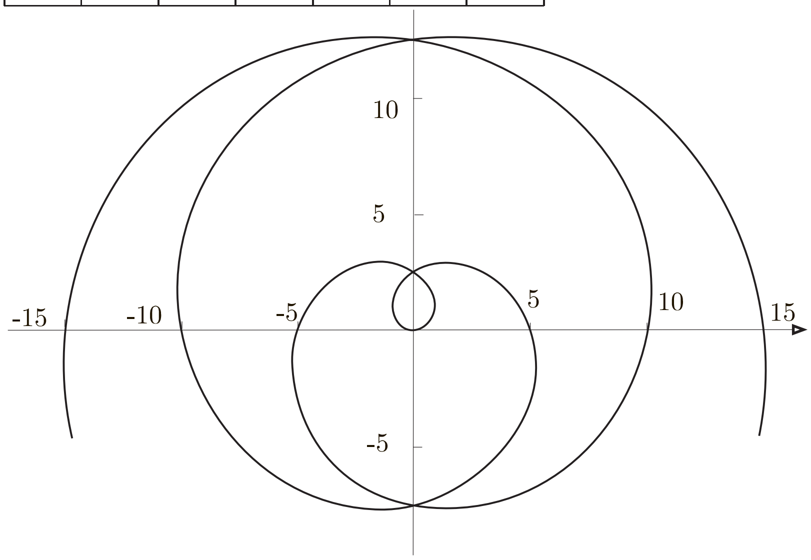
    Simétrica respecto a la perpendicular al eje polar: $\rho(\theta) = -\rho(-\theta)$.

    $\rho' = 5/\pi > 0$, luego ρ es siempre creciente.

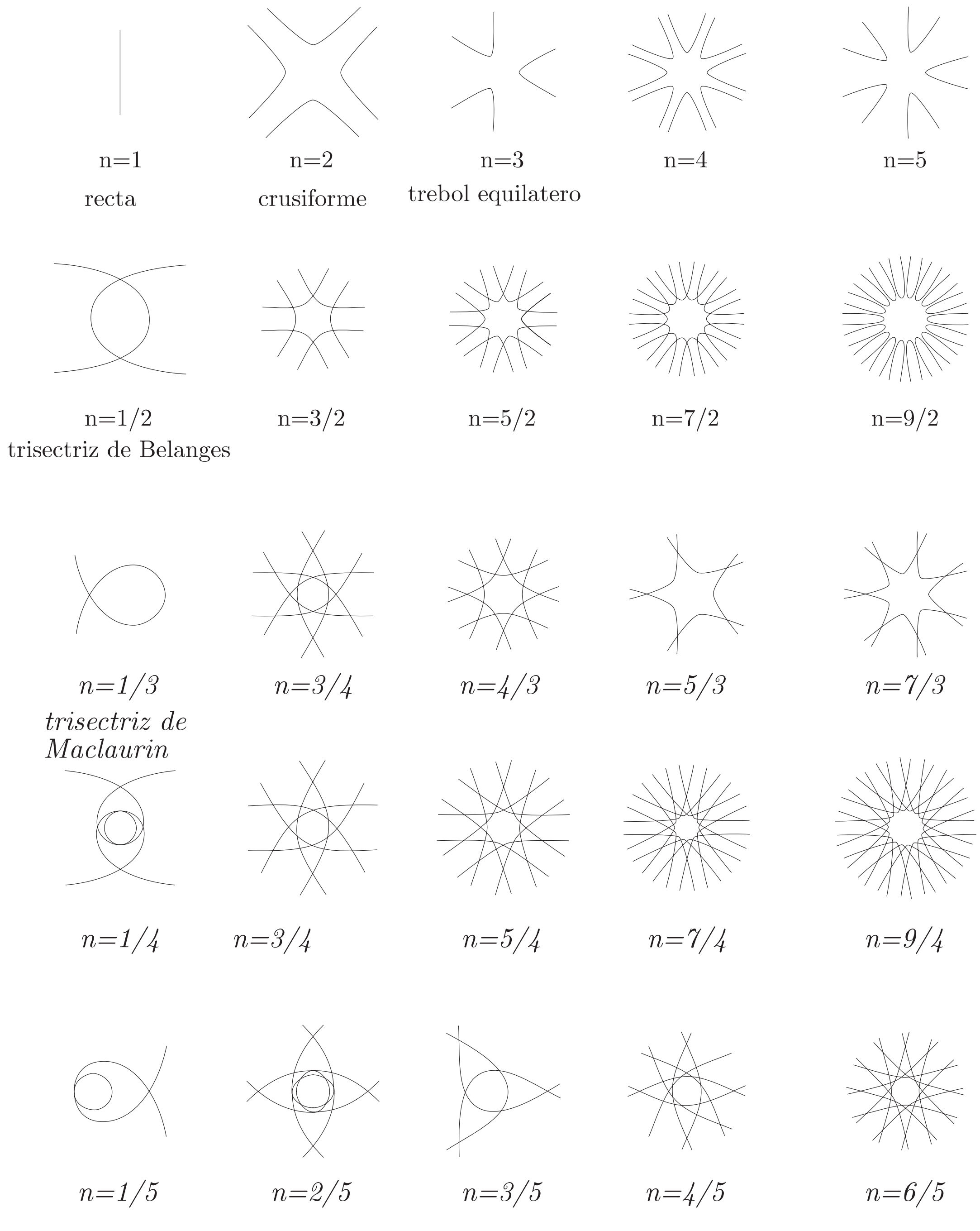
    Ramas espirales: $\lim_{\theta \to \infty} \rho(\theta) = \infty$.

    Cuadro de valores:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	0	$\nearrow 5/4$	$\nearrow 5/2$	$\nearrow 5$	$\nearrow 15/2$	$\nearrow 10$



62. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{a}{\cos n\theta}$. (Ver Ejercicio 79)



⊡

63. Representar gráficamente la curva $\theta = \dfrac{1}{\rho^2 - 5\rho + 6}$.

SOLUCIÓN:

Asíntotas: $F_n(\theta) = \theta = 0$, asíntota en la dirección $\theta_0 = 0$. Distancia al polo $d = -\dfrac{F_{n-1}(\theta_0)}{F'_n(\theta_0)} = \dfrac{5\theta_0}{1} = 0$. El eje polar es una asíntota.

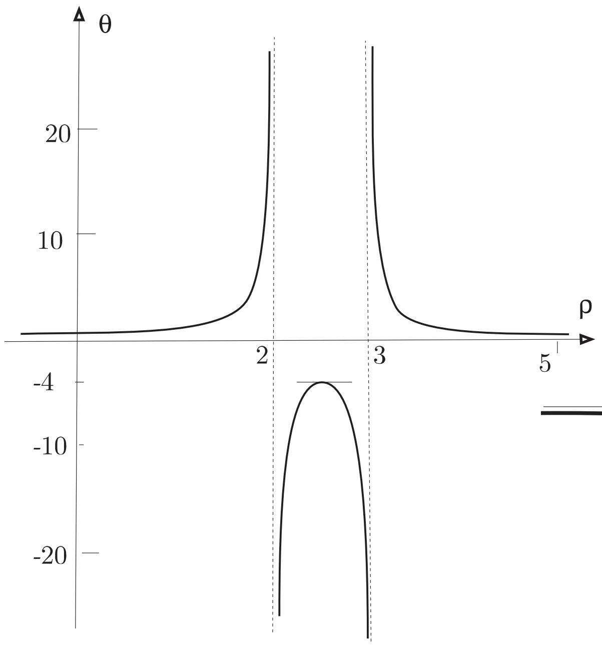
Círculos asintóticos: Cuando $\theta \to \infty$, ρ tiende a 3 y a 2.

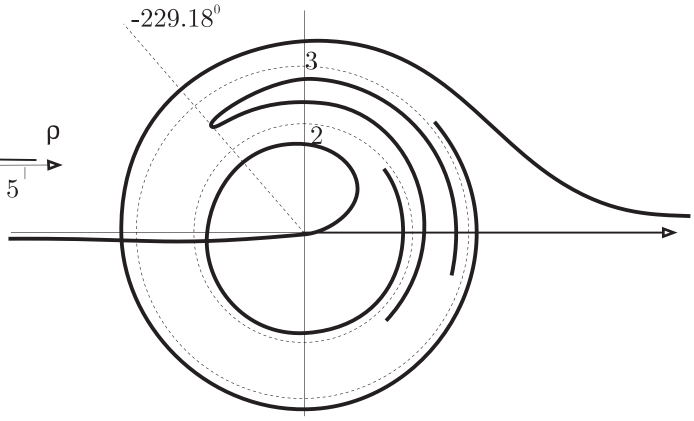
Diagrama cartesiano: $\theta = 1/(\rho - 2)(\rho - 3)$.

Asintotas: $\rho = 2$, $\rho = 3$ y $\theta = 0$. Tangente horizontal en $(2.5, -4)$.

Cuadro de valores:

ρ	$-\infty$	0	2	2.5	3	$+\infty$
θ'	0	-0.13	$+\infty$	0	$+\infty$	0
θ	0	0.16	$-\infty \vert +\infty$	-4	$-\infty \vert +\infty$	0
	0°	9.54°		-229.18°		0°





□

64. Representar gráficamente la curva $\rho = 1 + \cos 3\theta$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

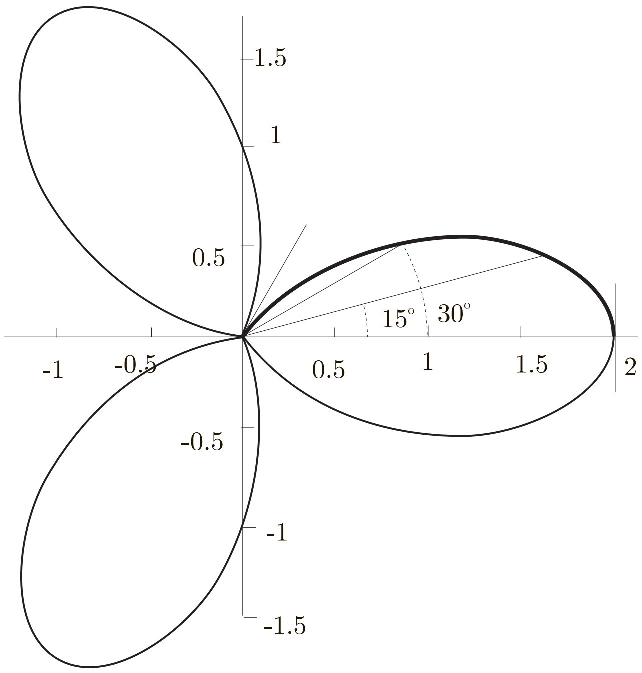
Periodicidad: $T = \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\pi}{3}$, por lo que basta estudiar la curva en un intervalo de longitud $2\pi/3$ y luego hacer dos giros de centro en el polo y amplitud $2\pi/3$.

Como $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$, la curva es simétrica respecto al eje polar; por lo que el estudio en el intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$ se reduce al intervalo $[0, \pi/3]$. Lego con una simetria respecto al eje polar y los giros anteriores obtenemos la curva completa.

Al se $\rho'[\theta) = -3 \operatorname{sen} 3\theta$, ρ siempre es decreciente en $[0, \pi/3]$.

Cuadro de valores (μ es el ángulo que forma el radio vector con la tangente):

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
ρ	2	$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1	$1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0
ρ'	0	$-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	-3	$-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	0
$\operatorname{tag}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$	∞	$-\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$	$-1/3$	$\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$	
μ	90°	-38.8°	-18.4°	-7.8°	60°



□

65. Representar gráficamente la curva $\rho^2 = \cos 2\theta$.

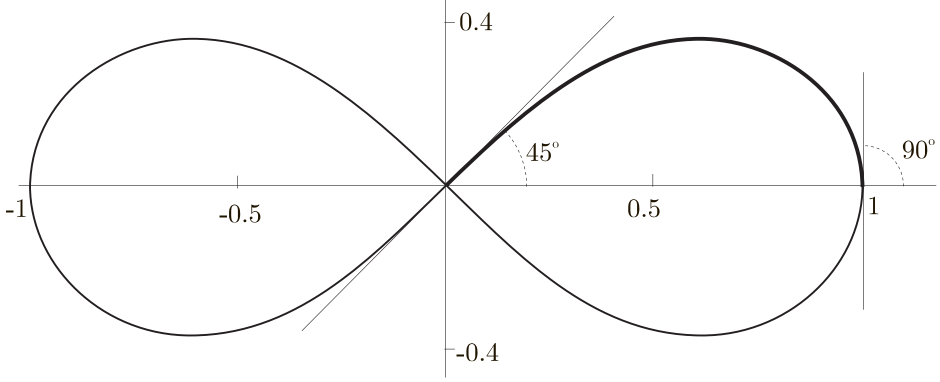
SOLUCIÓN:

Periodicidad: $T = \pi = \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\pi}{2}$. Se estudia una trozo de curva en un intervalo de amplitud π y se obtiene el resto girando un ángulo π al rededos del polo.

La curva es simétrica respecto al eje polar: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ y respecto ala perpendicular al eje polar: $\rho(\theta) = -\rho(-\theta)$. Luego el intervalo de estudio $[-\pi/2, \pi/2]$ se reduce a $[0, \pi/4]$.

$\rho' = -\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, por lo que ρ decrece en el intervalo $[0, \pi/4]$.

El ángulo de la tangente con el radio vector en $\theta = 0$ es de $90°$, y en $\theta = \pi/4$ es $\pi/4$.



□

66. Representar gráficamente la curva $\rho = \cos\theta - \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN:

Periodicidad: $T = 2\pi$. Simétrica respecto al eje polar: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$. Intervalo de estudio $[0, \pi]$.

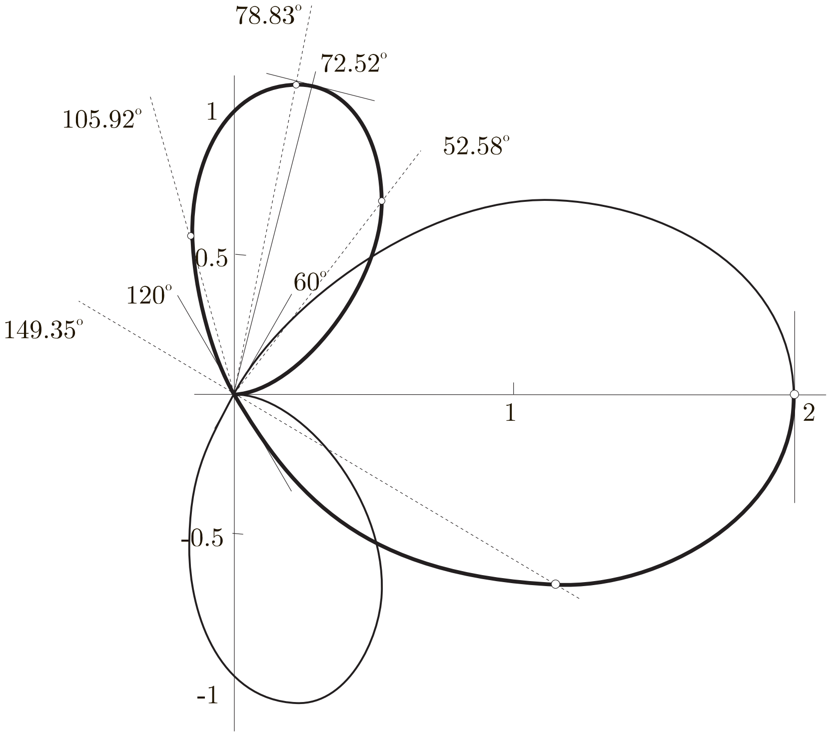
La curva pasa por el polo para $\rho(\theta) = \cos\theta - \cos 2\theta = 0$, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, resulta $\cos\theta = 1, -1/2$, o sea $\theta = 0, 120°$.

Valores de θ en que la tangente es perpendicular al radio vector: $\rho'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen} 2\theta = 0$, o sea las soluciones de $-\operatorname{sen}\theta(1 - 4\cos\theta) = 0$, resulta $\operatorname{sen}\theta = 0$ o $\cos\theta = 1/4$, que corresponde a $\theta = 0°$, $180°$ y $75.52°$.

Tangentes horizontales: $\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta = 0$, y desarrollado $-\operatorname{sen}^2\theta + 5\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta - \cos^3\theta = 0$, o bien $6\cos^3 - 2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 1 = 0$, que tiene como soluciones $\cos\theta = -0.86, 0.19, 1$, que corresponden respectivamente a los ángulos $\theta = 149.35°, 78.83°, 0°$.

Tangentes verticales: $\rho' \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta = 0$, que al desarrollar queda $\operatorname{sen}\theta(-2\cos\theta + 5\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$, o sea $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $6\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$, que tienen como solución, $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = (1+\sqrt{7})/2, (1-\sqrt{7})/2$, que corresponden respectivamente a los ángulos $\theta = 0°, 52.58°, 105.92°$.

Debemos descartar el ángulo $\theta = 0°$ donde la derivada dy/dx no está definida. No obstante, la tangente en el polo es $\theta = 0°$, donde presenta un punto de retroceso.



⊡

67. Representar gráficamente la curva $\rho = -2\cos\theta + 4\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$.

En implíticas ver Ejercicio 23 .En paramétricas Ejercicio 50 .

<u>SOLUCIÓN</u>:

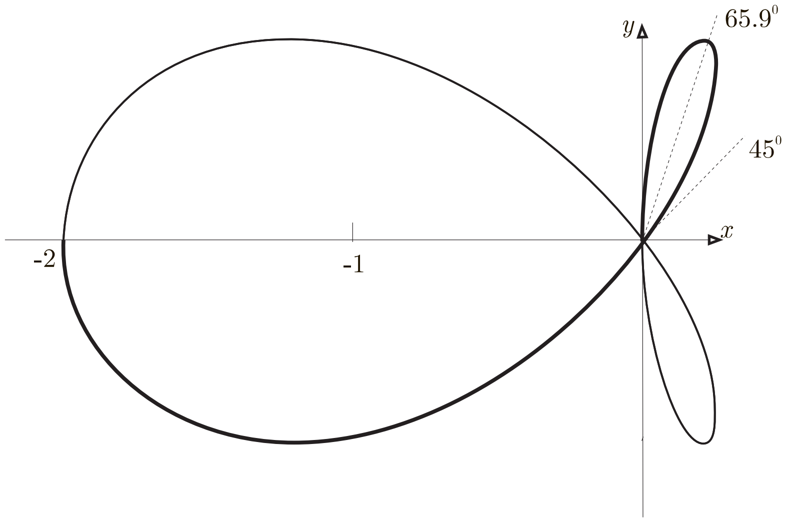
Periodicidad $T = 2\pi$, como $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, basta estudiar la curva en un intervalo de longitd π y luego hacer un giro de centro el polo y amplitud $\pi + T/2 = 2\pi$; obteniéndose, en este caso, el mismo arco de curva.

La curva es simétrica respecto al eje polar: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$; con lo que el intervalo de estudio se reduce $[0, \pi/2]$.

$$\rho' = -2\operatorname{sen}\theta + 8\cos\theta - \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta = 2\operatorname{sen}\theta(5 - 6\operatorname{sen}^2\theta).$$

Cuadro de valores: $\rho = 0$ en $\theta = 45°$ y $\theta = 90°$; $\rho' = 0$ en $\theta = 65.9°$. μ ángulo con el radio vector: $\operatorname{tag}\mu = \rho/\rho'$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$65.9°$	$\pi/2$
ρ	-2 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	0 ↗	0.54 ↘	0
ρ'	0	$\frac{7}{2}$		0	
μ	$90°$	$74.05°$	$45°$	$90°$	$90°$



68. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

SOLUCIÓN:

Periodo $T = 12\pi$. Como además se verifica que $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, se reduce el estudio a $[0, 6\pi]$ y al arco obtenido se le aplica un giro de centro el polo y amplitud $\pi + T/2 = 7\pi \sim \pi$.

Simétrica respecto al eje polar, $\rho(\theta) = -\rho(-\theta)$, con lo que se reduce el estudio al intervalo $[0, 3\pi]$. Haciendo luego la simetría y después el giro dicho.

La curva también es simétrica respecto al la perpendicular al eje polar por el polo, con lo que bastaría estudiarla en el intervalo $[\pi/2, \pi/2 + 3\pi]$, pero ya este intervalo de estudio está cubierto en las dos reducciones anteriores.

Utilizando MATHEMATICA, construimos la siguiente tabla de valores,

```
r[t_]:=Cos[t/3]^2/Sin[t/2]
Table[r[i],{i,0,10,Pi/4}]  Table[r'[i],{i,0,10,Pi/4}]
```

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$(3\pi)/4$	π	$(5\pi)/4$	$(3\pi)/2$	$(7\pi)/4$	2π	$(9\pi)/4$	$(5\pi)/2$	$(11\pi)/4$	3π
ρ'	$-$	-3.38	-0.94	-0.47	-0.29	-0.16	0	0.64	$-$	0.715	0.12	0.03	0
ρ	∞	2.44	1.06	0.54	0.25	0.07	0	0.17	∞	-1.31	-1.06	-1.01	-1

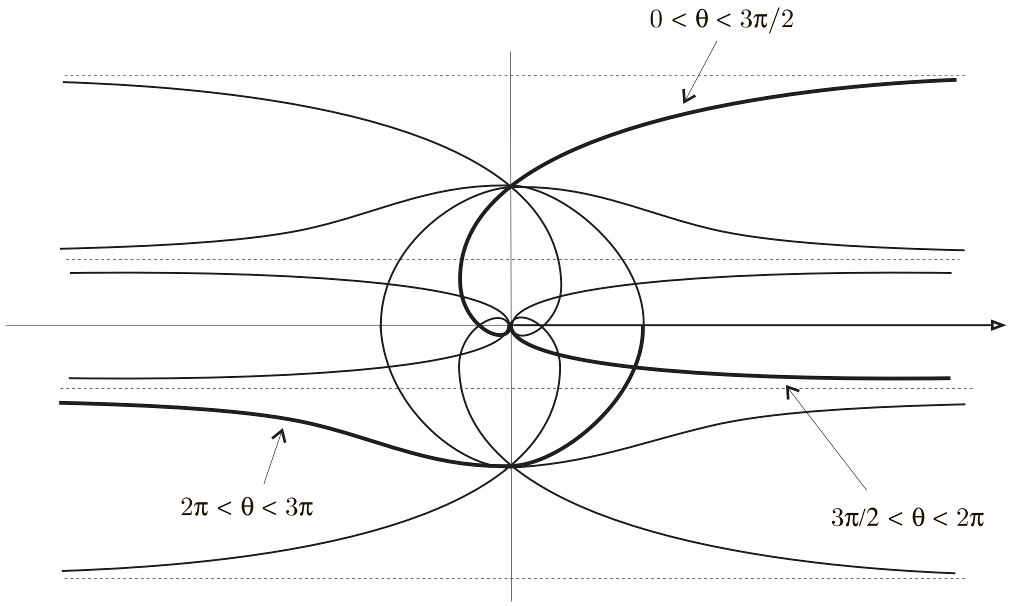
$\rho(\theta)$ es decreciente en $[0, 3\pi/2]$ y creciente en $[3\pi/2, 3\pi]$.

Asíntotas:

$$\lim_{\theta\to 0} \rho(\theta) = \infty, \qquad d = \lim_{\theta\to 0} \rho(\theta)(\theta - 0) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}{\dfrac{\theta}{2}}\theta = 2,$$

$$\lim_{\theta\to 2\pi} \rho(\theta) = \infty, \quad d = \lim_{\theta\to 2\pi} \rho(\theta)(\theta - 2\pi) = \lim_{\theta\to 2\pi} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}{\dfrac{\theta}{2}}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \lim_{\theta\to 2\pi} \frac{-\dfrac{2}{3}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{3}\right)(\theta - \dfrac{\pi}{2}) - \cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}{\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

por lo que las rectas $y = 2$ e $y = 1/2$, son asíntotas, y por simetrias también lo son las rectas $y = -2$ e $y = -1/2$.



$\square$

69. Representar gráficamente la curva $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Periodicidad: $T = 2\pi$, basta estudiarla en $[0, 2\pi]$.

Simetrías: $\rho((2k+1)\pi - \theta) = 1 + \operatorname{sen}((2k+1)\pi - \theta)) = 1 + \operatorname{sen}\theta = \rho(\theta)$, simétrica respecto a la perpendicular al eje polar; basta estudiarla en $[-\pi/2, \pi/2]$.

$\rho' = \cos\theta > 0$ en $[\pi/2, \pi/2]$, luego ρ crece.

Tangentes horizontales y verticales:

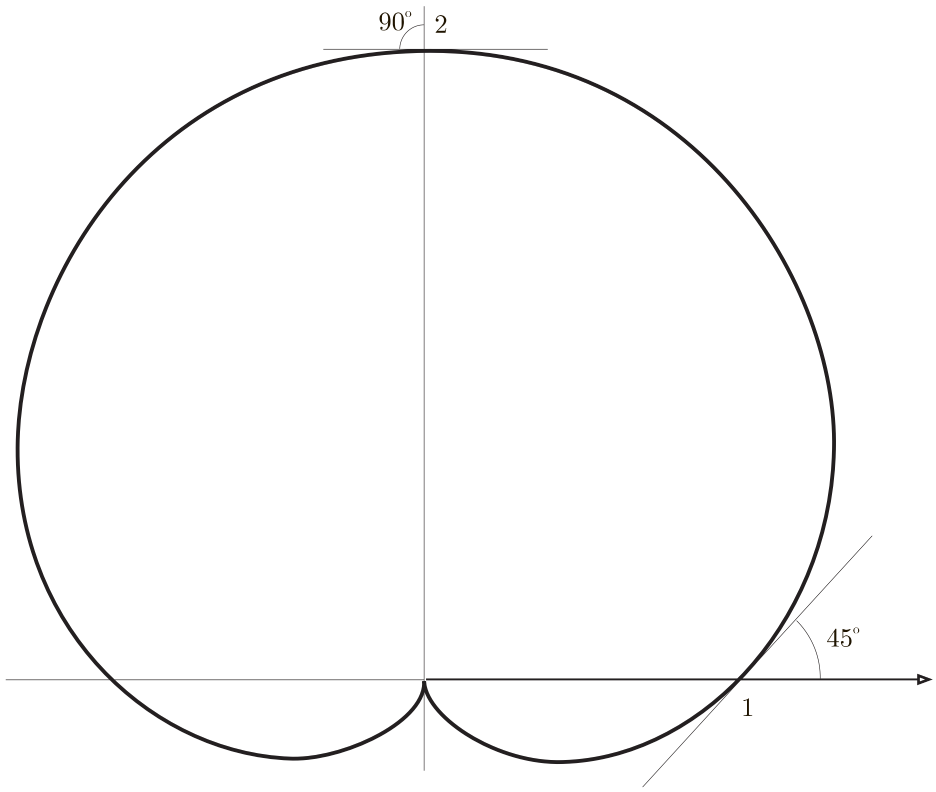
$$\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta = 0,\ \rho = 1 + \operatorname{sen}\theta; \qquad \cos\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0, \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\rho' \cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta = 0,\ \rho = 1 + \operatorname{sen}\theta; \qquad 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

Para $\theta = \pi/2$ la derivada dy/dx queda indeterminada por lo que se concluye que existen tangentes horizontales en $(1/2, -\pi/6)$ y en $(2, \pi/2)$; y tangentes verticales en $(3/2, \pi/6)$. Además de las que existen por simetrías.

Cuadro de valores: $\operatorname{tag}\mu = \rho/\rho'$, μ ángulo de la tangente con el radio vector.

θ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
ρ	$0 \nearrow$	$\frac{(1-\sqrt{2})}{2} \nearrow$	$\nearrow 1$	$\nearrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow 2$
ρ'	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
μ	$-90°$	$22.5°$	$45°$	$67.5°$	$90°$



70. Representar gráficamente la curva $\rho^2 = 2/\theta$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

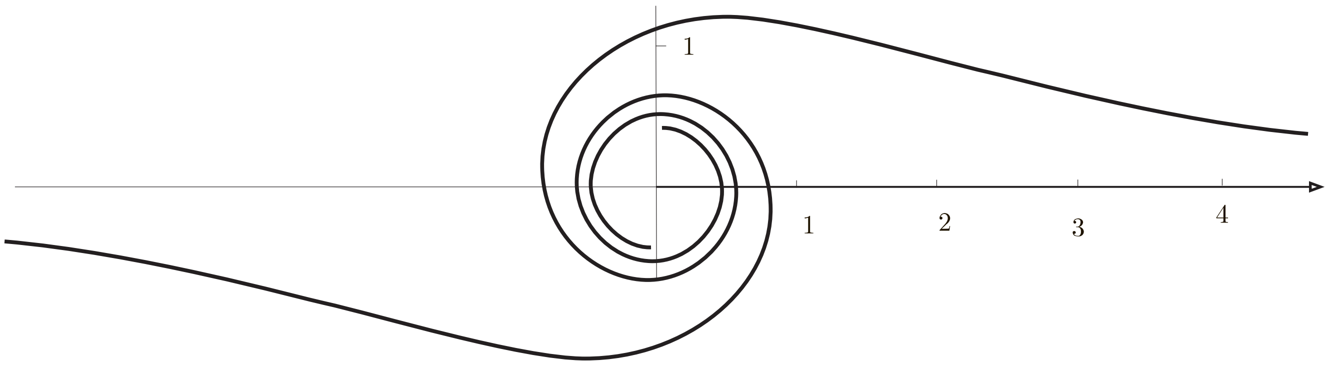
Asíntota, el eje polar:

$$\theta \to 0 \Rightarrow \rho \to \infty. \qquad d = \lim_{\theta \to 0} \rho \operatorname{sen}(\theta - 0) = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{2\theta} = 0.$$

Punto asintótico, el polo: $\lim_{\theta \to \infty} \rho(\theta) = 0$.

Cuadro de valores

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/2$	2π
ρ	$\pm\infty$	± 1.59	± 1.12	± 0.92	± 0.79	± 0.71	± 0.65	± 0.60	± 0.56



71. Representar gráficamente la curva $\rho = e^{\theta} + \dfrac{\theta + 1}{\theta}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

$$\lim_{\theta \to +\infty} \frac{\theta e^{\theta} + \theta + 1}{\theta} = \lim_{\theta \to +\infty} e^{\theta} + \theta e^{\theta} + 1 = \infty \quad \text{Rama en espiral}$$

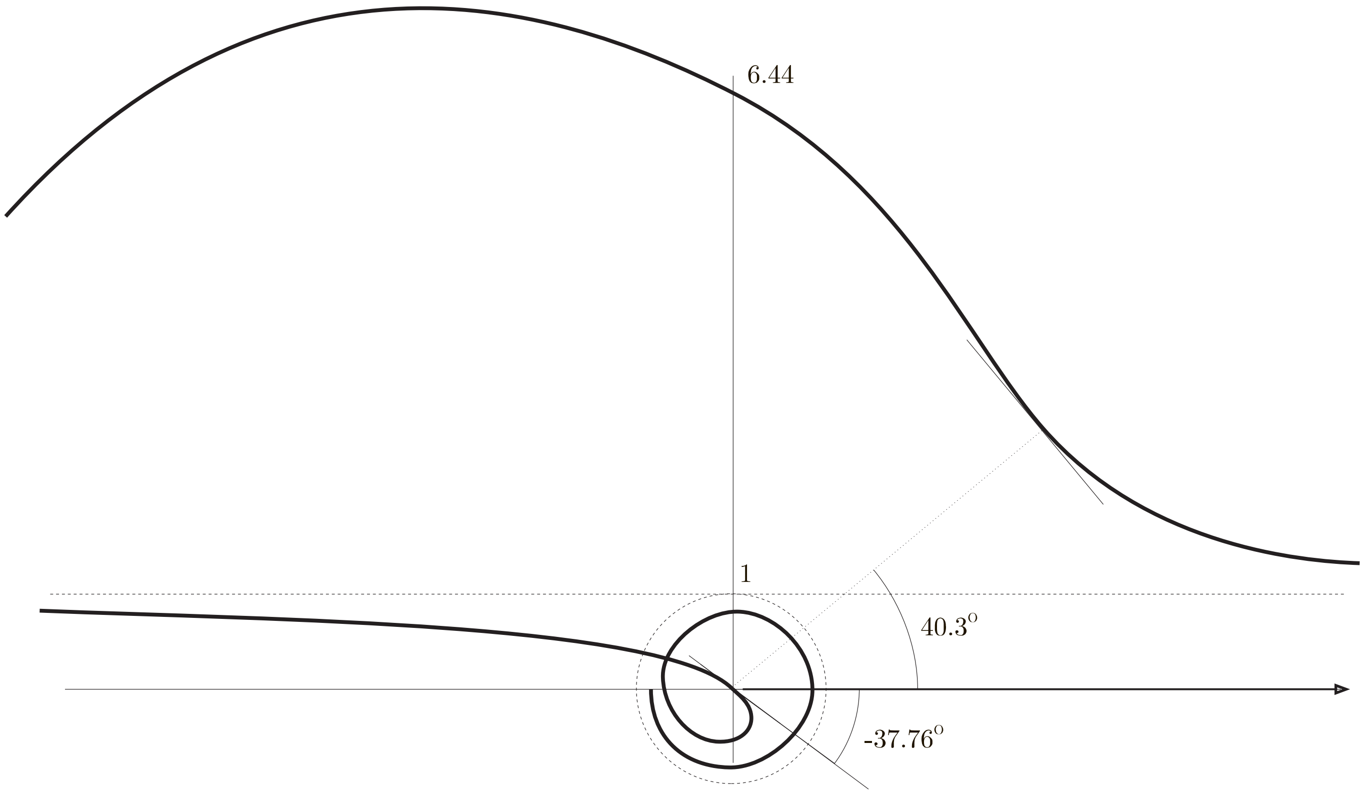
$$\lim_{\theta \to -\infty} \frac{\theta e^{\theta} + \theta + 1}{\theta} = \lim_{\theta \to -\infty} e^{\theta} + \theta e^{\theta} + 1 = \lim_{t \to +\infty} e^{-t}(1 - t) + 1 = 1. \qquad \text{Círculo asintótico: } \boxed{\rho = 1}$$

Asíntotas:

$F(\rho,\theta) = \theta\rho - \theta(e^{\theta}+1) - 1 = 0$, $F_n(\theta) = F_1(\theta) = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$. Existe una dirección asintótica paralela al eje polar. La distancia al polo viene dada por:

$$d = -\frac{F_{n-1}(\theta_0)}{F_n'(\theta_0)} = \frac{F_0(\theta_0)}{F_1'(\theta_0)} = \frac{\theta_0(e^{\theta_0}+1)+1}{1} = 1, \qquad \rho = \frac{d}{\operatorname{sen}(\theta-\theta_0)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \boxed{y=1}$$

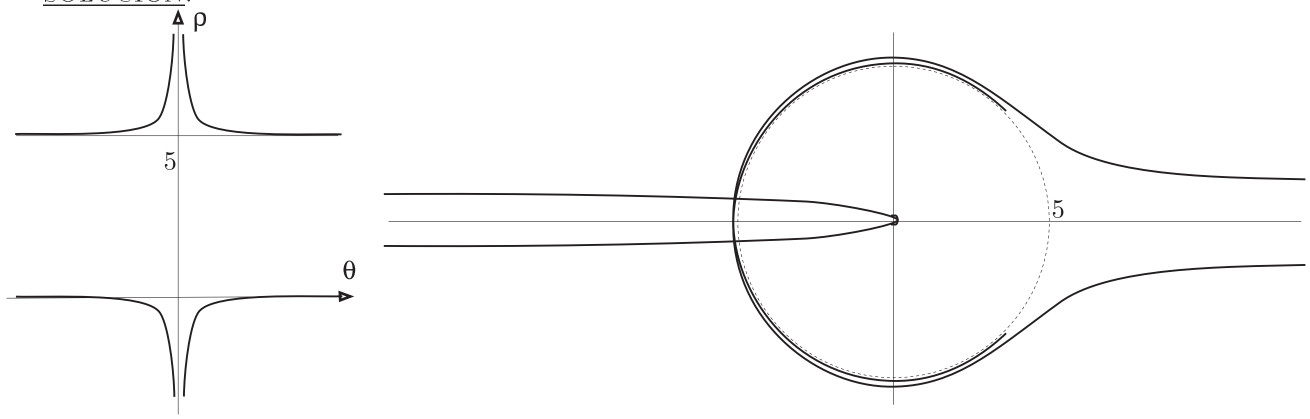
Algunos valores: $\rho(\theta) = 0$, si $\theta \simeq -37.76°$, $\rho(90°) \simeq 6.44$ y $\rho'(\theta) = 0$, si $\theta \simeq 40.3°$



⊡

72. Representar gráficamente $\theta^2 = \dfrac{1}{\rho(\rho-5)}$

SOLUCIÓN:



$F(\rho,\theta) = F_2(\theta)\rho^2 + F_1(\theta)\rho + F_0(\theta) = \theta^2\rho^2 - 5\theta^2\rho - 1 = 0.$

Simétrica respecto al eje polar: $F(\rho,\theta) = F(\rho,-\theta)$.

Asíntotas: $F_2(\theta) = \theta^2 = 0$, $\theta_0 = 0$ dirección asíntotica doble.

Distancia al polo: $d = -F_1(\theta_0)/F_2'(\theta_0) = 0$.

Círculos asintóticos: Cuando $\theta \to \infty$, ρ tiende a 0 y a 5. El polo es un punto asíntotico y la circunferencia de centro el polo y radio 5, es asíntotica.

Diagrama cartesiano:

$G(\theta,\rho) = \theta^2\rho(\rho-5)-1 = 0$. Dos asintotas horizontales: $\rho = 0$ y $\rho = 5$. Una vertical doble $\theta = 0$. Simétrica respecto a $\theta = 0$, $G(\theta,\rho) = G(-\theta,\rho)$; y también respecto a la recta $\rho = 2.5$, $G(\theta,\rho) = G(\theta,\rho+5)$.

⊡

73. Representar gráficamente la curva $\rho = (\theta-\pi)/(\theta+\pi)$.

SOLUCIÓN:

Círculo asíntotico:

$$\lim_{\theta\to+\infty}\rho(\theta) = \lim_{\theta\to+\infty}\frac{\theta-\pi}{\theta+\pi} = 1^-, \qquad \lim_{\theta\to-\infty}\rho(\theta) = \lim_{\theta\to-\infty}\frac{\theta-\pi}{\theta+\pi} = 1^+,$$

Asíntota:

$F(\rho,\theta) = F_1(\rho,\theta)\rho + F_0(\rho,\theta) = (\theta+\pi)\rho - (\theta - pi) = 0,\ F_1(\rho,\theta) = \theta+\pi = 0, \quad \theta_0 = -\pi,$ dirección asintótica.

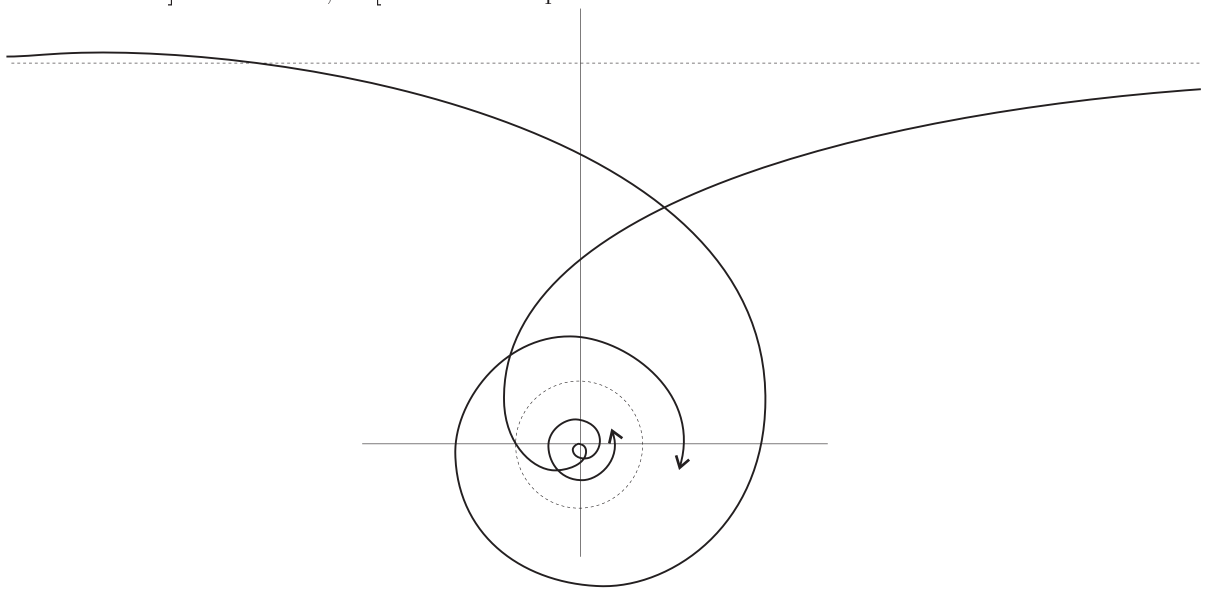
$$d = -\frac{F_0(\rho,\theta}{F_1'(\rho,\theta)} = \theta_0 - \pi = -2\pi, \quad \text{distancia al polo.}$$

Cuadro de valores:

θ	-4π	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$-\frac{13\pi}{4}$	-3π	$-\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{9\pi}{4}$	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
ρ	$\frac{5}{3}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{17}{9}$	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{5}$	3	$\frac{11}{3}$	5	9	∞	-7	-3	$-\frac{5}{3}$	-1

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π
ρ	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{19}$	$\frac{3}{5}$

En el intervalo $]-1.346445\pi, -\pi[$ la curva está por encima de la asíntota.



⊡

74. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{\cos(\theta/2)}{\mathrm{sen}(\theta/2)} = \mathrm{cotg}\,\dfrac{\theta}{2}$.

SOLUCIÓN:

Como $\rho = \mathrm{cotg}\,\theta$ el periodo es $T = 2\pi$. Simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo: $\rho(\theta) = -\rho(-\theta)$. Por tanto, el intervalo de estudio es $[0, \pi]$.

Como $\rho'(\theta) = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)}$, siempre es decreciente.

Asíntota: $\rho \to \infty$ cuando $\theta_1 \to 0$ y cuando $\theta_2 \to 2\pi$. Distancia al polo

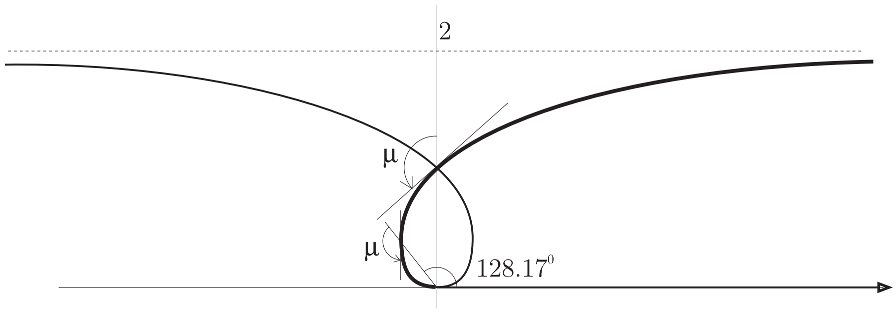
$$d_k = \lim_{\theta\to\theta_k} \frac{1}{(1/\rho(\theta))'} = \lim_{\theta\to\theta_k} 2\cos^2\theta = 2, \qquad (k = 1, 2)$$

$$\mathrm{tag}\,\mu = \frac{\rho}{\rho'} = -\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Tangentes verticales: $-rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho'\cos\theta = 0$, de donde, teniendo en cuenta que $\rho/\rho' = -\,\mathrm{sen}\,\theta$, resulta $\mathrm{sen}^2\theta + \cos\theta = 0$, esto es $\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$. Se obtiene $\cos\theta = (1 \pm \sqrt{5})/2$ y el valor comprendido entre -1 y 1 es $\cos\theta = (1 - \sqrt{5})/2$, obteniéndose $\theta = 128.17°$.

Tangentes horizontales: $\rho\cos\theta + \rho'\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$, o sea, $-\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta = 0$, obteniéndose $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$128.17°$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.48	$2-\sqrt{3}$	0
ρ'	∞	$-\left(1+\sqrt{3}\right)^2$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	-0.61	$-\left(-1+\sqrt{3}\right)^2$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\rho}{\rho'}$	Indeterminado	$-\frac{2+\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0.78	$-\frac{2-\sqrt{3}}{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}$	0
$\mu = arctag\frac{\rho}{\rho'}$	Indeterminado	-0.46	-0.71	-0.78	-0.71	-0.66	-0.46	0
μ	Indeterminado	$-26.56°$	$-40.89°$	$-45°$	$-40.89°$	$-38.17°$	$-26.56°$	$0°$



Nota: La curva es invariante bajo la inversión de centro el polo y razón 1.

⊡

75. Representar gráficamente la curva $\rho = 1/\theta^2$.

SOLUCIÓN:

La curva es simétrica respecto al eje polar: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$.

$F(\rho, \theta) = F_1(\theta)\rho + F_0(\theta) = \theta^2\rho - 1 = 0$. Dirección asintótica $\theta = \theta_0$. $d = -F_0(\theta_0)/F_1'(\theta_0) = 1/2\theta_0 = \infty$, rama parabólica en la dirección del eje polar.

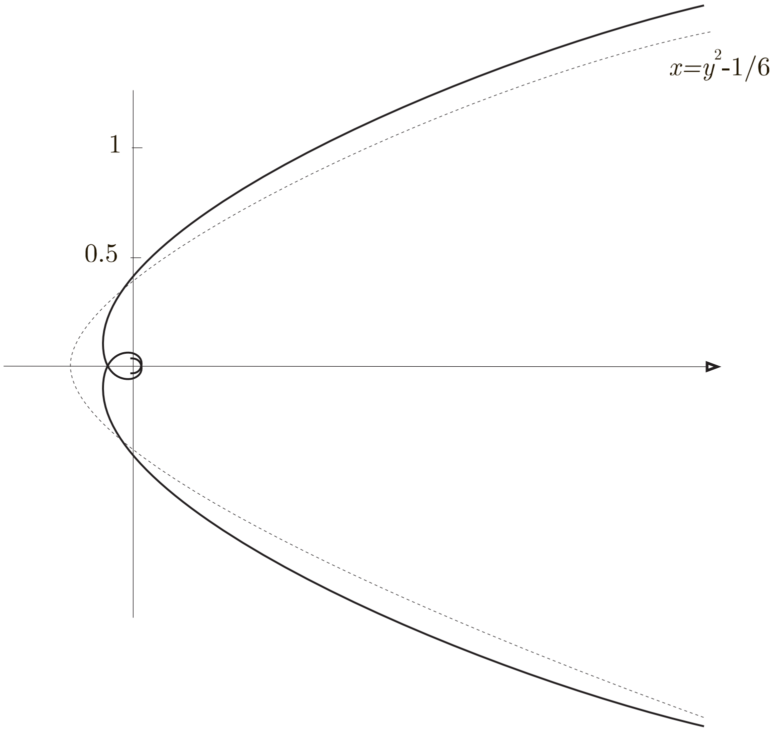
$$x = \rho\cos\theta = (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \cdots)\frac{1}{\theta^2}, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = (1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} + \cdots)\frac{1}{\theta},$$

$$y^2 = (1 - \frac{\theta^2}{3} + \cdots)\frac{1}{\theta^2}, \qquad x - y^2 = \frac{-3+2}{6} + \cdots, \qquad \boxed{x = y^2 - 1/6}\text{, parábola asíntotica.}$$

El polo es un punto asíntotico: cuando $\theta \to \infty$, $\rho \to 0$.

Cuadro de valores:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$
ρ	∞	0.041	0.010	0.004	0.002	0.001



76. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{\theta}{\theta - \pi/4}$.

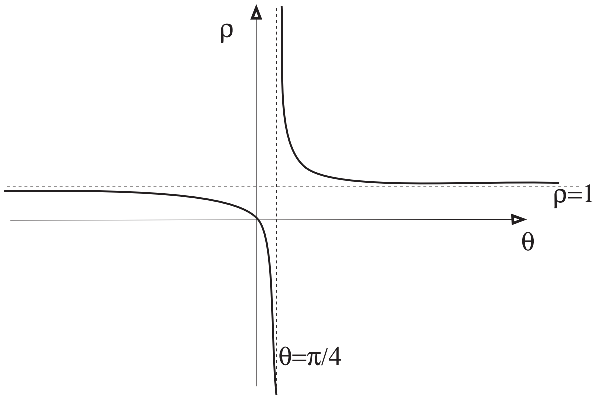
SOLUCIÓN:

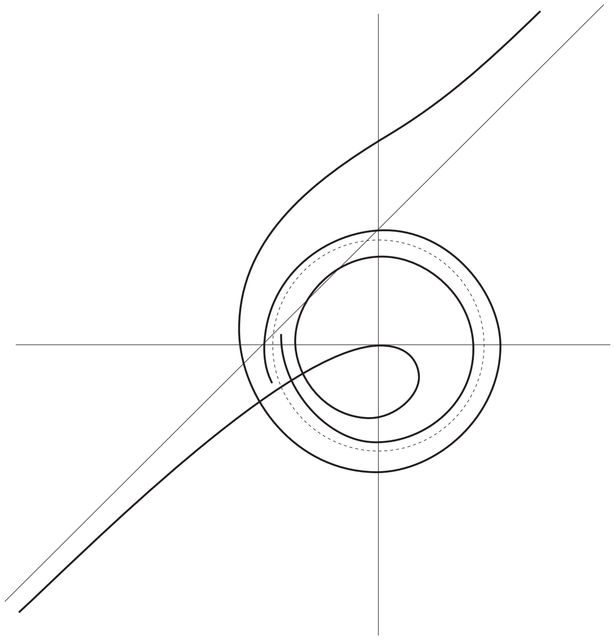
$F(\rho,\theta) = F_1(\theta)\rho + F_0(\theta) = (\theta - \pi/4)\rho - \theta = 0$. $F_1(\theta) = 0$, $\theta_0 = \pi/4$, dirección asintótica. Distancia la polo: $d = -F_0(\theta)/F_1'(\theta) = \theta_0 = \pi/4$.

Círculo asintótico:

$$\lim_{\theta\to+\infty} \frac{\theta}{\theta - \pi/4} = 1^+, \qquad \lim_{\theta\to-\infty} \frac{\theta}{\theta - \pi/4} = 1^-.$$

La curva pasa por el el polo para $\theta = 0$.





77. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{9}{5 + 4\cos(3\theta/2)}$.

SOLUCIÓN:

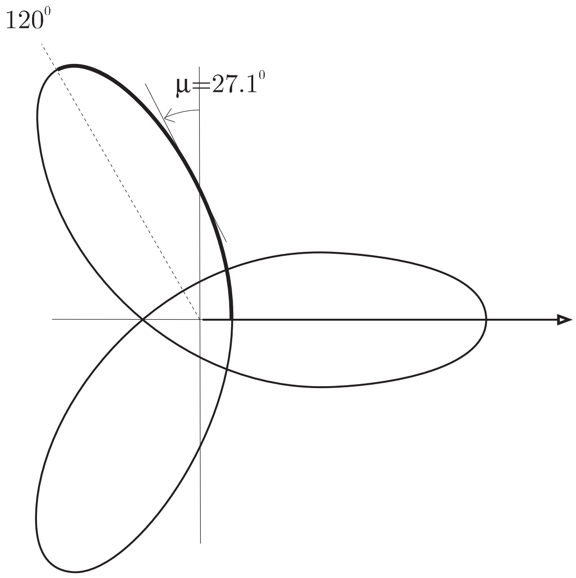
Periodicidad: $T = 4\pi/3$. Luego se obtiene un arco de la curva, correspondiente a un intervalo de longitud $4\pi/3$ y para obtener la curva completa, se hacen dos giros de amplitud $4\pi/3$, alrededor del polo.

Como la curva es simétrica respecto al eje polar, $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$, se estudia el trozo de curva en $[0, 2\pi/3]$, haciendo una simetría respecto al eje polar y los giros anteriormente dichos para obtener la curva completa.

Como $\rho'(\theta) = 54 \operatorname{sen}(3\theta/2)/(5 + 4\cos(3\theta/2))^2$, los puntos en que la tangente es perpendicular al radio vector, en el intervalo $[0, 2\pi/3]$, son $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi/3$.En todo este intervalo $\rho' > 0$, es decir ρ crece.

Cuadro de valores:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
ρ	1	1.15	1.8	4.14	9
ρ'	0	0.62	2.16	8.09	0
ρ/ρ'	∞	1.84	0.83	0.51	∞
μ	$90°$	$61.5°$	$39.8°$	$27.1°$	$90°$



$\square$

78. Establecer que el lugar geométrico de los centros de gravedad M de un hilo de peso homogéneo enrollado alrededor de un circunferencia de centro O y de radio a (uno de los extremos situado en A de coordenadas polares $(a, 0)$ y el otro en $M_0(a, 2\theta)$) tiene por ecuación $\rho = \dfrac{a \operatorname{sen}\theta}{\theta}$. Hacer la representación gráfica de la curva (Cocloide).

<u>SOLUCIÓN</u>:

Centro de gravedad (baricentro) de una curva plana en coordenadas polares, con una densidad de masa δ:

$$x_0 = \frac{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\rho(\theta)\cos\theta\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta}{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta}, \quad y_0 = \frac{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\rho(\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta}{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta},$$

En nuestro caso, queda:

$$x_0 = \frac{\displaystyle\int_0^{2\theta} \delta a\cos\theta\sqrt{a^2}d\theta}{\displaystyle\int_0^{2\theta} \delta\sqrt{a^2}d\theta} = \frac{a\operatorname{sen}2\theta}{2\theta}, \qquad y_0 = \frac{\displaystyle\int_0^{2\theta} \delta a\operatorname{sen}\theta\sqrt{a^2}d\theta}{\displaystyle\int_0^{2\theta} \delta\sqrt{a^2}d\theta} = \frac{a(1-\cos 2\theta)}{2\theta}.$$

Con lo que en coordenadas polares, teniendo en cuenta que $\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, resulta:

$$\rho = \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$$

Simétrica respecto al eje polar: $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$.

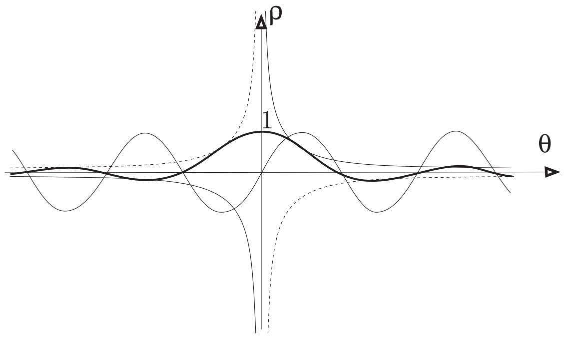
El polo es un punto múltiple que se obtiene para $\theta = k\pi$. Con tangente, por tanto, horizontal.

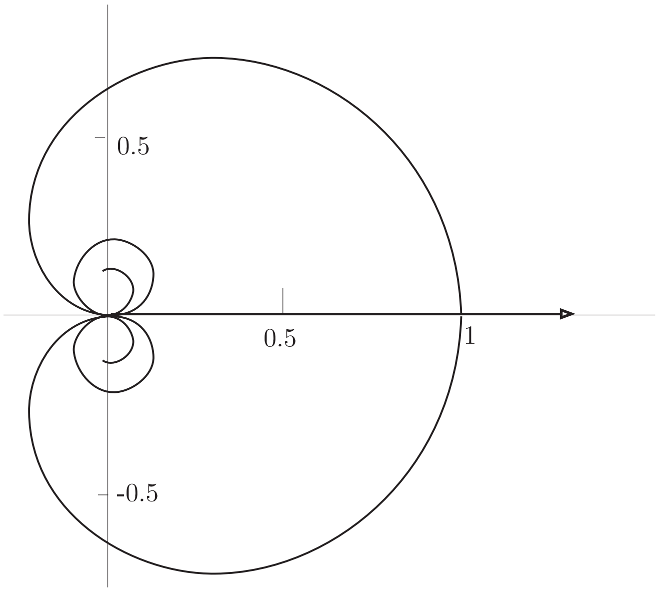
El polo es un punto asíntótico ya que el $\lim\limits_{\theta\to\infty} \rho(\theta) = 0$.

El diagrama cartesino, para $a = 1$, es una curva producto de la función seno de de una hiperbola equilátera, lo cual nos da bastante información par aobtener su gráfica en polares.

La gráfica extraida de MATHEMATICA con:

```
ParametricPlot[{Sin[t]*Cos[t]/t,Sin[t]^2/t},{t,-5Pi/2,5Pi/2},
        AspectRatio-> Automatic]
```





□

79. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{a}{\cos(\theta/5)}$. (Ver Ejercicio 62)

SOLUCIÓN:

Periodicidad: $T = 10\pi$, por lo que podemos reducur el intervalo de estudio a $[0, 10\pi]$.

Como se verifica que $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, el intervalo de estudio se reduce a $[0, 5\pi]$. Al arco de curva obtenido se le hace un giro de centro el polo y amplitud igual a $\pi + 5\pi = 6\pi$, con lo que se vuelve a repetir el arco ya trazado.

La curva es simétrica respecto al eje polar, pues $\rho(10\pi - \theta) = \rho(\theta)$. El intervalo de estudio se reduce a $[0, 5\pi/2]$.

Asíntotas: $\rho \to \infty$ cuando $\cos(\theta/5) = 0$, esto es para $\theta_k = 5\pi(2k + 1)/2$. Como la curva queda descrita en el intervalo $[0, 10\pi]$, existen direcciones asíntoticas para $\theta_0 = 5\pi/2$ y $\theta_1 = 15\pi/2$, y las distancias al polo vienen dadas por

$$d_k = \lim_{\theta\to\theta_k} \frac{a(\theta - \theta_k)}{\cos(\theta/5)} = \lim_{\theta\to\theta_k} \frac{-5a}{\operatorname{sen}(\theta/5)}, \qquad d_0 = -5a, \quad \theta_1 = 5a.$$

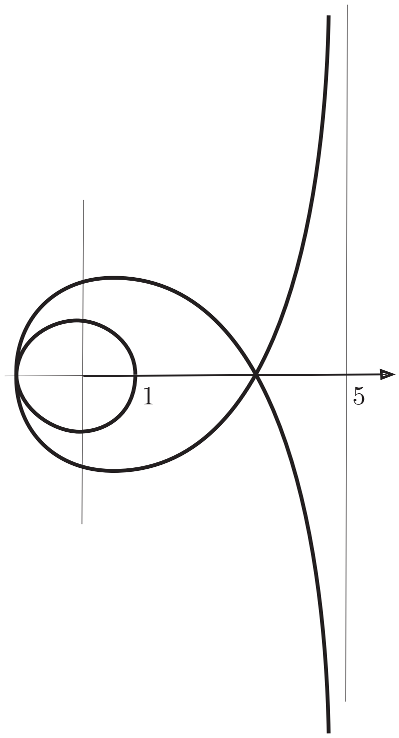
Las dos asíntotas coinciden.

$$\rho' = \frac{a \operatorname{sen}(\theta/5)}{5\cos^2(\theta/5)}, \qquad \frac{\rho}{\rho'} = 5\operatorname{cotg}(\theta/5) = \operatorname{tag}\mu,$$

siendo μ el ángulo que forma el radio vector con la tangente a la curva.

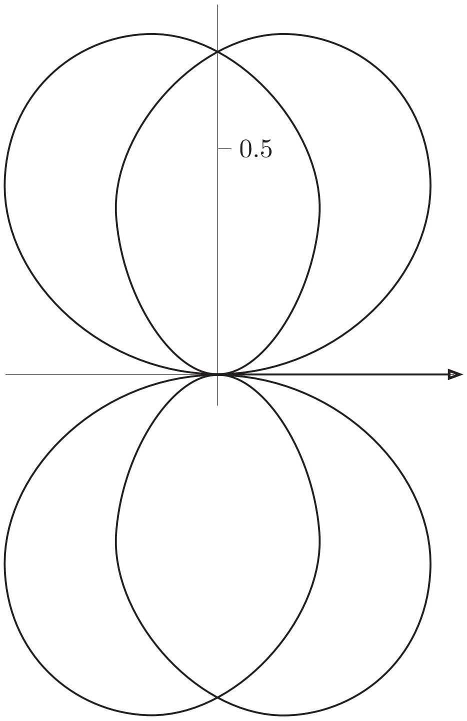
Cuadro de valores:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$
ρ'	0		+			∞
ρ	1	1.05	1.24	1.70	3.23	∞
ρ/ρ'	∞	15.3884	6.88191	3.63271	1.6246	*
μ	90°	86.28°	81.73°	74.61°	58.38°	*



80. Representar gráficamente la curva $\rho = \operatorname{sen}\theta\cos(\theta/2)$.

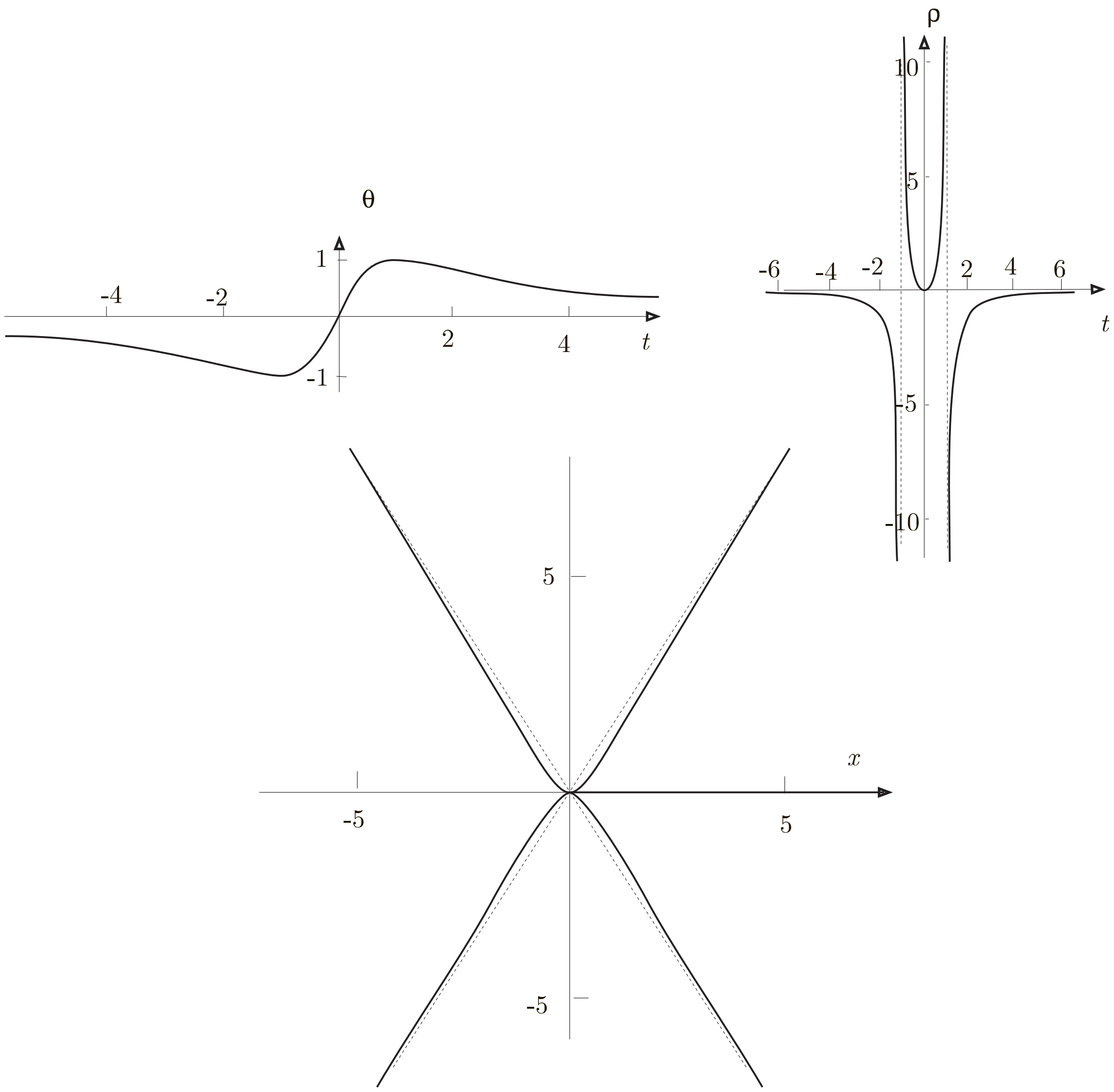
SOLUCIÓN:



81. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{4t^2}{1-t^4}, \theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

SOLUCIÓN:

```
ParametricPlot[{4t^2/(1-t^4)*Cos[2t/(1+t^2)],
  4t^2/(1-t^4)*Sin[2t/(1+t^2)]},{t,-10,10},AspectRatio->Automatic]
```



□

82. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{a}{\cos\left(\dfrac{3\theta}{4}\right)}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

El periodo es $T = 8\pi/3$, por tanto se estudiará en el intervalo $[0, 8\pi/3]$ y se determinará toda la curva haciendo <u>dos</u> giros alrededor del polo de amplitud $8\pi/3$, o sea de $2\pi/3$.

Como además la curva $\rho = f(\theta)$ verifica que $f(\theta + T/2) = -f(\theta)$, el estudio se reduce al intervalo $[0, 4\pi/3]$, haciendo luego del arco obtenido, un giro de centro el polo y de amplitud $\pi + 4\pi/3$, o sea de $\pi/3$. Y haciendo después los giros anteriormente descritos.

La curva es simétrica respecto al eje polar, pues se verifica $f(\theta) = f(-\theta)$. Así, basta estudiarla en el intervalo $[0, 2\pi/3]$, hacer una simetría respecto al eje polar del arco obtenido y, al resultado, aplicarle lo anterior.

La curva también es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar: $f(\theta) = -f(4\pi - \theta)$, por lo que bastaría estudiarla en el intervalo $[\pi/2 - 2\pi/3, \pi/2]$, pero el comportamiento de la curva en éste se deduce del estudio hecho en $[0, 2\pi/3]$.

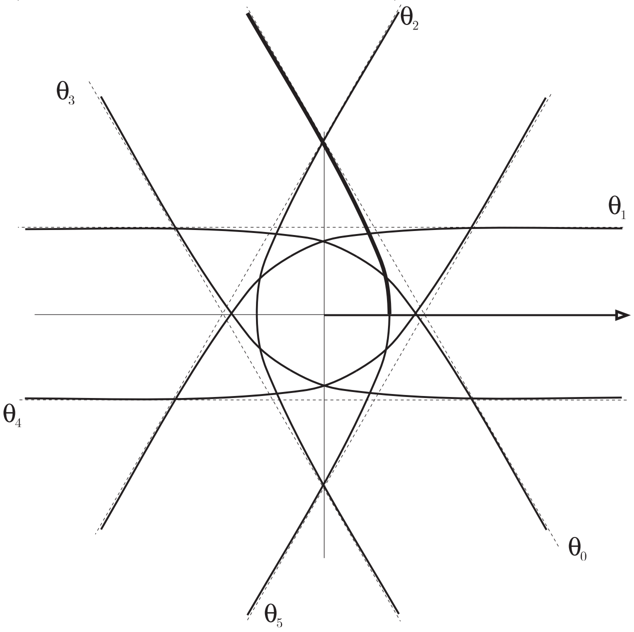
Pendientes de las asíntotas: $\theta_k = (2k+1)2\pi/3$. Distancia al polo: $\displaystyle\lim_{\theta\to\theta_k} \frac{a(\theta - \theta_k)}{\cos(3\theta/4)} = \lim_{\theta\to\theta_k} -\frac{4a}{3\,\mathrm{sen}(3\theta/4)}$.

Como la curva completa queda descrita cuando θ recorre el intervalo $[0, 8\pi]$, las asíntotas vienen determinadas por:

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_1 = 2\pi, \quad \theta_2 = \frac{10\pi}{3}, \quad \theta_3 = \frac{14\pi}{3}, \quad \theta_4 = 6\pi, \quad \theta_5 = \frac{22\pi}{3},$$

$$d_0 = -\frac{4a}{3}, \quad d_1 = \frac{4a}{3}, \quad d_2 = -\frac{4a}{3}, \quad d_3 = \frac{4a}{3}, \quad d_4 = -\frac{4a}{3}, \quad d_5 = \frac{4a}{3}.$$

Como $f'(\theta) = \dfrac{3a}{4}\dfrac{\operatorname{sen}(3\theta/4)}{\cos^2(3\theta/4)}$, $f'(\theta) > 0$ en $[0, 2\pi/3]$ y la función es creciente. Como $f'(0) = 0$, la tangente es perpendicular al eje polar (lo que debe ocurrir por simetría).



⊡

83. Representar gráficamente la curva $\theta = \dfrac{\rho^3}{(\rho-1)(\rho^2+\rho-1)}$.

SOLUCIÓN:

La ecuación implícita de la curva es:

$$F_3(\theta)\rho^3 + F_2(\theta)\rho^2 + F_1(\theta)\rho + F_0(\theta) = 0, \qquad (1-\theta)\rho^3 + 2\theta\rho - \theta = 0,$$

de donde se deduce que posee una rama infinita en la dirección $\theta_1 = 1$, y como $d = -F_2(1)/F_1'(1) = 0$, presenta una asíntota pasando por el polo y de dirección $\theta_1 = 1$.

Circulos asíntoticos: $\theta \to \infty$ si $\rho = 1, \rho = (-1 \pm \sqrt{5})/2$.

Corte con los círculos asíntoticos: $((1+\sqrt{5})/2.12), (-(-1+\sqrt{5})/2, -0.12), (-1, -0.5)$.

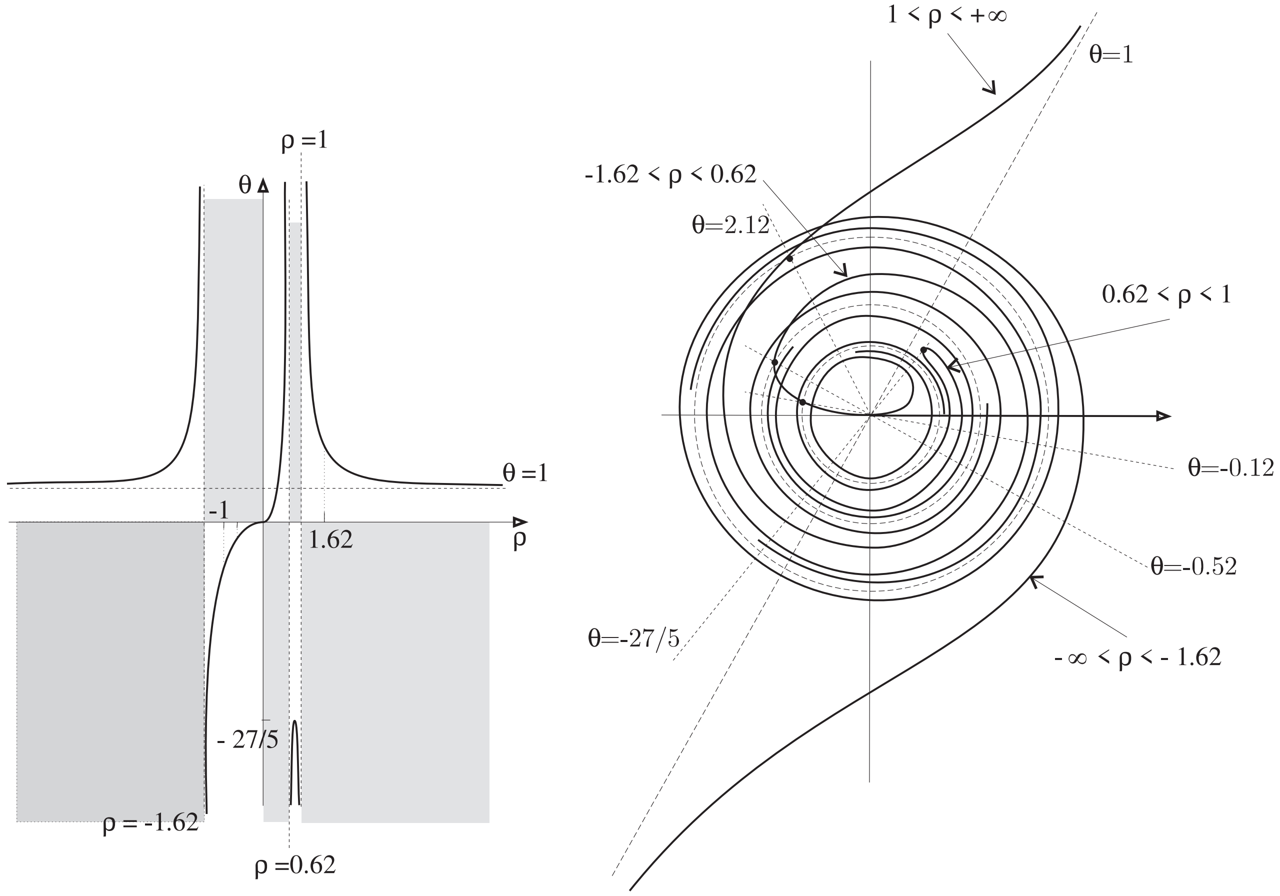
$$\theta' = \frac{\rho^2(3-4\rho)}{(\rho^3 - 2\rho + 1)^2}.$$

Ayudándose del siguiente cuadro de valores y del diagrama cartesiano de abajo, podemos dibujar la curva.

ρ	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$3/4$		1		$+\infty$
θ'		$+$	$\Vert$		$+$		$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
θ	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$-27/5$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1

La gráfica está extraida de MATHEMATICA con:

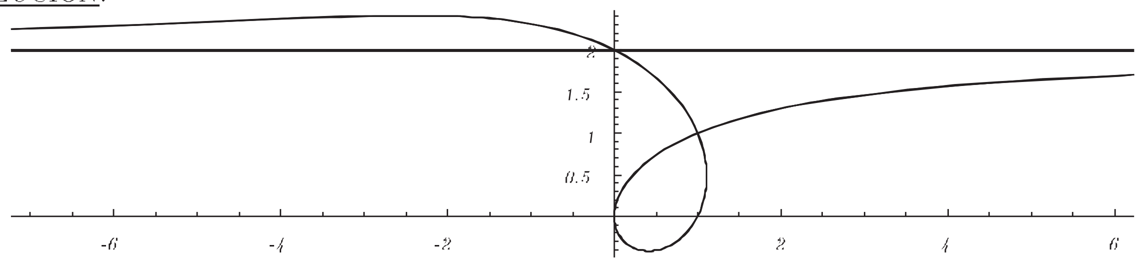
```
In[1]:=f[r_]:=r^3/((r-1)(r^2+r-1))
In[2]:= ParametricPlot[{r*Cos[f[r]],r*Sin[f[r]]},{r,-5,-1.68},
      PlotPoints->150,AspectRatio->Automatic]
In[3]:= ParametricPlot[{r*Cos[f[r]],r*Sin[f[r]]},{r,-1.56,.59},
      PlotPoints->150,AspectRatio->Automatic]
In[4]:= ParametricPlot[{r*Cos[f[r]],r*Sin[f[r]]},{r,.635,.94},
      PlotPoints->150,AspectRatio->Automatic]
In[5]:= ParametricPlot[{r*Cos[f[r]],r*Sin[f[r]]},{r,1.08,5},
      PlotPoints->150,AspectRatio->Automatic]
In[6]:=Show [%2,%3,%4,%5]
```



⊡

84. Representar gráficamente la curva $\rho = 1 + \operatorname{tag}(t/2)$.

SOLUCIÓN:



⊡

85. Representar la curva $\rho = a/\cos(\theta/2)$.

SOLUCIÓN:

Periodicidad: $T = 4\pi$.

Como además se verifica $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, se restringe el estudio a dibujar el arco de curva en el intervalo $[0, 2\pi]$, haciendo luego una rotación de centro el polo y amplitud $\pi + T/2 = 3\pi$, para obtener toda la curva.

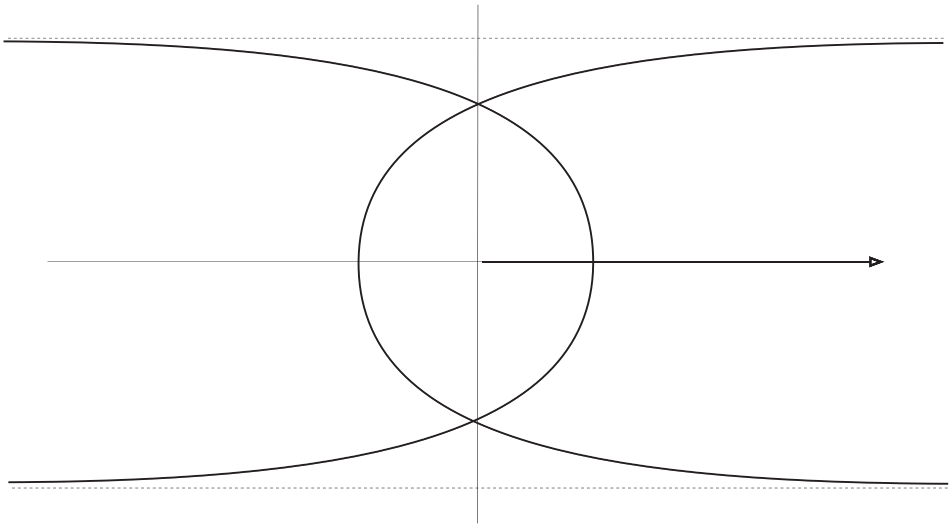
La curva es simétrica respecto al eje polar: $\rho(2k\pi - \theta) = \rho(\theta)$, para k par. Y simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo: $\rho(2k\pi - \theta) = -\rho(\theta)$, para k impar. El hacer esta última simetría coincide con con la operación de girar 3π, descrita antes; por lo que sólo se reduce el intervalo de estudio a la mitad una sola vez, quedando en $[0, \pi]$.

Asíntotas: $\rho \to \infty$, cuando $\theta \to (2k+1)\pi, (k = 1, 2)$, siendo las distancias respectivas al polo:

$$d_k = \lim_{\theta \to (2k+1)\pi} \frac{\theta - (2k+1)\pi}{\cos(\theta/2)} = \lim_{\theta \to (2k+1)\pi} -\frac{2a}{\operatorname{sen}(\theta/2)}, \qquad d_0 = -2a, \quad d_1 = 2a.$$

Como $\rho' = \dfrac{a \operatorname{sen}(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} > 0$ en $[0, \pi]$, ρ es creciente en $[0, \pi]$.

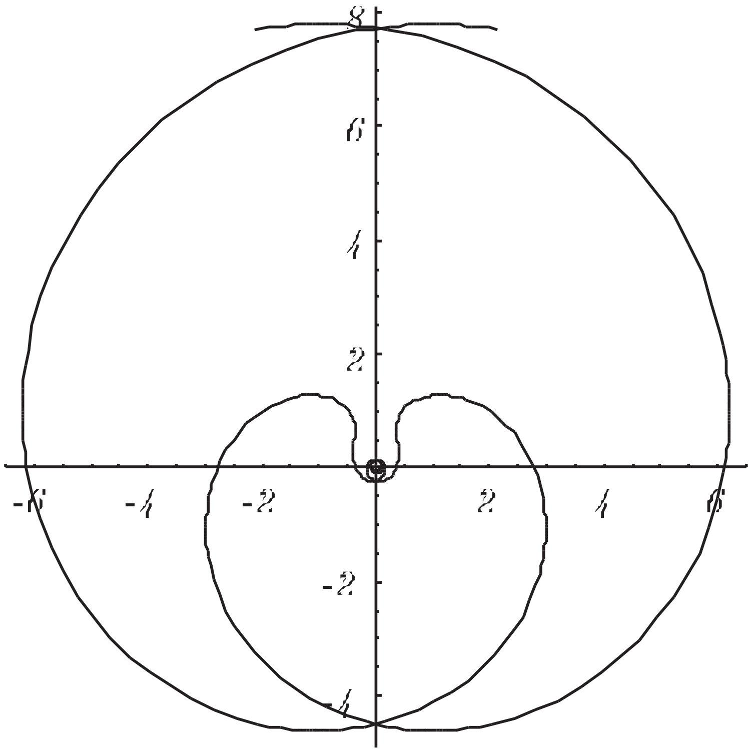
Para $\theta = 0, \rho = a$ y para $\theta = \pi/2, \rho = 2a/\sqrt{2}$.



$\boxdot$

86. Representar gráficamente la curva $\theta = \rho + 1/\rho$.

<u>SOLUCIÓN</u>:



$\boxdot$

87. Representar gráficamente la curva $\rho = a\cos(\theta/5)$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

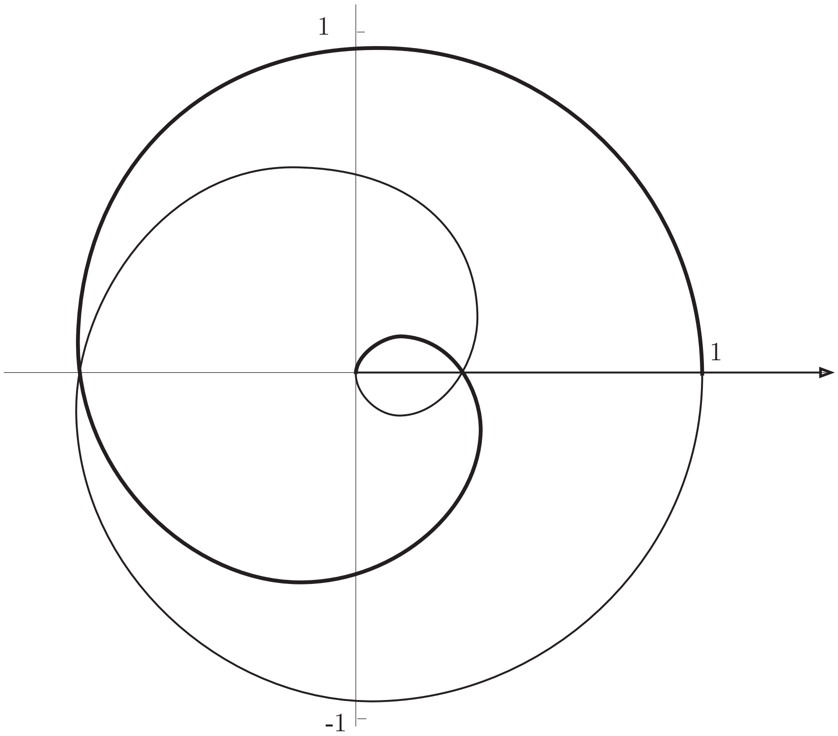
Periodo: $T = 10\pi$. Como $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, el intervalo de estudio se reduce a $[0, 5\pi]$. Al arco de curva obtenido se la aplica un giro de centro el polo y de amplitud $\pi + T/2 = 6\pi$, lo cual nos da el mismo arco ya representado.

La curva es simétrica el eje polar $a\cos((2k+1)\pi - \theta)/5) = -a\cos(\theta/5)$: Se reduce el estudio al intervalo $[0, 5\pi/2]$.

Como $\rho'(\theta) = -\dfrac{a}{5}\operatorname{sen}\dfrac{t}{5}$, está se anula en $\theta = 0,\ 5\pi$ y la tangente es perpendicular al redio vector. Además, al ser negativa en $[0, 5\pi/2]$, siempre es decreciente.

Para $a = 1$, tenemos los siguientes valores y la representación de abajo.

$$\{\rho(k\pi/4)\}_{k=0,1,\ldots,10} = \{1, 0.98, 0.95, 0.89, 0.81, 0.71, 0.59, 0.45, 0.31, 0.15, 0\}$$



88. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{a}{\cos(\theta/4)}$. (Curva inversa, ver Ejercicio 90)

SOLUCIÓN:

Periodo: $T = 8\pi$. Como se verifica $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, basta representar el arco correspondiente al intervalo $[0, 4\pi]$ y luego hacer un giro de centro el polo y amplitud $\pi + 4\pi = 5\pi$, o sea de amplitud π.

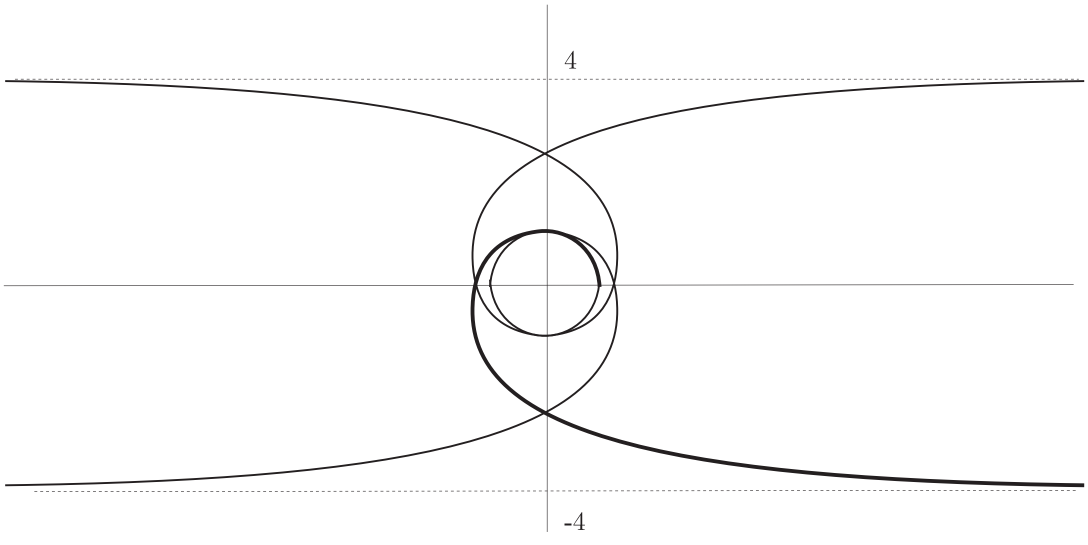
Como además la curva es simétrica respecto al eje polar $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, basta estudiarla en $[0, 2\pi]$, hacer la simetría respecto al eje polar y luego el giro descrito.

Nótese que la curva también es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar por el polo ($\rho(\theta) = -\rho(4\pi - \theta)$), por consiguiente será también simétrica respecto al polo ($\rho(\theta) = -\rho(\theta + 4\pi)$); pero esta condición conincide con la que permite reducir el periodo a $[0, 4\pi]$.

Asíntotas: $\cos(\theta/4) = 0$, esto es, para $\theta_k = 4(2k+1)\pi/2$. Resulta $\theta_0 = 2\pi, \theta_1 = 6\pi$. La distancia de las asíntotas al polo son $d_k = 1/(1/\rho)' = -\dfrac{4a}{\operatorname{sen}(\theta_k/4)}$. Resulta $d_0 = -4a$ y $d_1 = 4a$.

$\rho'(\theta) = \dfrac{a \operatorname{sen}(\theta/4)}{4\cos^2(\theta/4)}$, luego ρ es creciente en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\{\rho(k\pi/2)\}_{k=0,1,2,3} = \{1, 1.08239, 1.41421, 2.61313\}$$



89. Representar gráficamente la curva $\rho = a\cos\dfrac{3\theta}{4}$.

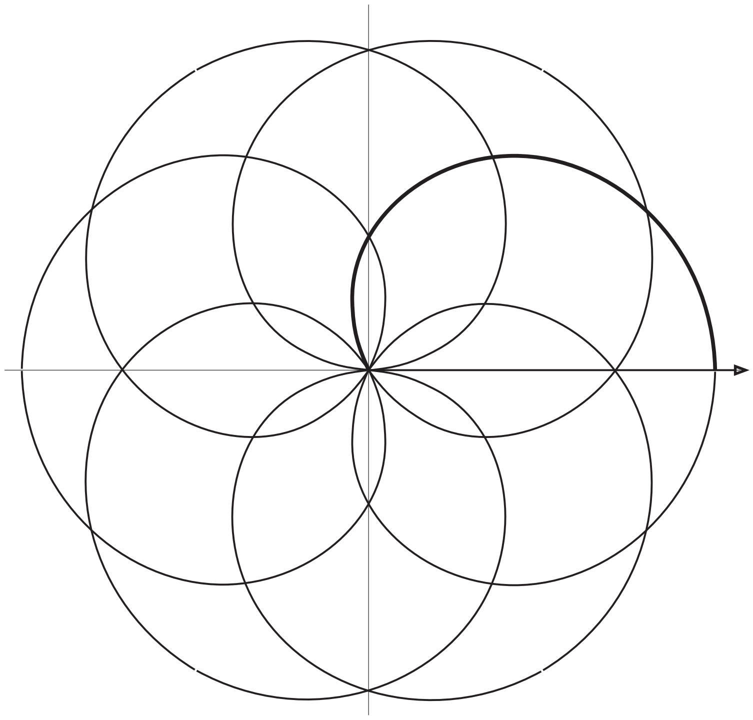
SOLUCIÓN:

Periodicidad: $T = 8\pi/3$. Se dibuja el arco de curva en el intervalo $[0, 8\pi/3]$ y luego hacen dos giros de centro el polo y amplitud $8\pi/3$.

Como se verifica que $a\cos(3(\theta + T/2)/4) = -a\cos(3\theta/4)$, se reduce el intervalo de estudio a la mitad, $[0, 4\pi/3]$; al arco obtenido se le hace un giro de centro el polo y amplitud $\pi + T/2 = 7\pi/3$, o sea de amplitud $\pi/3$.

La curva es simétrica respecto al eje polar: $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$. Se reduce el estudio al intervalo $[0, 2\pi/3]$, haciéndose luego la simetría respecto al eje polar.

θ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$	$120°$
ρ	1	0.98	0.92	0.83	0.71	0.55	0.38	0.19	0



$\boxdot$

90. Representar gráficamente la curva $\rho = a\cos(\theta/4)$. (Curva inversa, ver Ejercicio 88)

SOLUCIÓN:

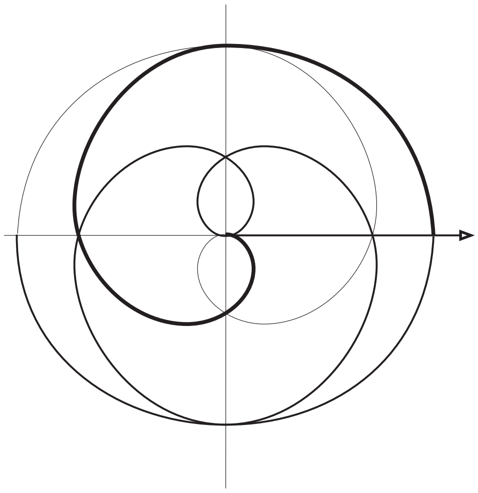
Periodicidad: $T = 8\pi$. Además se verifica $\rho(\theta + T/2) = -\rho(\theta)$, por lo que el intervalo de estudio se reduce al $[0, 4\pi]$, haciéndose luego un giro de centro el polo y amplitud $\pi + 4\pi \sim \pi$, al arco obtenido.

La curva es simétrica respecto al eje polar, pues $a\cos(\theta/4) = a\cos(2\pi - \theta/4)$; basta, entonces, estudiarla en el intervalo $[0, 2\pi]$ y hacer la simetría y el giro anteriomente descrito.

$\rho' = -a/4\sin(\theta/4)$, que es negativa en el intervalo $[0, 2\pi]$, por lo que ρ es decreciente.

Cuadro de valores:

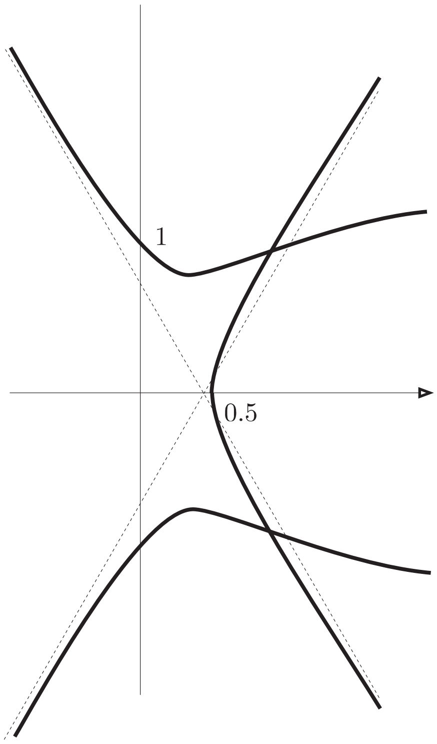
θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
ρ	1	0.99	0.96	0.92	0.86	0.79	0.70	0.60	0.5	0.38	0.25	0.13	0



⊡

91. Representar gráficamente la curva $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta - \cos 2\theta}$.

SOLUCIÓN:



⊡

ÍNDICE ALFABÉTICO