Apuntes de Introducción a las Variedades Diferenciables

La Laguna, 1997

Angel Montesdeoca

CONTENIDO

1

Variedades diferenciables Subvariedades

1.1 Definición de variedades diferenciables

Dado un espacio (conjunto), definido por alguna condición geométrica, topológica, analítica, etc..., no siempre se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus puntos y una serie de números, denominados coordenadas. En la mayoría de los casos nos tenemos que restringir a una parte de dicho espacio. Si además exigimos que esta biyección tenga propiedades topológicas, la dificultad de encontrarla se incrementa.

Nos restringiremos a aquellos espacios topológicos a cuyos puntos le podemos asignar (localmente) un conjunto de números reales, de tal forma que esta correspondencia venga dada por un homeomorfismo.

Una variedad diferenciable, a "grosso modo", es un espacio topológico donde cada punto tiene un entorno que está parametrizado de tal forma que la transformación entre dos conjuntos de parámetros está dada por funciones diferenciables. Una función sobre un tal espacio topológico puede ser considerada localmente como una función de estos parámetros. Por lo tanto, podemos definir la diferenciabilidad de funciones y aplicaciones. Usando la idea de diferencial, podemos "linealizar" un entorno suficientemente pequeño de un punto sobre una variedad y considerar un espacio tangente. A lo largo de este curso discutiremos los hechos básicos del cálculo diferencial sobre una variedad diferenciable.

Comencemos con una serie de definiciones que nos conduzcan al concepto de variedad diferenciable.

Definición 1.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto del espacio euclídeo n–dimensional $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función valuada real. Se dice que f es* diferenciable de clase C^k *sobre U, o simplemente que f* es de clase C^k *(k entero no negativo) si existen las derivadas parciales*

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{(\partial r^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial r^n)^{\alpha_n}} \qquad (\alpha_i \geq 0, \ \ \alpha_1+\cdots+\alpha_n \leq k)$$

y son funciones continuas en U.

En particular, f es de clase C^0 si f es continua; y f es de clase C^1 si existen y son continuas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial r^i}$ (siendo $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i–ésima proyección canónica (i=1,2,...,n)).

Una aplicación $F : U \to \mathbb{R}^n$, se dice que es diferenciable de clase C^k *si cada una de sus funciones componentes, $F^i = r^i \circ F$, i=1,2,...,n es de clase C^k. Se dice que F* es de clase C^∞ *si es de clase C^k, para todo $k \geq 0$. Y, finalmente, F* es de clase C^ω *si es* analítica*, es decir, si F puede ser expresada como una serie de Taylor convergente en un entorno de cada punto del dominio de definición.*

Definición 1.2 *Una* variedad topológica n–dimensional M *es un espacio topológico Hausdorff (i.e. (separado o T_2) si cualquier par de puntos distintos admiten entornos disjuntos), segundo contable (i.e.; con una base numerable de conjuntos abiertos) y localmente euclídeo (i.e.; tal que para cada punto $x \in$ M, existe un subconjunto abierto U_x entorno de x homeomorfo a un subconjunto abierto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$).*

Nota 1.3 De esta condición local no se deduce que el espacio topológico M sea Hausdorff, como contraejemplo ver el Ejercicio 4.

Nota 1.4 Podemos, si deseamos, elegir el homeomorfismo de la Definición 1.2 como $\varphi_x : U_x \to \varphi_x(U_x)$, tal que $\varphi_x(x) = 0$ y además que la imagen de φ_x sea una bola de centro el origen y radio ε, $B_0^n(\varepsilon)$. En efecto, dado cualquier φ_x aplicando homeomórficamente un conjunto abierto U_x conteniendo a x en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $B^n_{\varphi_x(x)}(\varepsilon) \subset \varphi_x(U_x)$. Sea $\phi : B^n_{\varphi_x(x)}(\varepsilon) \to B^n_0(\varepsilon)$ la traslación por $-\varphi_x(x)$. Entonces

$$\widetilde{\varphi}_x = \phi \circ \varphi_{x|\varphi_x^{-1}(B^n_{\varphi_x(x)}(\varepsilon))}$$

aplica $\varphi_x^{-1}(B^n_{\varphi_x(x)}(\varepsilon))$ homeomórficamente en $B^n_0(\varepsilon)$.

También, podemos elegir, en vez de una bola, un entorno cúbico centrado en el origen y de lado ε, $C^n_0(\varepsilon)$.

Definición 1.5 *Si $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es uno de los homeomorfismos de la Definicion 1.2, siendo U un abierto conexo, φ recibe el nombre de* homeomorfismo coordenado*; U* abierto coordenado*; al par (U, φ) se le denomina* sistema coordenado *o* carta*; cada aplicación continua $x^i = r^i \circ \varphi$ se denomina* función coordenada*; y la n–upla $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ se dice que es el* sistema de funciones coordenadas asociado a la carta (U, φ).

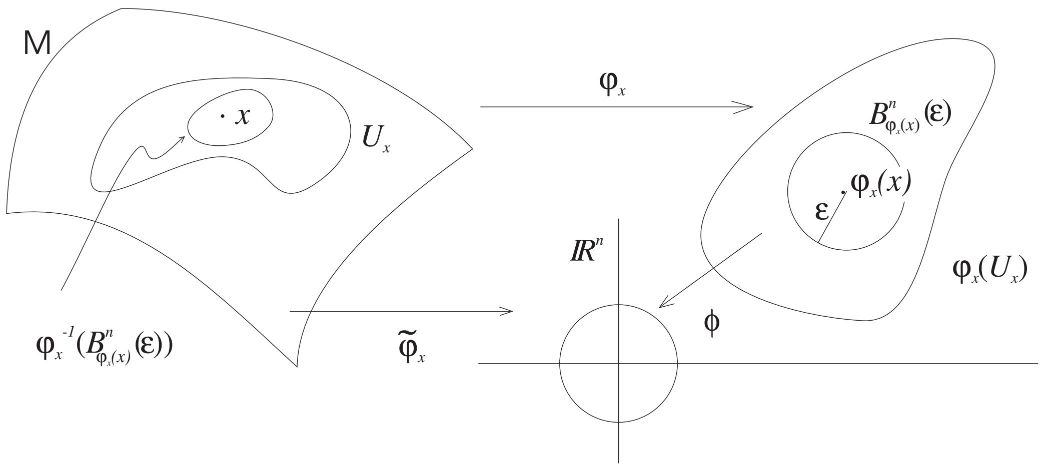


Fig. 1.1: Entornos homeomorfos a bolas en $I\!R^n$

Nota 1.6 A veces, la carta (U, φ) se representa por $(U, (x^1, \ldots, x^n))$.

Nota 1.7 Como la noción de espacio localmente euclídeo es tan solo ligeramente distinta de la noción de variedad diferenciable que nos interesa en este curso, veremos ejemplos de aquellos al dar los de variedades diferenciables.

Definición 1.8 *Un conjunto de cartas* $\mathfrak{A} = \{\ (U_\alpha, \varphi_\alpha) / \alpha \in A\ \}$ *se denomina un* atlas *si verifica* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathsf{M}$.

Definición 1.9 *Una* estructura diferenciable de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ *sobre una variedad topológica* M *de dimensión* n *es una colección*

$$\mathfrak{A} = \{\ (U_\alpha, \varphi_\alpha) / \alpha \in A\ \}$$

de sistemas coordenados verificando las tres condiciones siguientes:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathsf{M}$ ($\mathfrak{A}$ *es un atlas de* M)
2. $\forall (\alpha, \beta) \in A \times A$, *si* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *la aplicación*

   $$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   es diferenciable de clase C^k. ($\mathfrak{A}$ *atlas diferenciable*)
3. *La colección* $\mathfrak{A}$ *es maximal con respecto a la condición 2; es decir: si* (U, φ) *es un sistema de coordenadas tal que* $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *y* $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ *son de clase* C^k *para todo* $\alpha \in A$, *entonces* $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$.

Nota 1.10 Si $\mathfrak{A}_0 = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha)/\alpha \in A \}$ es una colección de sistemas coordenados satisfaciendo a las condiciones 1 y 2 de la Definición 1.9, entonces existe una única estructura diferenciable maximal $\mathfrak{A}$ conteniendo a $\mathfrak{A}_0$. En efecto, basta considerar

$$\mathfrak{A} = \left\{ (U,\varphi) \Big/ \begin{array}{l} U \text{ abierto}, \ \varphi\colon U \to \varphi(U) \text{ homeomorfismo}, \\ \varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}, \ \varphi_\alpha\circ\varphi^{-1} \text{ son de clase } C^k, \forall (U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathfrak{A}_0 \end{array} \right\}$$

Entonces, $\mathfrak{A}$ contiene a $\mathfrak{A}_0$, claramente satisface 1, cumple la condición 2 (Ejercicio 2) y $\mathfrak{A}$ es maximal por construcción. Así, $\mathfrak{A}$ define una estructura diferenciable sobre M conteniendo a $\mathfrak{A}_0$. Evidentemente, $\mathfrak{A}$ es la única estructura maximal que contiene a $\mathfrak{A}_0$.

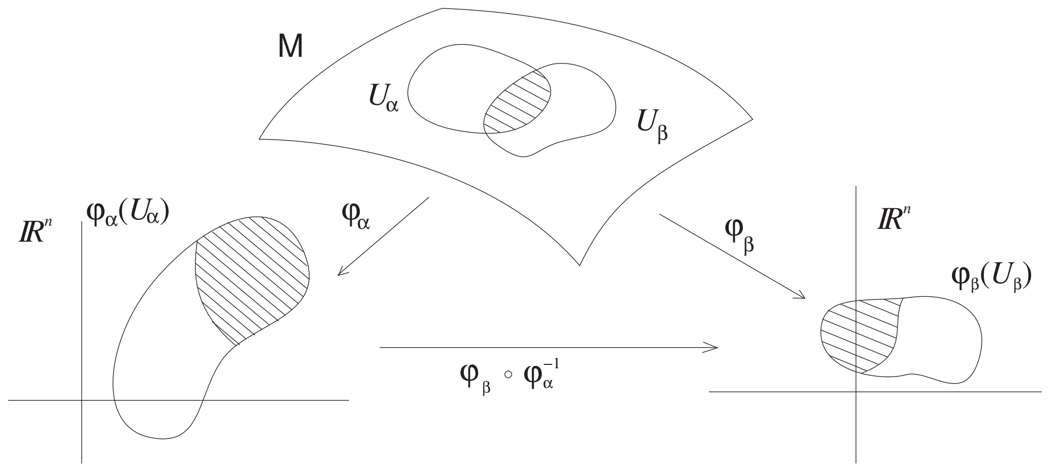


Fig. 1.2: Superposición de entornos coordenados

Definición 1.11 *Una* variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n *es un par* $(\mathsf{M},\mathfrak{A})$ *formado por una variedad topológica* M *de dimensión* n *y una estructura diferenciable* $\mathfrak{A}$ *de clase* C^k *sobre* M.

En general, representamos la variedad diferenciable (M, $\mathfrak{A}$) simplemente por M, sobrentendiendo que cuando nos referimos a la "variedad diferenciable M" se considera sobre M una estructura diferenciable $\mathfrak{A}$.

Para dar una estructura diferenciable sobre una variedad basta con dar un atlas diferenciable (es decir, una colección de sistemas coordenados verificando las condiciones 1 y 2 de la definición), y éste se buscará en general no necesariamente maximal sino lo más pequeño posible.

Nótese que un mismo conjunto puede ser dotado de estructuras diferenciables distintas (ver Ejemplo 1.22), por lo que se necesita dar una definición de "equivalencia" entre atlas definidos sobre un mismo conjunto:

Definición 1.12 *Dos atlas diferenciables sobre* M *son* equivalentes *si su unión es también un atlas diferenciable sobre* M.

Centraremos nuestro estudio especialmente en las variedades y funciones de clase C^∞. Esto se hace por comodidad, lo que nos permitirá, entre otras ventajas, definir un vector tangente de una forma elegante. La intención no es adoptar las menos hipótesis posibles sino más bien usar aquellos conceptos que aparecen, de un modo natural, en una situación general. La restricción no es demasiado drástica, como muestra el siguiente resultado, debido a Whitney[(1)]: *"Un atlas de clase $C^k, (k > 0)$ sobre una variedad paracompacta contiene un atlas de clase C^∞."* Sin embargo, si tenemos una variedad topológica (de clase C^0) no siempre admite una estructura diferenciable de clase C^1, como ha demostrado con su ejemplo Kervaire [(2)].

1.2 Ejemplos de variedades diferenciables

Ejemplo 1.13 $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n.

En efecto, basta tomar como $\mathfrak{A}$ la estructura diferenciable maximal que contiene a $\mathfrak{A}_0 = \{(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})\}$. Es decir, un atlas constituido por una sola carta formada por el abierto $U = \mathbb{R}^n$ y el homeomorfismo coordenado $\varphi = 1_{\mathbb{R}^n}$, identidad en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.14 Si $(\mathsf{M}, \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión n, todo abierto $U \subset \mathsf{M}$ es de nuevo una variedad diferenciable de dimensión n (variedad inducida) cuyo atlas viene dado por

$$\mathfrak{A}_U = \left\{ (U_\alpha \cap U, \varphi_{\alpha|_{U_\alpha \cap U}}) / \ \forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{A} \right\}.$$

En efecto, como los abiertos U_α recubren a M, $V_\alpha = U_\alpha \cap U$ son abiertos en U que lo recubren. Las aplicaciones $\phi_\alpha = \varphi_{\alpha|_{U \cap U_\alpha}} : V_\alpha \to \phi_\alpha(U \cap U_\alpha) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ son homeomorfismos locales de U en $\mathbb{R}^n$. Además, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ son diferenciables al ser las restricciones a $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap U_\beta)$ de $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Ejemplo 1.15 Variedad producto

Sean $(\mathsf{M}, \mathfrak{A})$ y $(\mathsf{M}', \mathfrak{A}')$ variedades diferenciables de dimensiones n y n', respectivamente. Entonces el espacio producto $\mathsf{M} \times \mathsf{M}'$ se puede dotar, de forma canónica, de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + n'$, considerando para ello el atlas

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{ (U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \phi_\beta) / \ \forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{A} \text{ y } \ \forall (V_\beta, \phi_\beta) \in \mathfrak{A}' \right\}.$$

Ejemplo 1.16 La esfera $\mathsf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2} = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimension n.

---

(1) H. Whitney.- *Geometric integration theory,* Princeton, 1957.

(2) M. Kervaire.- *A manifolds which does not admit any differentiable structure.* Comm. Math. Helv. 35(1961), pag 1–14.

Sus abiertos coordenados son los conjuntos

$$U_{kj} = \{x \in \mathsf{S}^n / (-1)^j x^k > 0\} \qquad (j = 0, 1; \quad k = 1, 2, \dots, n+1)$$

y los homeomorfismos coordenados son

$$\varphi_{kj} \colon U_{kj} \to B_0^n(1) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\} \qquad x \mapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^{n+1}).$$

Resulta fácil demostrar que este atlas es diferenciable, pues la aplicación

$$\varphi_{kj}^{-1} \colon B_0^n(1) \to \mathsf{S}^n$$

tiene la coordenada k–ésima igual a

$$(-1)^j \left(1 - \sum_{i \neq k} (x^i)^2\right)^{1/2},$$

que es una función diferenciable en el sentido usual en $B_0^n(1)$ y φ_{kj} es la restricción de una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.17 El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ admite una estructura diferenciable de dimensión n^2.

$GL(n, \mathbb{R})$, conjunto de las matrices reales de orden n con determinante no nulo, se identifica de forma natural con un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$; así, si $\det \colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ es la aplicación determinante:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$$

y, como "det" es una función continua, $GL(n, \mathbb{R})$ se identifica con un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$. La estructura diferenciable en $GL(n, \mathbb{R})$ se obtiene ahora como en el Ejemplo 1.14.

Ejemplo 1.18 El espacio proyectivo real $P_n(\mathbb{R})$ se puede dotar de estructura de variedad diferenciable de dimensión n.

El espacio proyectivo real $P_n(\mathbb{R})$ puede definirse como el cociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ por la relación de equivalencia de proporcionalidad entre coordenadas homogéneas $x^1, \dots, x^{n+1}$.

Se puede tomar como funciones coordenadas, las funciones

$$f_\alpha^i \colon P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad [(x^1, \dots, x^{n+1})] \mapsto \frac{x^i}{x^\alpha}, \quad x^\alpha \neq 0 \quad (i, \alpha = 1, \dots, n+1)$$

y por recubrimiento, los abiertos

$$U_\alpha = \{[(x^1, \dots, x^{n+1})] / x_\alpha \neq 0\}$$

(su imagen recíproca por la proyección canónica son abiertos en $\mathbb{R}^{n+1}$).

El atlas diferenciable está formado por $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) / \alpha = 1, \dots, n+1\}$ siendo los homeomorfismos coordenados φ_α:

$$\varphi_\alpha = (f_\alpha^1, \dots, f_\alpha^{\alpha-1}, f_\alpha^{\alpha+1}, \dots, f_\alpha^{n+1}).$$

Ejemplo 1.19 La banda de Moebius

Desde el punto de vista topológico, puede ser descrita identificando un lado de un rectángulo en el plano con su opuesto, recorrido en sentido contrario, en la forma siguiente:

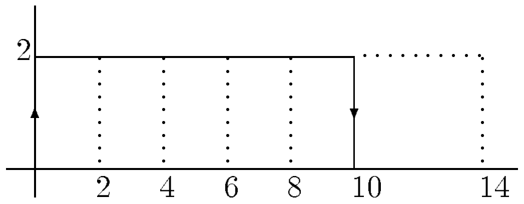


Fig. 1.3: Banda de Moebius

Consideremos en $\mathbb{R}^2$, el rectángulo

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 10, \quad 0 < y < 2\}$$

y en él definimos la relación de equivalencia siguiente:

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' & y = y' & 0 < x < 10 & 0 < y < 2 \\ x = 0,\ x' = 10 & y = 2 - y' & & 0 < y < 2 \\ x = 10,\ x' = 0 & y = 2 - y' & & 0 < y < 2 \end{cases}$$

El conjunto $\mathsf{M} = \mathcal{R}/\sim$ con la topología cociente (considerando en $\mathcal{R}$ la topología inducida por el plano) es la banda de Moebius.

Para definir en M un atlas de clase C^∞ procedemos como sigue: Sea $p\colon \mathcal{R} \to \mathsf{M}$ la proyección canónica y $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ abiertos de $\mathcal{R}$ dados por

$$\widetilde{U}_1 = \{(x,y) \in \mathcal{R} / 2 < x < 8, \ \ 0 < y < 2\}$$

$$\widetilde{U}_2 = \{(x,y) \in \mathcal{R} / 0 \le x < 4, \ \ 6 < x \le 10, \ \ 0 < y < 2\}$$

y sean $U_i = p(\widetilde{U}_i), \ i = 1, 2$, que son abiertos en M, como se comprueba inmediatamente.

Definimos ahora

$$\widetilde{\varphi}_1\colon \widetilde{U}_1 \to W_1 \subset \mathbb{R}^2 \qquad \widetilde{\varphi}_2\colon \widetilde{U}_2 \to W_2 \subset \mathbb{R}^2$$

por

$$\widetilde{\varphi}_1(x,y) = (x,y) \qquad \widetilde{\varphi}_2(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad 6 < x \le 10 \\ (10 + x, 2 - y) & \text{si} \quad 0 \le x < 4 \end{cases}$$

Es claro que $\widetilde{\varphi}_1$ y $\widetilde{\varphi}_2$ son continuas y W_1 y W_2 son los abiertos de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < x < 8, \ \ 0 < y < 2\}$$

$$W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 6 < x < 14, \ \ 0 < y < 2\}.$$

Como $\widetilde{\varphi}_1$ y $\widetilde{\varphi}_2$ son compatibles con la relación de equivalencia en $\mathcal{R}$, inducen las aplicaciones

$$\varphi_1\colon U_1 \to W_1 \qquad \text{y} \qquad \varphi_2\colon U_2 \to W_2,$$

que se comprueba que son homeomorfismos. Para ver que $\mathfrak{A}_0 = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ es un atlas de clase C^∞ en M, basta comprobar que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ y $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ son difeomorfismos. En efecto, por ejemplo, el primero

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

está dado por

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x, y) = \begin{cases} (x, y) & 6 < x < 8 \quad 0 < y < 2 \\ (10 + x, 2 - y) & 2 < x < 4 \quad 0 < y < 2 \end{cases}$$

Ejemplo 1.20 Un espacio vectorial real E de dimensión finita, tiene una estructura natural de variedad.

En efecto, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E, entonces los elementos de su base dual $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ de E^* son las funciones coordenadas de un sistema de coordenadas globales sobre E. Tal sistema de coordenadas determina una estructura diferenciable $\mathfrak{A}$ sobre E. Esta estructura diferenciable es independiente de la base elegida, pues el cambio de coordenadas estará dado por una matriz de coeficientes constantes y no singular.

Ejemplo 1.21 Sea $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, su grafo $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad n–dimensional.

En $\Gamma_f = \{\ (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) /\ x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\ \}$, consideramos un atlas constituido por una sola carta $\varphi \colon U = \Gamma_f \to \mathbb{R}^n$, definida como la proyección sobre las n primeras coordenadas: $\varphi(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^n)$. La aplicación inversa φ^{-1} está dada por

$$\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n))$$

que es, evidentemente, continua.

Ejemplo 1.22 Consideremos $\mathsf{M}_1 = (\mathbb{R}, \mathfrak{A}_1)$, donde el atlas $\mathfrak{A}_1$ consta de la única carta $1_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y la variedad $\mathsf{M}_2 = (\mathbb{R}, \mathfrak{A}_2)$, cuyo atlas está formado por la carta $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x^3$. Entonces las variedades M_1 y M_2 son distintas ya que φ^{-1} no es de clase C^1 en el origen.

No obstante, estas variedades no son esencialmente distintas, como veremos en el Ejemplo 1.39.

Ejemplo 1.23 El espacio de las configuraciones en un sistema mecánico es una variedad diferenciable de dimensión igual al número de grados de libertad del sistema.

1. El espacio de configuración de un péndulo plano es representado como los puntos de una circunferencia tomando como coordenada el ángulo que el péndulo forma con una dirección fija.

2. El péndulo esférico, punto que dista una cantidad prefijada de un punto fijo, tiene como espacio de configuración una esfera.

3. El espacio de configuración de un péndulo doble plano (resp. esférico) es $\mathsf{S}^1 \times \mathsf{S}^1$, es decir un toro (resp. $\mathsf{S}^2 \times \mathsf{S}^2$).

4. El espacio de configuración de un sólido con un punto fijo es la variedad $SO(3, \mathbb{R})$, constituida por las matrices ortogonales 3×3 con determinante igual a 1; las coordenadas que describen esta variedad son los ángulos de Euler que determinan la posición de una terna ortonormal respecto de otra.

   Se puede ver que $SO(3, \mathbb{R})$ es homeomorfo a la esfera S^3 con los puntos diametralmente opuestos identificados, que es el espacio proyectivo real de tres dimensiones $P_3(\mathbb{R})$.

5. En toda la teoría física macroscópica el fenómeno fundamental es el "suceso", punto de una variedad de cuatro dimensiones, del espacio–tiempo: de las cuatro coordenadas, tres son intrepretadas como coordenadas espaciales y una como la coordenada temporal.

Nota 1.24 Veremos más ejemplos de variedades en los párrafos dedicados al estudio de subvariedades diferenciables. En especial, en el de subgrupos de Lie.

1.3 Propiedades topológicas de una variedad diferenciable

Comentaremos aquí algunas propiedades topológicas que posee una variedad diferenciable, las cuales son consecuencia inmediata de las hipótesis impuestas al espacio topológico subyacente. Dichas hipótesis son muy poco restrictivas a la hora de considerar conjuntos sobre los que nos interesa definir una estructura diferenciable. Y además, con estas restricciones topológicas garantizamos que sobre una variedad se pueda definir conceptos como métrica, conexión e integral de una n–forma, entre otros.

En los ejemplos de variedades diferenciables, que hemos reseñado en el párrafo anterior, no nos hemos preocupado de que los conjuntos, sobre los que hemos construido atlas diferenciables, posean las propiedades topológicas requeridas en la Definición 1.2. Pues bien, que tales propiedades se cumplan, surge de alguno de los resultados que veremos a continuación.

Del hecho de ser localmente euclídea surgen las siguientes afirmaciones:

1. Una variedad diferenciable M es un espacio topológico localmente compacto.

2. Una variedad diferenciable M es localmente conexa.

3. Una variedad diferenciable M es conexa si y sólo si M es conexa por arcos.

La comprobación de las dos primeras afirmaciones es inmediata, sin más que considerar los homeomorfismos locales. En cuanto a la tercera, basta con establecer que, para $x \in \mathsf{M}$, el conjunto

$$Q = \{y \in \mathsf{M} / \text{ Existe un camino que une } x \text{ con } y \ \}$$
coincide con M; esto es, demostrar que $Q \neq \emptyset$, abierto y cerrado.

Nota 1.25 Supondremos, en caso de que una variedad n–dimensional M no sea conexa, que todas sus componentes conexas son de la misma dimensión.

Como hemos dicho las variedades diferenciables que vamos a considerar son de clase C^∞, apoyándonos en el resultado de Whitney (ver pag. 5) para variedades paracompactas. Por lo que se hace necesario recordar este concepto e indicar su relación con las propiedades topológicas impuestas a una variedad.

Definición 1.26 *Un recubrimiento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ de un espacio topológico X se dice que es un* refinamiento de un recubrimiento *dado $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si, para todo elemento V_β de $\mathcal{V}$ existe un elemento U_α de $\mathcal{U}$ que lo contiene.*

Un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de un espacio topológico X es localmente finito *si para todo punto $x \in X$, existe un conjunto abierto de X que contiene a x y que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$.*

Un espacio topológico X se llama paracompacto *si es Hausdorff, y todo recubrimiento abierto del mismo posee un refinamiento localmente finito.*

Se tiene el siguiente resultado relativo a la paracompacidad de una variedad diferenciable, que puede verse en cualquier libro de topología general [(3)] o en [10, pág. 9]:

Lema 1.27 *Si X es un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo contable (por ejemplo, una variedad), entonces es paracompacto.* ◪

Los Ejemplos 1.18 y 1.19 son casos de variedades abstractas, no definidas como subconjuntos de espacios euclídeos; en estos casos, se trata de espacios topológicos cocientes. Veamos pues los requisitos para que éstos tengan las propiedades topológicas exigidas a una variedad.

Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Denotamos por $X/\!\sim$ el espacio topológico cociente con la topología canónica (la que hace continua a la proyección canónica $p\colon X \to X/\sim$). Denotamos por $[A]$ el saturado de A (es decir, $[A] = \bigcup_{a \in A} \{x \in X / x \sim a\}$). Veamos qué condiciones debe cumplir la relación de equivalencia $\sim$ para que $X/\sim$ sea segundo contable y Hausdorff:

Lema 1.28 *Una relación de equivalencia $\sim$ sobre X es abierta (i.e. $[A]$ es abierto para todo $A \subset X$ abierto) si y sólo si la proyección canónica $p\colon X \to X/\sim$ es una aplicación abierta (i.e. la imagen de un abierto es un abierto). Cuando $\sim$ es abierta y X tiene una base contable de conjuntos abiertos (i.e. X es segundo contable), entonces también $X/\sim$ es segundo contable.*

(3) J.G. Hocking; G.S. Young .- *Topología*. Editorial Reverté. Barcelona. (pág. 85)

Demostración.- Sea $A \subset X$ un subconjunto abierto. Ya que $[A] = p^{-1}(p(A))$, si p es abierta ($p(A)$ es abierto) $[A]$ es abierto, por la definición de la topología cociente. Recíprocamente, si $[A]$ es abierto implica que $p(A)$ es abierto, luego p es abierta.

Ahora supongamos que $\sim$ es abierta y X tiene una base contable de conjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Si W es un subconjunto abierto de $X/\sim$, entonces $p^{-1}(W) = \bigcup_{j\in J} U_j$ para alguna subfamilia de $\mathcal{U}$ y $W = p(p^{-1}(W)) = \bigcup_{j\in J} p(U_j)$. Se concluye, al ser p abierta, que $\{p(U_i)\}_{i\in I}$ es una base de conjuntos abiertos para $X/\sim$. ◪

Lema 1.29 *Sea $\sim$ una relación de equivalencia abierta en un espacio topológico X. Entonces $\mathcal{R} = \{(x,y)/x \sim y\}$ es un subconjunto cerrado del espacio $X \times X$ si y sólo si el espacio topológico cociente $X/\sim$ es Hausdorff.*

Demostración.- Supongamos que $X/\sim$ es Hausdorff y que $(x,y) \notin \mathcal{R}$, esto es, $x \not\sim y$. Entonces existen entornos abiertos disjuntos U de $p(x)$ y V de $p(y)$. Sean $\widetilde{U} = p^{-1}(U)$ y $\widetilde{V} = p^{-1}(V)$, los cuales contienen a x y a y, respectivamente. Si el conjunto abierto $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ que contiene a (x,y) intersecta a $\mathcal{R}$, entonces debe contener al punto (x',y') tal que $x' \sim y'$, esto es $p(x') = p(y')$, lo que está en contradicción de la suposición de que $U \cap V = \emptyset$. Esta contradicción demuestra que $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ no intersecta a $\mathcal{R}$ y, por tanto, $\mathcal{R}$ es cerrado.

Inversamente, supongamos que $\mathcal{R}$ es cerrado. Dado cualquier par de puntos distintos $p(x), p(y)$ en $X/\sim$, existe un conjunto abierto de la forma $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ que contiene a (x,y) y sin puntos comunes con $\mathcal{R}$. Se sigue que $U = p(\widetilde{U})$ y $V = p(\widetilde{V})$ son disjuntos. Por hipótesis y por el Lema 1.28 se sigue que U y V son abiertos. Así, $X/\sim$ es Hausdorff. ◪

Utilizando los Lemas 1.28 y 1.29 podemos establecer que el espacio topológico subyacente de la variedad del Ejemplo 1.18 satisface el segundo axioma de numerabilidad y es separado:

Espacio proyectivo. Veamos primero que es segundo contable:

Según el Lema 1.28, basta demostrar que la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, que define $P_n(\mathbb{R})$, es abierta. Sea $\varphi_\lambda \colon \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, la aplicación definida por $\varphi_\lambda(x) = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$), es claramente un homeomorfismo con inversa $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$, y si $U \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ es un conjunto abierto, $[U] = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}} \varphi_\lambda(U)$ es abierto, pues $\varphi_\lambda(U)$ es un abierto.

Necesitamos aplicar el Lema 1.29 para probar que $P_n(\mathbb{R}^n)$ es Hausdorff:

Sea la función

$$f \colon (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = f(x^1, \ldots, x^{n+1}, y^1, \ldots, y^{n+1}) = \sum_{i\neq j} (x^i y^j - x^j y^i)^2.$$

Entonces f es continua y

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/x \sim y\} = f^{-1}(0)$$

es un subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})\times(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})$ y por consiguiente $P_n(\mathbb{R})$ es Hausdorff.

1.4 Funciones y aplicaciones diferenciables

Vamos a establecer el concepto de función diferenciable en una variedad M y el de aplicaciones diferenciables entre variedades, para lo cual utilizaremos el lenguaje de cartas locales y poder utilizar así el concepto de diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$ del Cálculo.

Definición 1.30 *Sea* M *una variedad diferenciable. Una función* $f:\mathsf{M}\to\mathbb{R}$ *se dice que es* diferenciable *(de clase* C^∞*) si para toda carta* (U,φ)*,* $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbb{R}$ *es una función diferenciable de clase* C^∞.

Nota 1.31 La diferenciabilidad de f depende de la estructura diferenciable de M y no de la elección de las cartas; pues si (U,φ) y (V,ϕ) son dos cartas de M con $U\cap V\neq\emptyset$, $f\circ\varphi^{-1}$ es diferenciable si y sólo si $f\circ\phi^{-1}$ es diferenciable. Esto es consecuencia del hecho de ser

$$f\circ\varphi^{-1}=(f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\varphi^{-1})$$

y de que $\phi\circ\varphi^{-1}$ es siempre diferenciable por la propia definición de variedad diferenciable.

Representaremos por $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$ el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables sobre M.

Para el estudio local es natural no sólo considerar funciones $f:\mathsf{M}\to\mathbb{R}$ definidas en todo M sino también admitir funciones que estén definidas solamente en un entorno de un punto de M:

Definición 1.32 *Sea* x *un punto de la variedad diferenciable* M*. Una función* f *se dice que es* diferenciable de clase C^∞ en un entorno del punto x *si su dominio* D_f *es abierto,* $x\in D_f$ *y* $f\in\mathfrak{F}(D_f)$*, cuando en* D_f *se considera la estructura diferenciable inducida por la de* M.

Así pues, f es diferenciable en un entorno del punto $x\in D_f$, si para toda carta (U,φ) en M con $x\in U$, la composición $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(D_f\cap U)\to\mathbb{R}$ es diferenciable de clase C^∞.

Denotaremos por $\mathfrak{F}(x)$ el conjunto de las funciones diferenciables en el entorno de x.

Algebra de las funciones diferenciables en un entorno de un punto x de una variedad M:

Si $f, g \in \mathfrak{F}(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f+g$, fg y λf, definidas por

$$(f+g)(y) = f(y)+g(y) \qquad (fg)(y) = f(y)g(y) \qquad (\lambda f)(y) = \lambda f(y), \qquad y \in D_f \cap D_g$$

son funciones con dominio la intersección de los dominios de f y de g y trivialmente $f+g,\ fg,\ \lambda f \in \mathfrak{F}(x)$, puesto que para cada carta (U, φ), con $x \in U$, se tiene

$$(f+g)\circ\varphi^{-1} = (f\circ\varphi^{-1}) + (g\circ\varphi^{-1}),$$

$$(fg)\circ\varphi^{-1} = (f\circ\varphi^{-1})(g\circ\varphi^{-1}), \qquad (\lambda f)\circ\varphi^{-1} = \lambda(f\circ\varphi^{-1}).$$

Con estas operaciones el conjunto $\mathfrak{F}(x)$ se convierte en un álgebra.

Así mismo, el conjunto de las funciones diferenciables sobre M, $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$, se dota de una estructura de álgebra.

Ejemplo 1.33 Sea (U, φ) una carta en M, y sean $(x^1, \ldots, x^n)$ las n funciones coordenadas de la carta; es decir, $x^i = r^i \circ \varphi$, $\ i = 1, 2, \ldots, n$, con $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las proyecciones dadas por $r^i(a^1, \ldots, a^n) = a^i$, que son diferenciables. Entonces, cada función coordenada $x^i \in \mathfrak{F}(x)$, $x \in U$. En efecto, basta tener en cuenta que, por la propia definición

$$x^i \circ \varphi^{-1} = r^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Definición 1.34 *Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables. Una aplicación $F\colon \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$ se dice que es* diferenciable *(de clase C^∞) si para todo $x \in \mathsf{M}_1$ existe una carta (U_1, φ_1) alrededor de x y una carta (U_2, φ_2) alrededor de $F(x)$ con $F(U_1) \subset U_2$ y tal que*

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi(U_1) \subset \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$$

es diferenciable (Fig. 1.4).

Nota 1.35 De esta definición se sigue que la aplicación F es continua, pues si B es un abierto de M_2 que contiene a $F(x)$, $\varphi_2(U_2 \cap B)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n_2}$ y $(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{-1}\big(\varphi_2(U_2 \cap B)\big)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n_1}$ (n_1, n_2 dimensiones de M_1 y M_2, respectivamente), luego $A = \varphi_1^{-1}\Big((\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{-1}\big(\varphi_2(U_2 \cap B)\big)\Big)$ es un abierto de M_1 y se verifica $F(A) \subset B$; es decir, F es continua.

Si imponemos de antemano que la aplicación $F\colon \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$ sea continua, siempre se puede lograr la condición de la definición: $F(U_1) \subset U_2$.

Además, es claro que la definición dada no depende de las cartas tomadas.

Veamos ahora una caracterización equivalente de aplicación diferenciable entre variedades:

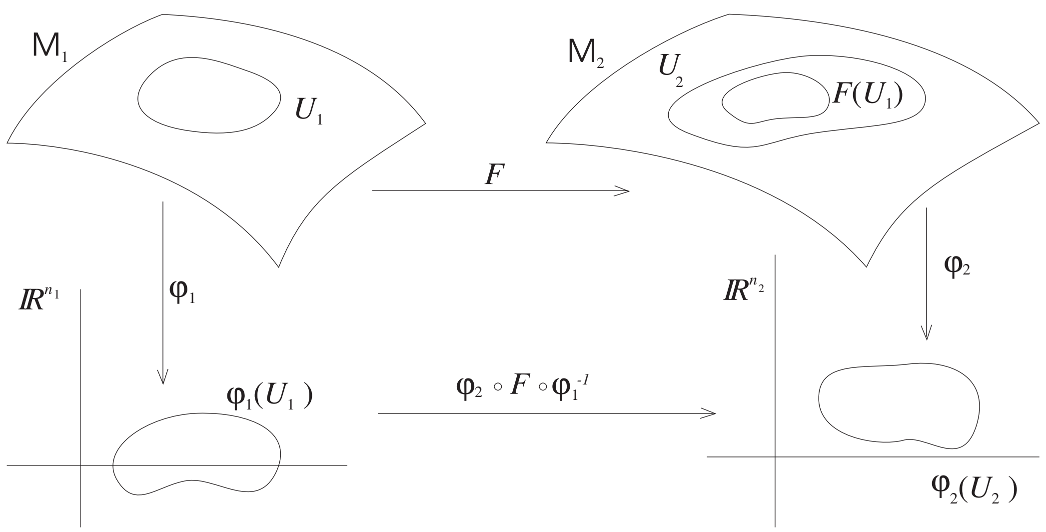


Fig. 1.4: Aplicaciones diferenciables

Proposición 1.36 *Sean* M_1 *y* M_2 *dos variedades diferenciables y* $F : \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$ *una aplicación continua, entonces* F *es diferenciable si y sólo si para toda función diferenciable* $f : W \subset \mathsf{M}_2 \to I\!R$*,* W *abierto,* $f \circ F$ *es diferenciable en* $F^{-1}(W)$*.*

Demostración.- Sean $x \in \mathsf{M}_1$, W un abierto de M_2 que contiene a $F(x)$ y una función $f \in \mathfrak{F}(W)$, demostremos que $f \circ F \in \mathfrak{F}(x)$.

Si (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son cartas alrededor de x y $F(x)$, respectivamente, tales que $F(U_1) \subset U_2$, entonces $U_1 \cap F^{-1}(U_2)$ es un entorno abierto de x. Así, al ser F diferenciable en x y $f \in \mathfrak{F}(F(x))$, resulta que $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_1(x)$ y $f \circ \varphi_2^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_2(F(x))$. Luego

$$f \circ F \circ \varphi_1^{-1} = (f \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})$$

es diferenciable en $\varphi_1(x)$; lo que quiere decir que $f \circ F$ es diferenciable en x.

Recíprocamente, para probar que F es diferenciable, tenemos que establecer que $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable, o, lo que es equivalente, que sus funciones componentes:

$$s^j \circ \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} = y^j \circ F \circ \varphi_1^{-1}$$

son diferenciables, donde $s^j : I\!R^{n_2} \to I\!R$ y $\varphi_2 = (y^1, \ldots, y^{n_2})$. Lo cual es cierto, pues basta tomar $f = y^j$, $(j = 1, \ldots, n_2)$. ◪

Denotamos por $\mathfrak{F}(\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2)$ al conjunto de las aplicaciones diferenciables de M_1 en M_2.

Ejemplo 1.37 Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta local en una variedad M y sea $\mathcal{O}_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$, abierto en $I\!R^n$, entonces

$$\varphi_\alpha \in \mathfrak{F}(U_\alpha, \mathcal{O}_\alpha) \qquad \text{y} \qquad \varphi_\alpha^{-1} \in \mathfrak{F}(\mathcal{O}_\alpha, U_\alpha).$$

En efecto, si $1_{\mathcal{O}_\alpha} : \mathcal{O}_\alpha \to \mathcal{O}_\alpha$ es la carta identidad en $\mathcal{O}_\alpha$, se tiene que

$$1_{\mathcal{O}_\alpha} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = 1_{\mathcal{O}_\alpha} \qquad \text{y} \qquad \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ 1_{\mathcal{O}_\alpha}^{-1} = 1_{\mathcal{O}_\alpha}.$$

Definición 1.38 *Dos variedades diferenciables* M_1 *y* M_2 *se dice que son* difeomorfas *si existe una aplicación diferenciable* $F : \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$ *que admita inversa* $F^{-1} : \mathsf{M}_2 \to \mathsf{M}_1$ *diferenciable. A una tal* F *se le denomina* difeomorfismo.

Ejemplo 1.39 Si M_1 y M_2 son las variedades del Ejemplo 1.22, y $F : \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$, está dada por $x \mapsto F(x) = x^{1/3}$, es un difeomorfismo. Sin embargo, $G : \mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$, definida por $x \mapsto G(x) = x$, es diferenciable, pero su inversa no lo es.

Nota 1.40 Dos variedades difeomorfas son necesariamente homeomorfas. El problema estriba en saber si dos variedades diferenciables homeomorfas son difeomorfas. Se demuestra que lo son si la dimensión es 1, 2 o 3. En el caso general es preciso decir que ello no es siempre posible, después del descubrimiento de Milnor [(4)] de la existencia de 15 estructuras diferenciables no difeomorfas sobre la esfera S^7, resultado extendido a S^9, S^{15} y S^{31}.

1.5 Espacio tangente y cotangente. Aplicaciones inducidas

Un concepto de gran importancia en la teoría local de las variedades diferenciables es el de espacio tangente en un punto. Si imaginamos que la variedad está inmersa en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, resulta intuitivo hacer corresponder a cada $p \in \mathsf{M}$ un cierto espacio vectorial: el espacio de los vectores tangentes a M en p; es decir, los vectores tangentes a las curvas sobre M que pasan por p. Así, en la esfera $\mathsf{S}^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / \|\vec{x}\| = 1\}$ inmersa en $\mathbb{R}^3$, el plano tangente en un punto p (Ejercicio 17 o Corolario 1.81) es el conjunto de vectores ortogonales al vector posición $\vec{p}$, es decir, $\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 / \vec{v} \cdot \vec{p} = 0\}$

Como, en general, tal inmersión no viene dada canónicamente, hemos de describir el espacio tangente mediante propiedades intrínsecas de la variedad. Esto es, recurrir a las cartas que forman el atlas que describe su estructura diferenciable. Así, y volviendo al caso de superficies en $\mathbb{R}^3$, un vector tangente $\vec{v}$ a una superficie M en un punto p contenido en la imagen de una representación paramétrica local

$$\vec{\mathbf{x}} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathsf{M} \subset \mathbb{R}^3 \qquad (u^1, u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$$

viene dado por

$$\vec{v} = v^1 \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial u^2}$$

(4) J. Milnor.- *On manifolds homeomorphic to the 7–sphere.* Ann. of Math., 64(1956), pág. 399–405.

es decir, un vector está determinado por un par de números reales (v^1, v^2), respecto a una representación paramétrica dada, que son sus componentes en la base $\{\partial\vec{\mathbf{x}}/\partial u^1, \partial\vec{\mathbf{x}}/\partial u^2\}$.

De nuevo aquí, recurrimos a vectores tangentes en $\mathbb{R}^3$, pero éstos se pueden entender como una aplicación que asigna a cada función diferenciable un número real determinado por el valor de la derivada direccional con respecto a ellos, en su punto de aplicación. Y a esta interpretación de vector es a la que acudiremos en una variedad.

Definición 1.41 *Un* vector tangente *a una variedad diferenciable* M *de dimensión* n *en un punto* $x \in \mathsf{M}$, *es una aplicación*

$$v\colon \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R},$$

tal que fijada una carta coordenada (U, φ) *en* M *con* $x \in U$, *existe una* n*−upla* $(a^1, \ldots, a^n)$ *de números reales tal que, para toda* $f \in \mathfrak{F}(x)$:

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}.$$

Observemos que si $v : \mathfrak{F}(x) \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica esta propiedad relativamente a una carta coordenada (U, φ) con $x \in U$, la misma propiedad se verifica también para cualquier carta coordenada (V, ϕ) con $x \in V$; es decir, existe una n–upla $(b^1, \ldots, b^n)$ de números reales tal que, $\forall f \in \mathfrak{F}(x)$,

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)}.$$

En efecto, supongamos que v tiene a $(a^1, \ldots, a^n)$ como n–upla asociada a la carta (U, φ), entonces:

$$\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} \frac{\partial(r^j\circ\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} J_i^j(\phi\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(x)} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{1=1}^{n} a^i J_i^j(\phi\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(x)} \right) \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)}
\end{aligned}$$

donde $\left(J_i^j(\phi\circ\varphi^{-1})\right)$ es la matriz jacobiana de la aplicación $\phi\circ\varphi^{-1}$.

Por tanto

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)}.$$

donde

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i J_i^j(\phi \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(x)}.$$

En consecuencia, esto significa que, para que una aplicación $v\colon \mathfrak{F}(x) \to I\!R$ sea un vector tangente en $x \in \mathsf{M}$, basta con que verifique la condición exigida en la definición con respecto a una carta coordenada (U, φ) para que automáticamente la satisfaga para todas las cartas coordenadas.

Para un punto $x \in \mathsf{M}$, representamos por $T_x(\mathsf{M})$ el conjunto de los vectores tangentes a M en x, al que llamaremos **espacio tangente** a la variedad M en x.

Sea ahora (U, φ) una carta coordenada con $x \in U$, y sean $(x^1, \ldots, x^n)$ las funciones coordenadas de esta carta. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, definimos:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\colon \mathfrak{F}(x) \to I\!R \qquad \text{por} \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}, \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(x)$$

y observemos que $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_x(\mathsf{M})$ trivialmente, puesto que la n–upla de números reales que le corresponde, relativamente a la carta (U, φ), es $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en el i–ésimo lugar.

Proposición 1.42 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. El espacio tangente $T_x(\mathsf{M})$ en un punto x es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $I\!R$ de dimensión n. Si (U, φ) es una carta coordenada con $x \in U$ y $(x^1, \ldots, x^n)$ sus funciones coordenadas, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ constituye una base de $T_x(\mathsf{M})$, denominada base canónica o natural asociada a la carta (U, φ).*

(*) Regla de la cadena:

Dada una función $G\colon I\!R^n \to I\!R$ de n variables, $G(x) = G(x^1, \ldots, x^n)$, y si cada una de las variables es reemplazada por una función, $x^k = F^k(z)$, de otra variable z, m–dimensional, $z = (z^1, \ldots, z^m)$. La función compuesta H, así formada, es una función de m variables $z^1, \ldots, z^m$, y la regla de la cadena, en este caso, consiste en un conjunto de m fórmulas, una para cada derivada parcial $D_1 H, \ldots, D_m H$, cuya fórmula para $D_r H(z)$ es

$$(D_r H)(z) = \sum_{k=1}^{n} (D_k G)(F(z))\,(D_r F^k)(z) \qquad (r = 1, \ldots, m).$$

Demostración.- De forma natural, a $T_x(\mathsf{M})$ se le dota de una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales como sigue: si v, v_1, $v_2 \in T_x(\mathsf{M})$ y $\lambda \in I\!R$, definimos

$$\begin{array}{ccc} v_1+v_2\colon \mathfrak{F}(x)\to I\!R & \lambda v\colon \mathfrak{F}(x)\to I\!R & \\ (v_1+v_2)(f)=v_1(f)+v_2(f) & (\lambda v)(f)=\lambda\, v(f) & \forall f\in\mathfrak{F}(x). \end{array}$$

Para ver que $v_1+v_2, \lambda v \in T_x(\mathsf{M})$, observemos que dada una carta coordenada (U,φ) con $x\in U$, $(a_1^1,\dots,a_1^n)$, $(a_2^1,\dots,a_2^n)$ y $(a^1,\dots,a^n)$ las n–uplas de números reales asociados a v_1, v_2 y v respectivamente, entonces $(a_1^1+a_2^1,\dots,a_1^n+a_2^n)$ es la n–upla asociada a v_1+v_2 y $(\lambda a^1,\dots,\lambda a^n)$ es la n–upla asociada a λv, ambas relativamente a la carta (U,φ).

Veamos ahora que $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ constituyen un sistema generador de $T_x(\mathsf{M})$. Sea $v\in T_x(\mathsf{M})$; entonces, asociado a la carta (U,φ), v determina una n–upla de números reales $(a^1,\dots,a^n)$ de forma que, para $f\in\mathfrak{F}(x)$ arbitraria,

$$v(f)=\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}(f)=\left(\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f),$$

luego

$$v=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

y, por tanto, $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ generan $T_x(\mathsf{M})$.

Veamos, finalmente, que son linealmente independientes. Para ello, supongamos que tenemos una combinación lineal

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}=0,$$

si se la aplicamos a cada $x^j\in\mathfrak{F}(x)$, tenemos

$$0=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial(x^j\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial r^j}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}=\sum_{i=1}^n\lambda^i\delta_i^j=\lambda^j$$

luego $\lambda^j=0,\ \ \forall j\in\{1,2,\dots,n\}$. ◪

Cambio de base de vectores tangentes canónicos en un punto $x\in\mathsf{M}$:

Sean (U,φ) y (V,ϕ) dos cartas alrededor de un punto $x\in\mathsf{M}$, $(x^1,\dots,x^n)$ y $(y^1,\dots,y^n)$ las respectivas funciones coordenadas y, finalmente, $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial}{\partial y^n}\}$ las correspondientes bases canónicas de $T_x(\mathsf{M})$. Vamos a obtener la matriz que expresa el cambio de una base a otra.

Para obtenerla, observemos que, $\forall f\in\mathfrak{F}(x)$ y cada $i=1,2,\dots,n$,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f)=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}=\frac{\partial(f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} \frac{\partial(r^j\circ\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)}$$

pero $r^j \circ \phi = y^j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, luego

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y^j\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}_{|\phi(x)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j)\frac{\partial}{\partial y^j}(f) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j)\frac{\partial}{\partial y^j}\right)(f),$$

y como f es arbitraria, se sigue

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j)\frac{\partial}{\partial y^j}}$$

lo que significa que $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j)\right)$ es la matriz cuadrada de orden n que da el cambio de base correspondiente a un cambio de cartas. Conviene observar, para clarificar las cosas, que se trata de una matriz numérica cuyos términos están dados por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j) = \frac{\partial(y^j\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \frac{\partial(r^j\circ\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)},$$

se trata pues de la matriz jacobiana de la aplicación $\phi\circ\varphi^{-1}$ de cambio de coordenadas valuada en el punto $\varphi(x)$.

Proposición 1.43 *Todo vector tangente $v \in T_x(\mathsf{M})$ satisface las siguientes propiedades, para $f, g \in \mathfrak{F}(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios:*

1) $v(f+g) = v(f) + v(g)$

2) $v(\lambda f) = \lambda v(f)$

3) $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$.

Demostración.- Las tres propiedades se demuestran de forma análoga; centrémonos, por tanto, en una de ellas, por ejemplo en la tercera.

Para ello, tomemos una carta (U, φ) arbitraria con $x \in U$ y sea $(a^1, \ldots, a^n)$ la n–upla de números reales que determina a v en este sistema de coordenadas. Entonces

$$
\begin{aligned}
v(fg) &= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial\big((fg)\circ\varphi^{-1}\big)}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial\big((f\circ\varphi^{-1})(g\circ\varphi^{-1})\big)}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} (g\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) + (f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} g(x) + \sum_{i=1}^{n} a^i f(x) \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) g(x) + f(x) \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) = \\
&= v(f)\, g(x) + f(x)\, v(g).
\end{aligned}
$$

◪

Es importante señalar que las propiedades 1), 2) y 3) de esta Proposición caracterizan totalmente a los vectores tangentes en $x \in \mathsf{M}$, las cuales se resumen diciendo que la aplicación $v\colon \mathfrak{F}(x) \to I\!R$ es una **derivación**. Es decir, de forma equivalente a la que hemos dado, se puede definir $T_x(\mathsf{M})$ como el conjunto de las derivaciones

$$
\mathfrak{D}(x) = \{v\colon \mathfrak{F}(x) \to I\!R /\ v \ \text{ es una derivación }\}.
$$

Para establecer esta equivalencia, observemos, en primer lugar, que $\mathfrak{D}(x)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales con las operaciones

$$
(v+w)(f) = v(f) + w(f), \quad (\lambda v)(f) = \lambda\, v(f) \qquad \forall v, w \in \mathfrak{D}(x) \;\; y \;\; \lambda \in I\!R.
$$

Para ver que $T_x(\mathsf{M})$ y $\mathfrak{D}(x)$ coinciden, necesitamos el siguiente lema:

Lema 1.44 *Sea (U,φ) un sistema coordenado alrededor de $x_0 \in \mathsf{M}$, con funciones coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ y tal que $x^i(x_0) = 0$, $i = 1,2,\dots,n$ y $\varphi(U) = B_0^n(\varepsilon)$. Entonces para toda función $f \in \mathfrak{F}(x_0)$, existen n funciones $f_1,\dots,f_n \in \mathfrak{F}(x_0)$, tal que*

$$
f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} x^i(x) f_i(x)
$$

para x en un entorno de x_0.

Demostración.- Sea la función diferenciable $F = f\circ\varphi^{-1} : B_0^n(\varepsilon) \subset I\!R^n \to I\!R$; para $(\xi^1,\dots,\xi^n) \in B_0^n(\varepsilon)$, ponemos

$$
\begin{aligned}
&F(\xi^1,\dots,\xi^n) = \\
&= F(\xi^1,\dots,\xi^n) - F(\xi^1,\dots,\xi^{n-1},0) + F(\xi^1,\dots,\xi^{n-1},0) \\
&\quad - F(\xi^1,\dots,\xi^{n-2},0,0) + F(\xi^1,\dots,\xi^{n-2},0,0) + \cdots \\
&\quad - F(\xi^1,0,\dots,0) + F(\xi^1,0,\dots,0) - F(0,\dots,0) + F(0,\dots,0) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left[F(\xi^1,\dots,\xi^{i-1},t\xi^i,0,\dots,0)\right]_0^1 + F(0,\dots,0) = \\
&= F(0,\dots,0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(\xi^1,\dots,\xi^{i-1},t\xi^i,0,\dots,0)\xi^i\,dt = \\
&= F(0,\dots,0) + \sum_{i=1}^{n} \xi^i F_i(\xi^1,\dots,\xi^n)
\end{aligned}
$$

donde las F_i, definidas por $F_i(\xi^1,\dots,\xi^n) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r^i}(\xi^1,\dots,\xi^{i-1},t\xi^i,0,\dots,0)\,dt$ es diferenciable. Poniendo $f_i = F_i \circ \varphi$, para $i = 1,2,\dots,n$, queda probado el lema. ◪

Proposición 1.45 *Existe un isomorfismo entre los vectores tangentes en x_0 a M y el conjunto de las derivaciones $\mathfrak{D}(x_0)$.*

Demostración.- Todo vector tangente $v \in T_{x_0}(\mathsf{M})$ verifica las propiedades de la Proposición 1.43, luego es un elemento de $\mathfrak{D}(x_0)$. En particular los elementos de la base canónica $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\} \subset \mathfrak{D}(x_0)$.

Para establecer la otra inclusión, observemos en primer lugar que

$$v(c) = 0 \qquad \text{para} \qquad v \in \mathfrak{D}(x_0) \;\; \text{y} \;\; c \in I\!R$$

pues $v(c) = v(c1) = cv(1) = cv(1\cdot 1) = c(1v(1) + 1v(1)) = 2cv(1)$, así $cv(1) = 0$ y, por tanto, $v(c) = 0$.

Tomemos ahora una carta local (U,φ) de funciones coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ alrededor de x_0, tal que (ver Nota 1.4) $\varphi(x_0) = 0$ y $\varphi(U) = B_0^n(\varepsilon)$. Demostremos, que para todo $v \in \mathfrak{D}(x_0)$, se tiene:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En efecto, $\forall f \in \mathfrak{F}(x_0)$ se tiene, utilizando el lema anterior:

$$
\begin{aligned}
v(f) &= v\Big(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} x^i f_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(v(x^i)f_i(x_0) + x^i(x_0)v(f_i)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \left(\sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f).
\end{aligned}
$$

◪

Vamos a asociar a cada aplicación diferenciable entre variedades una aplicación lineal entre sus espacios tangentes.

Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n, respectivamente, y $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ una aplicación diferenciable. Dado un punto $x \in \mathsf{M}$, consideremos su punto imagen $F(x) \in \mathsf{N}$, y los espacios tangentes $T_x(\mathsf{M})$ y $T_{F(x)}(\mathsf{N})$. Para $v \in T_x(\mathsf{M})$, vector tangente en el punto $x \in \mathsf{M}$, definimos

$$F_*(v)\colon \mathfrak{F}\big(F(x)\big) \to I\!R$$

como la aplicación dada por

$$\boxed{[F_*(v)](h) = v(h \circ F), \qquad \forall h \in \mathfrak{F}\big(F(x)\big)}$$

Observemos que esta aplicación está bien definida, puesto que $h \circ F \in \mathfrak{F}(x)$, al ser h y F diferenciables.

Proposición 1.46 *Para cada $v \in T_x(\mathsf{M})$, $F_*(v) \in T_{F(x)}(\mathsf{N})$ y la aplicación*

$$F_*\colon T_x(\mathsf{M}) \to T_{F(x)}(\mathsf{N}) \qquad v \mapsto F_*(v)$$

es lineal (i.e. homomorfismo entre espacios vectoriales).

Demostración.- Para ver que $F_*(v) \in T_{F(x)}(\mathsf{N})$ tendremos que probar que si (V, ϕ) es una carta local en N, con $F(x) \in V$, existe una n–upla $(b^1, \ldots, b^n)$ de números reales de forma que

$$[F_*(v)](h) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))} \qquad \forall h \in \mathfrak{F}(F(x))$$

donde $s^j\colon I\!R^n \to I\!R$ es la j–ésima proyección.

Para ello, consideremos una carta local arbitraria (U, φ) en M con $x \in U$, y sea $(a^1, \ldots, a^m)$ la m–upla de números reales tales que

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(x)$$

donde $r^i\colon I\!R^m \to I\!R$ es la i–ésima proyección.

Recordemos que, si $(x^1, \ldots, x^m)$ y $(y^1, \ldots, y^n)$ son las funciones coordenadas de las cartas (U, φ) y (V, ϕ), entonces $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ son bases de $T_x(\mathsf{M})$ y $T_{F(x)}(\mathsf{N})$ respectivamente. Se deduce, para $h \in \mathfrak{F}(F(x))$, que:

$$\begin{aligned}
[F_*(v)](h) &= v(h \circ F) = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(h \circ F) = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial(h \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} = \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial(h \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a^i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))} \frac{\partial(s^j \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial(y^j \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \right) \frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial s^j}_{|\phi(F(x))}.$$

Por tanto, $F_*(v) \in T_{F(x)}(\mathsf{N})$.

Como h es arbitraria, de aquí se sigue

$$F_*(v) = \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial y^j} \qquad \text{con} \qquad b^j = v(y^j \circ F), \ \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Además, estas mismas expresiones nos permiten deducir que F_* es un homomorfismo entre espacios vectoriales y deducir cual es la matriz de números reales que tiene asociada con respecto a las bases canónicas $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$. En efecto

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ F) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

de lo que se sigue que F_* es lineal, y está determinada por la matriz de coeficientes:

$$(F_*)_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ F) = \frac{\partial(s^j \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}_{|\varphi(x)} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ \ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

es decir, que F_* está representada por la matriz jacobiana, de m columnas y n filas, en el punto $\varphi(x)$, de la aplicación $\phi \circ F \circ \varphi^{-1}$. ◪

Definición 1.47 *A la aplicación lineal $F_* : T_x(\mathsf{M}) \to T_{F(x)}(\mathsf{N})$, inducida por la aplicación diferenciable $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$, entre los espacios tangentes en puntos correspondientes, le llamamos* aplicación lineal tangente de F, aplicación inducida por F *o también* diferencial de F.

Nota 1.48 Si hubiera necesidad de ello, para evitar confusiones, escribiremos $F_*(x)$, para indicar el punto de partida. Se suele tambien representar F_* por dF; sin embargo, no la utilizaremos y reservaremos la d para una situación particular (funciones diferenciables), por una parte, y para el operador diferencial exterior (Teorema 2.53).

Proposición 1.49 *Sean $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ y $G : \mathsf{N} \to \mathsf{P}$ aplicaciones diferenciables entre variedades. Entonces*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

Demostración.- Para un punto $x \in \mathsf{M}$ se tienen las aplicaciones inducidas:

$$\begin{tikzcd} T_x(\mathsf{M}) \arrow[r, "F_*"] \arrow[rr, bend right, "(G\circ F)_*"'] & T_{F(x)}(\mathsf{N}) \arrow[r, "G_*"] & T_{G(F(x))}(\mathsf{P}) \end{tikzcd}$$

Sean $v \in T_x(\mathsf{M})$ y $h \in \mathfrak{F}\big(G(F(x))\big)$ arbitrarios, entonces:

$$[(G\circ F)_*(v)](h) = v\big(h\circ(G\circ F)\big) = v\big((h\circ G)\circ F\big) =$$

$$= [F_*(v)](h\circ G) = [G_*\big(F_*(v)\big)](h) = [(G_*\circ F_*)(v)](h)$$

y como v y h son arbitrarios se sigue: $G_*\circ F_* = (G\circ F)_*$. ◪

Ejemplo 1.50 Sea M una variedad diferenciable y $U \subset \mathsf{M}$ un conjunto abierto. Entonces U tiene una estructura de variedad diferenciable, la inducida por la de M (Ejemplo 1.14), y la inclusión $i\colon U \to \mathsf{M}$ es una aplicación diferenciable. Además, $\forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, $f_{|U} \in \mathfrak{F}(U)$. Por último,

$$i_*\colon T_x(U) \to T_x(\mathsf{M}), \qquad \forall x \in U$$

es un isomorfismo, con lo que podemos identificar estos espacios tangentes.

Nota 1.51 Curvas sobre una variedad:

Consideraremos las curvas como un caso particular de aplicaciones entre variedades, pues trataremos con curvas parametrizadas.

Una curva en una variedad M es una aplicación diferenciable de un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ en M. A menudo hableremos de una curva

$$\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathsf{M},$$

donde $[a,b]$ es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, y en este caso suponemos que γ admite una extensión diferenciable a un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al intervalo $[a,b]$.

Sea $\gamma\colon I \to \mathsf{M}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, una curva diferenciable sobre M. Para cada $t \in I$, el vector tangente a la curva en el punto $\gamma(t)$ es, por definición

$$\dot\gamma(t) = \gamma_*\left(\frac{d}{dr}_{|t}\right) \in T_{\gamma(t)}(\mathsf{M}),$$

donde $\frac{d}{dr}$ es el vector básico asociado a la coordenada r de $\mathbb{R}$.

Si $(x^1,\dots,x^n)$ es un sistema de coordenadas locales alrededor del punto $\gamma(t)$, entonces

$$\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i\circ\gamma)}{dr}_{|t}\frac{\partial}{\partial x^i}_{|\gamma(t)}.$$

Habiendo definido los conceptos de curva y de vector tangente, podemos ahora dar una interpretación geométrica de la aplicación F_* inducida por la aplicación diferenciable entre variedades $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$.

Si $v \in T_x(\mathsf{M})$ tomemos una curva γ sobre M tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot\gamma(0) = v$; entonces $F \circ \gamma$ es una curva en N, verificándose $(F \circ \gamma)(0) = F(x)$ y también $\dot{\overline{F \circ \gamma}}(0) = F_*(v)$.

Observemos que tal curva γ existe, sin más que considerar una carta (U, φ) alrededor de $x \in \mathsf{M}$ y tomar, por ejemplo, la imagen mediante φ^{-1} de un segmento de la recta en $I\!R^n$ que pasa por $\varphi(x)$ y tiene la dirección del vector $\varphi_*(v)$. También observemos que la obtención del vector $F_*(v)$, no depende de la curva elegida con tal que pase por x y sea tangente a v.

Así pues, para hallar la imagen de un vector $v \in T_x(\mathsf{M})$, trazamos una curva a la que el vector v es tangente, hallamos su imagen en N y tomamos el vector tangente en esta curva, obteniéndose el vector $F_*(v)$.

Definición 1.52 *Denominamos* espacio cotangente *en el punto x de la variedad diferenciable M al espacio vectorial real $T_x^*(\mathsf{M})$ dual del espacio tangente $T_x(\mathsf{M})$ en x.*

Un elemento $\omega \in T_x^*(\mathsf{M})$ es, por definición, una aplicación lineal $\omega\colon T_x(\mathsf{M}) \to I\!R$, al cual denominaremos, indistintamente, vector cotangente, covector o 1–forma en el punto x.

Si $\big(U, (x^1, \ldots, x^n)\big)$ es una carta local con $x \in U$, la base canónica $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ de $T_x(\mathsf{M})$ nos permite definir por dualidad una base natural en el espacio cotangente $T_x^*(\mathsf{M})$ cuyos elementos los representamos por $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ y que están definidos por

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$$

donde δ^i_j son los deltas de Kronecker: $\delta^i_j = 0, \text{si } i \neq j;\ \delta^i_j = 1, \text{si } i = j.$

Veamos ahora que la aplicación lineal tangente de una función real se puede considerar como un elemento del espacio cotangente:

Sea $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ y $x \in \mathsf{M}$, entones f induce, de forma natural, una aplicación lineal

$$f_*\colon T_x(\mathsf{M}) \to T_{f(x)}(I\!R)$$

y, si se considera el isomorfismo natural,

$$\phi_{f(x)}\colon T_{f(x)}(I\!R) \to I\!R \qquad \text{dado por} \qquad \lambda\frac{d}{dr} \mapsto \lambda,$$

siendo $r\colon I\!R \to I\!R$ la función coordenada en $I\!R$. Obtenemos la aplicación

$$df = \phi_{f(x)} \circ f_*\colon T_x(\mathsf{M}) \to I\!R.$$

Veamos cómo está definida df; para ello, si $v \in T_x(\mathsf{M})$, ponemos $f_*(v) = \lambda \frac{d}{dr}$, así

$$df(v) = (\phi_{f(x)} \circ f_*)(v) = \phi_{f(x)}\left(\lambda \frac{d}{dr}\right) = \lambda$$

y tan solo nos queda por determinar este número real λ:

$$\lambda = \left(\lambda \frac{d}{dr}\right)(r) = \big(f_*(v)\big)(r) = v(r \circ f) = v(f)$$

por tanto,

$$\boxed{df(v) = v(f) \qquad \forall v \in T_x(\mathsf{M})}$$

Como consecuencia de esta relación, se tienen las siguientes propiedades, para $v, v' \in T_x(\mathsf{M})$ y $a \in \mathbb{R}$:

$$df(v+v') = (v+v')(f) = v(f) + v'(f) = df(v) + df(v')$$

$$df(av) = (av)(f) = a(v(f)) = a\, df(v)$$

y, por tanto, $df \in T_x^*(\mathsf{M})$.

Definición 1.53 *Para cada $f \in \mathfrak{F}(x)$, el elemento $df \in T_x^*(\mathsf{M})$, definido por $df(v) = v(f)$, $\forall v \in T_x(\mathsf{M})$, se denomina* diferencial *de la función f en el punto $x \in \mathsf{M}$.*

Nota 1.54 Obsérvese que, en el caso particular de $\mathsf{M} = \mathbb{R}^n$, df es la diferencial ordinaria. Además, queda justificada la notación para los elementos de la base dual $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ de $T_x^*(\mathsf{M})$, asociada a una carta local $(U, (x^1, \ldots, x^n))$, pues de hecho, como $x^i \colon U \to \mathbb{R}$, dx^i es la diferencial de x^i.

Si $f \in \mathfrak{F}(x)$, $x \in U$, entonces

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(f)\, dx^i.$$

En particular, si $\big(V, (y^1, \ldots, y^n)\big)$ es otra carta coordenada alrededor del punto x, entonces la relación entre las bases naturales $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ y $\{dy^1, \ldots, dy^n\}$ en $T_x^*(\mathsf{M})$ se expresa por

$$\boxed{dy^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j) dx^i}$$

Así como una aplicación diferenciable entre variedades $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ induce una aplicación lineal entre los espacios tangentes, veamos que ella también induce una aplicación lineal entre los espacios cotangentes en puntos correspondientes. Para ello sólo tenemos que considerar la aplicación traspuesta de F_*.

Sean $T^*_x(\mathsf{M})$ y $T^*_{F(x)}(\mathsf{N})$ los espacios contangente en $x \in \mathsf{M}$ y en su punto imagen $F(x) \in \mathsf{N}$. Para $\omega \in T^*_{F(x)}(\mathsf{N})$, 1–forma en el punto $F(x) \in \mathsf{N}$, definimos

$$F^*(\omega)\colon T_x(\mathsf{M}) \to I\!R$$

como la aplicación dada por

$$\boxed{[F^*(\omega)](v) = \omega\big(F_*(v)\big), \qquad \forall v \in T_x(\mathsf{M})}$$

Definición 1.55 *Si $F:\mathsf{M}\to\mathsf{N}$ es una aplicación diferenciable, $x \in \mathsf{M}$, un punto de M, y $\omega \in T^*_{F(x)}(\mathsf{N})$, a la 1–forma $F^*(\omega) \in T^*_x(\mathsf{M})$ se le domina* imagen recíproca de *ω por F.*

Proposición 1.56 *Sean $F\colon \mathsf{M}\to\mathsf{N}$ y $G\colon \mathsf{N}\to\mathsf{P}$ aplicaciones diferenciables entre variedades. Entonces*

$$(G\circ F)^* = F^*\circ G^*.$$

Demostración.- Para un punto $x \in \mathsf{M}$ se tienen las aplicaciones inducidas entre los espacios cotangentes:

$$\begin{tikzcd} T^*_{G(F(x))}(\mathsf{P}) \arrow[r, "G^*"] \arrow[rr, bend right, "(G\circ F)^*"'] & T^*_{F(x)}(\mathsf{N}) \arrow[r, "F^*"] & T^*_x(\mathsf{M}) \end{tikzcd}$$

Sean $\omega \in T^*_{G(F(x))}(\mathsf{P})$ y $v \in T_x(\mathsf{M})$ arbitrarios, entonces:

$$[(G\circ F)^*(\omega)](v) = \omega\big((G\circ F)_*(v)\big) = \omega\Big(G_*\big(F_*(v)\big)\Big) =$$

$$= [G^*(\omega)]\big(F_*(v)\big) = \big[F^*[G^*(\omega)]\big](v)$$

y como v y ω son arbitrarios se sigue: $F^*\circ G^* = (G\circ F)^*$. ◪

Nota 1.57 Si $x \in \mathsf{M}$, $F:\mathsf{M}\to\mathsf{N}$ aplicación diferenciable y $f:\mathsf{N}\to I\!R$ función diferenciable, como $df \in T^*_{F(x)}(\mathsf{N})$, se tiene

$$F^*(df) = d(f\circ F),$$

pues, $[F^*(df)](v) = df\big(F_*(v)\big) = [F_*(v)](f) = v(f\circ F) = d(f\circ F)(v)$, $\forall v \in T_x(\mathsf{M})$.

En particular, si $(V,(y^1,\dots,y^n))$ es una carta coordenada alrededor de $F(x)$

$$F^*(dy^j)=d(y^j\circ F)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j\circ F)\,dx^i,\qquad \forall j\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Esto nos permite calcular los términos de la matriz asociada la aplicación lineal $F^*\colon T^*_{F(x)}(\mathsf{N})\to T^*_x(\mathsf{M})$ respecto a los sistemas coordenados $(U,\varphi=(x^1,\dots,x^m))$, $(V,\phi=(y^1,\dots,y^n))$ alrededor de $x\in\mathsf{M}$ y $F(x)\in\mathsf{N}$, respectivamente:

$$(F^*)^j_i=\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j\circ F)=\frac{\partial}{\partial r^i}(y^j\circ F\circ\varphi^{-1})=\frac{\partial}{\partial r^i}(s^j\circ\phi\circ F\circ\varphi^{-1}),$$

Se trata de una matriz de n columnas y m filas, que es la traspuesta de la matriz asociada a F_*, respecto de estos mismos sistemas de coordenadas.

1.6 Rango de una aplicación diferenciable

Sea $F\colon\mathsf{N}\to\mathsf{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensiones n y m, respectivamente, y sea $x\in\mathsf{N}$. Si (U,φ) y (V,ϕ) son sistemas coordenados locales alrededor de x y de $F(x)$, respectivamente, tales que $F(U)\subset V$, entonces tenemos la correspondiente expresión de F en coordenadas locales:

$$\widehat{F}=\phi\circ F\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\phi(V)$$

$$(\xi^1,\dots,\xi^n)\longmapsto\widehat{F}(\xi^1,\dots,\xi^n)=\big(F^1(\xi^1,\dots,\xi^n),\ \dots\ ,F^m(\xi^1,\dots,\xi^n)\big).$$

Definición 1.58 *El* rango de F en x *es el rango de la matriz jacobiana de $\widehat{F}$ en $\varphi(x)$.*

Así, el rango de F en x es es el rango en $\varphi(x)$ de la matriz

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial r^1} & \dots & \dfrac{\partial F^1}{\partial r^n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial F^m}{\partial r^1} & \dots & \dfrac{\partial F^m}{\partial r^n}\end{pmatrix}_{\varphi(x)}$$

Esta definición debe ser independiente de la elección de las coordenadas. Para lo cual basta observar que la matriz anterior es la asociada a la aplicación lineal inducida entre los espacios tangentes $T_x(\mathsf{N})$ en x a N y $T_{F(x)}(\mathsf{M})$ en $F(x)$ a M, relativamente a las cartas (U,φ) y (V,ϕ):

$$F_*\colon T_x(\mathsf{N})\to T_{F(x)}(\mathsf{M})$$

pues, $F^j=s^j\circ\phi\circ F\circ\varphi^{-1}$, para $j=1,\dots,m$. Así, podemos dar la siguiente definición equivalente:

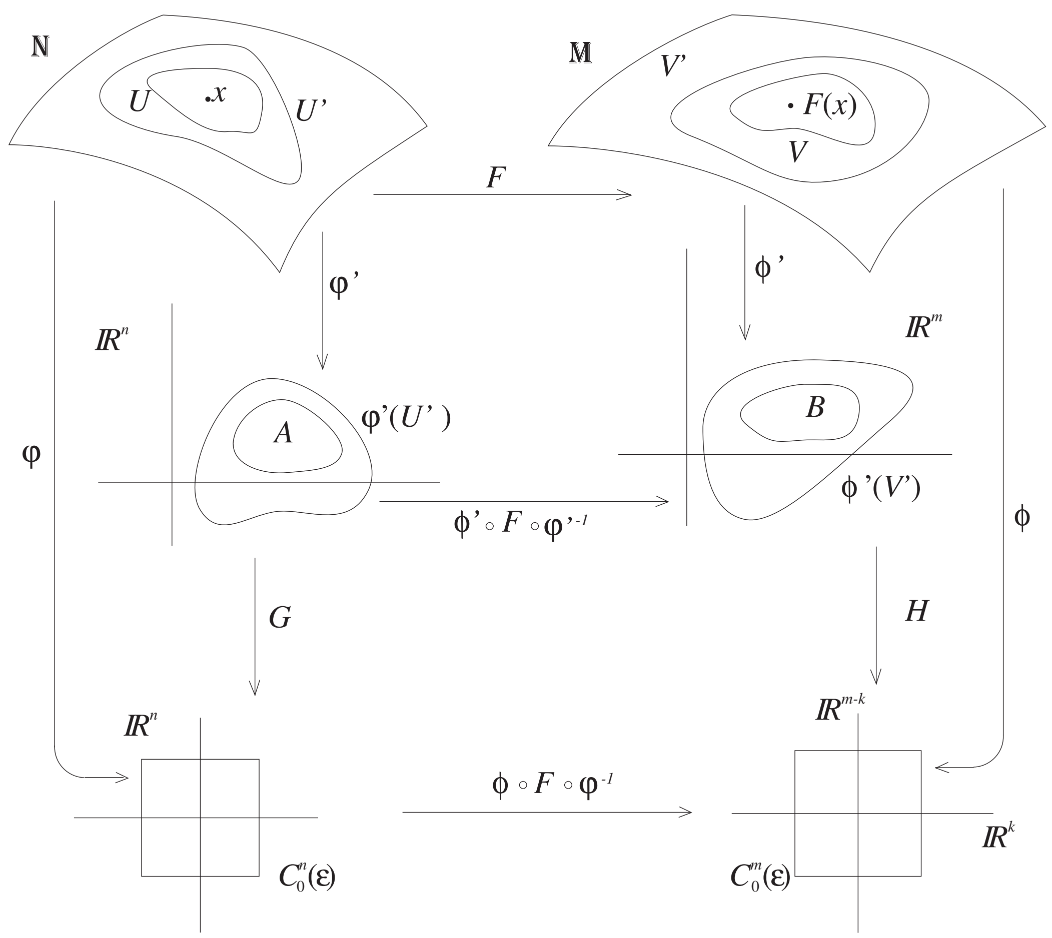


Fig. 1.5: Teorema del rango

Definición 1.59 *Se llama* rango de F en x *al rango de la aplicación lineal inducida* $F_*: T_x(\mathsf{N}) \to T_{F(x)}(\mathsf{M})$.

Proposición 1.60 (Teorema del rango) *Sea* $F: \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ *una aplicación diferenciable entre variedades de dimensiones* n *y* m*, respectivamente, y supongamos que* $rango\, F = k$ *en todo punto de* N*. Si* $x \in \mathsf{N}$*, entonces existen sistemas coordenados* (U, φ) *y* (V, ϕ) *alrededor de* x *y de* $F(x)$ *tales que* $\varphi(x) = 0 \in I\!R^n, \varphi(U) = C_0^n(\varepsilon)$ *y* $\phi(F(x)) = 0 \in I\!R^m, \phi(V) = C_0^m(\varepsilon)$ *y la expresión de* F *en coordenadas,* $\widehat{F} = \phi \circ F \circ \varphi^{-1}$*, está dada por*

$$\widehat{F}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (\xi^1, \ldots, \xi^k, 0, \ldots, 0).$$

Demostración.- Sean (U', φ') una carta alrededor de x en N y (V', ϕ') una carta alrededor del punto $F(x)$ en M, verificándose $F(U') \subset V'$, entonces la aplicación

$$\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1}: \varphi'(U') \subset I\!R^n \to \phi'(V') \subset I\!R^m$$

es diferenciable y de rango constante igual a k en $\varphi'(U')$, entonces existen (en virtud del teorema del rango entre espacios euclídeos) conjuntos abiertos $A \subset \varphi'(U')$ y $B \subset \phi'(V')$ con $\varphi'(x) \in A$ y $\phi'(F(x)) \in B$, y existen difeomorfismos $G\colon A \to C_0^n(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ y $H\colon B \to C_0^m(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$, verificando $\big(H \circ (\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1}) \circ G^{-1}\big)(C_0^n(\varepsilon)) \subset C_0^m(\varepsilon)$, tal que esta aplicación se expresa en la forma simple

$$\big(H \circ (\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1}) \circ G^{-1}\big)(\xi^1, \dots, \xi^n) = (\xi^1, \dots, \xi^k, 0, \dots, 0).$$

Consideremos ahora las cartas

$$(U, \varphi) \equiv \left(\varphi'^{-1}(A), G \circ \varphi'_{|\varphi'^{-1}(A)}\right) \quad \text{alrededor de} \quad x;$$

$$(V, \phi) \equiv \left(\phi'^{-1}(B), H \circ \phi'_{|\phi'^{-1}(B)}\right) \quad \text{alrededor de} \quad F(x),$$

con lo que

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) = C_0^n(\varepsilon) \to \phi(V) = C_0^m(\varepsilon), \quad (\xi^1, \dots, \xi^n) \longmapsto (\xi^1, \dots, \xi^k, 0, \dots, 0).$$

(ver Fig. 1.5) ◪

1.7 Subvariedades inmersas y embebidas o regulares

En esta sección discutiremos varios tipos de subvariedades de una variedad diferenciable. Este término es usado en más de un sentido en la bibliografía; sin embargo, todos coinciden en que una subvariedad N de una variedad diferenciable M es un *subconjunto* que a su vez es una variedad diferenciable. La confusión surge de que si debería o no requerirse que fuera un *subespacio* topológico de M, esto es, que tenga la topología relativa. Adoptaremos la definición más usual, a saber, una *subvariedad* diferenciable es la imagen $\mathsf{N} = F(\mathsf{N}')$ en M de una aplicación $F\colon \mathsf{N}' \to \mathsf{M}$ inyectiva y tal que $\operatorname{rango} F = \dim \mathsf{N}'$, N con la topología y estructura diferenciable que hace a $F\colon \mathsf{N}' \to \mathsf{N}$ un difeomorfismo. Nos referiremos a N en este caso como *subvariedad inmersa*. Como demuestran los Ejemplos 1.68 y 1.69, la estructura diferenciable de N puede tener una oscura y complicada relación con la de M. Una noción más natural que desarrollaremos, es la de *subvariedad regular*, que como su nombre indica, será un caso especial del anterior. Es más natural ya que su topología y estructura diferenciable se derivan directamente de la de M. Pasamos a exponer con detalle estos conceptos.

Definición 1.61 *Decimos que una aplicación diferenciable $F : \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ es una* inmersión *de N en M si el* $\operatorname{rango} F = \dim \mathsf{N}$ *en todo punto; es decir, si $F_*(x)$ es inyectiva para todo $x \in N$. Y se dice que F es* submersión *de N en M si el* $\operatorname{rango} F = \dim \mathsf{M}$ *en todo punto; es decir, si $F_*(x)$ es sobreyectiva para todo $x \in \mathsf{N}$.*

Definición 1.62 *Si $F\colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ es una inmersión inyectiva, entonces decimos que la imagen $F(\mathsf{N})$, dotada de la estructura diferenciable que hace a $F\colon \mathsf{N} \to F(\mathsf{N})$ un difeomorfismo, es una* **subvariedad** *(o* **subvariedad inmersa***) de M.*

F es un **embebimiento** *si es una inmersión inyectiva que además es homeomorfismo de N sobre su imagen $F(\mathsf{N})$, con la topología como subespacio de M. La imagen de un embebimiento se llama* **subvariedad embebida**.

Nota 1.63 También se suele decir, para indicar que $F(\mathsf{N})$ es una subvariedad, que el par (N, F) es una subvariedad de M. Cabe entonces, establecer una relación entre pares que definan una misma subvariedad: Dos subvariedades (N_1, F_1) y (N_2, F_2) de M se dice que son **equivalentes** si existe un difeomorfismo $\Phi\colon \mathsf{N}_1 \to \mathsf{N}_2$ tal que $F_1 = F_2 \circ \Phi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{N}_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathsf{M} \\
& \mathsf{N}_2 \arrow[u, "F_2"']
\end{tikzcd}$$

Esta es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las subvariedades de M. Cada clase de equivalencia tiene un único representante de la forma (A, i) donde A es un subconjunto de M con la estructura de variedad tal que la aplicación inclusión $i : A \hookrightarrow \mathsf{M}$ es una inmersión. Así, si (N, F) es un representante de la clase, entonces el subconjunto A de M debe ser $F(\mathsf{N})$. Se induce una estructura de variedad en A exigiendo que $F\colon \mathsf{N} \to A$ sea un difeomorfismo. Con esta estructura de variedad, (A, i) es una subvariedad de M equivalente a (N, F), y es la única estructura de variedad sobre A con la propiedad de que (A, i) es equivalente a (N, F).

Veamos una serie de ejemplos que ilustren las definiciones dadas; en todos ellos las variedades M y N serán espacios euclídeos o abiertos en ellos, con coordenadas cartesianas; salvo en los Ejemplos 1.66 y 1.67 donde es más cómodo, para efectuar los cálculos, considerar en $\mathbb{R}^2$ coordenadas polares.

Ejemplo 1.64 La aplicación $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dada por $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, es inyectiva y tiene rango constante igual a 1 en todo $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, su imagen $F(\mathbb{R})$, una hélice circular con eje el OZ, es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Además F es un homeomorfismo sobre su imagen, considerando en ésta la topología inducida por la de $\mathbb{R}^3$, por lo que F es un embebimiento y $F(\mathbb{R})$ es una subvariedad embebida. Fig. 1.6.

Ejemplo 1.65 Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Se trata de una aplicación de rango igual a 1 para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo no es inyectiva, ya que los puntos $t = 2k\pi + t_0$ tienen la misma imagen para cualquier entero k. Se trata de una inmersión, pero el par $(\mathbb{R}, F)$ que describe la circunferencia unidad S^1 en $\mathbb{R}^2$ no representa una subvariedad. Fig. 1.7.

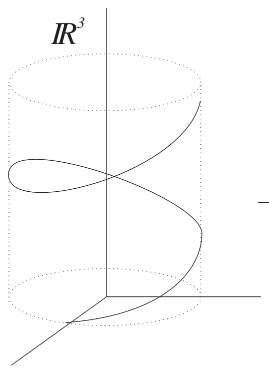


Fig. 1.6: Hélice

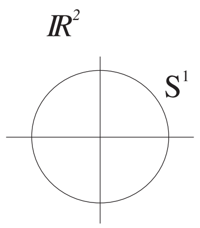


Fig. 1.7: Circunferencia

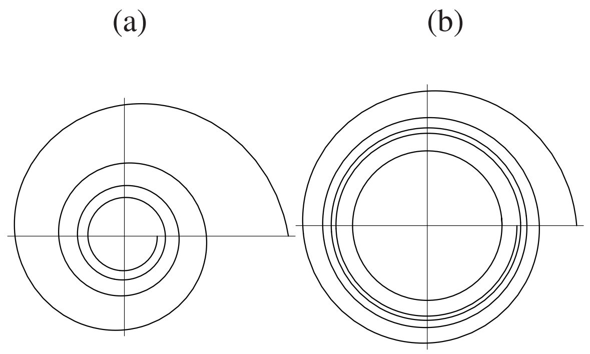


Fig. 1.8: Espirales

Ejemplo 1.66 Definimos $F:]1,\infty[\to \mathbb{R}^2$ por

$$F(t) = \left(\frac{1}{t}\cos 2\pi t, \frac{1}{t}\operatorname{sen} 2\pi t\right).$$

La imagen $F(]1,\infty[)$ es la curva espiral que tiende a $(0,0)$ cuando $t\to\infty$, y a $(1,0)$ cuando $t\to 1$. Claramente F es inmersión (como se observa utilizando coordenadas polares), inyectiva y homeomorfismo sobre su imagen, ésta con la topología inducida por $\mathbb{R}^2$. Se trata pues de una subvariedad embebida. Fig. 1.8 (a).

Ejemplo 1.67 Si definimos $F:]1,\infty[\to \mathbb{R}^2$ como

$$F(t) = \left(\frac{t+1}{2t}\cos 2\pi t, \frac{t+1}{2t}\operatorname{sen} 2\pi t\right).$$

La imagen de esta aplicación describe, como en el Ejemplo 1.66, una espiral pero en este caso se enrolla en el círculo de radio $\frac{1}{2}$ y centro en $(0,0)$ cuando $t\to\infty$ y tiende a $(1,0)$ cuando $t\to 1$. Como allí, se trata de una subvariedad embebida. Fig. 1.8 (b).

Ejemplo 1.68 La figura de "ocho" (conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$, verificando $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$) está descrita por la imagen de la aplicación

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \qquad \text{definida por} \qquad F(t) = \left(2\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen} 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

que es recorrida infinidad de veces con periodo igual a 2π. Se trata de una inmersión no inyectiva. No obstante, podemos hacer que dicha figura sea recorrida una sola vez, estableciendo previamente una biyección de $\mathbb{R}$ en el intervalo $]0,2\pi[$, de la forma siguiente:

Para $t\to-\infty$ y $t\to+\infty$, nos aproximamos al $(0,0)$ sólo como límite (ver Fig. 1.9). La inmersión está dada por un cambio de parámetro: Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una aplicación monótona creciente y diferenciable tal que

$$g(0)=\pi \qquad \lim_{t\to-\infty} g(t) = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} g(t) = 2\pi,$$

por ejemplo, podemos poner $g(t) = \pi + 2\,\mathrm{arctag}\, t$.

Entonces $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$G(t) = F\big(g(t)\big) = \Big(2\cos\big(g(t) - \frac{\pi}{2}\big), \operatorname{sen} 2\big(g(t) - \frac{\pi}{2}\big)\Big)$$

es ahora una inmersión inyectiva; por lo que $(\mathbb{R}, G)$ representa la figura de "ocho" como subvariedad inmersa en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, sigue ocurriendo que G no es un homeomorfismo sobre su imagen, ya que G^{-1} deja de ser continua en el punto $G(0)$. Fig. 1.9.

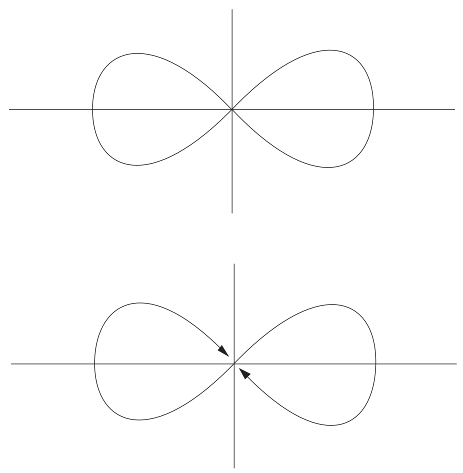


Fig. 1.9: Figura de "ocho"

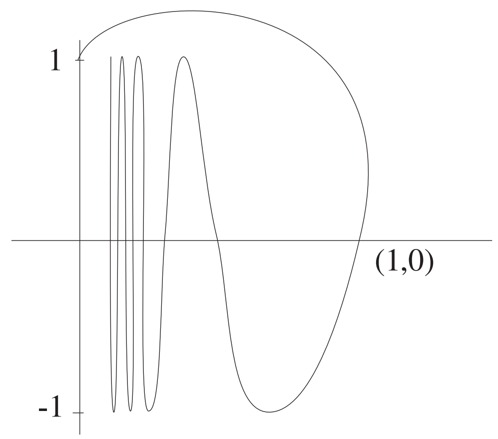


Fig. 1.10: Curva no conexa

Ejemplo 1.69 Consideremos la curva en el plano definida por la imagen de la aplicación $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(t) = \begin{cases} (0, t+2) & \text{para} \quad -\infty < t \leq -1 \\ \vec{\alpha}(t) & \text{para} \quad -1 \leq t \leq 1 \\ (\frac{1}{t}, \operatorname{sen} \pi t) & \text{para} \quad 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

siendo, $\vec{\alpha} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva que enlaza diferenciablemente los otros dos trozos. $F(\mathbb{R})$ es una subvariedad inmersa en $\mathbb{R}^2$. F no es un embebimiento, puesto que F^{-1} no es continua (basta tomar cualquier entorno de uno de sus puntos de la forma $(0, y)$, con $-1 \leq y \leq 1$). Fig. 1.10.

Nota 1.70 De los ejemplos previos podemos sacar las siguientes concluciones: Primera, no todas la inmersiones consideradas son inyectivas globalmente (Ejemplo 1.65, 1.68) aunque si son localmente inyectivas. Y segunda, una inmersión aunque sea inyectiva no es en general un homeomorfismo sobre su imagen (considerada como subespacio topológico del conjunto de llegada), Ejemplo 1.68, 1.69. No obstante, localmente esto siempre es posible como se demuestra en la proposición siguiente.

Proposición 1.71 *Sea $F : \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ una inmersión. Entonces todo $x \in \mathsf{N}$ tiene un entorno abierto U tal que $F_{|U}$ es un embebimiento de U en $F(U) \subset \mathsf{M}$.*

Demostración.- De acuerdo con el Teorema del rango constante podemos escoger sistemas coordenados cúbicos centrados en el origen (U, φ) y (V, ϕ) alrededor de $x \in \mathsf{N}$ y de $F(x) \in \mathsf{M}$, respectivamente; esto es, tales que $\varphi(x) = 0 \in I\!R^n$, $\phi(F(x)) = 0 \in I\!R^m$, con $\varphi(U) = C_0^n(\varepsilon)$ y $\phi(V) = C_0^m(\varepsilon)$, (cubos con la misma longitud de lado ε) y tal que la expresión de F en coordenadas locales, $\widehat{F} = \phi \circ F \circ \varphi^{-1}$, está dada por

$$\widehat{F}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (\xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0).$$

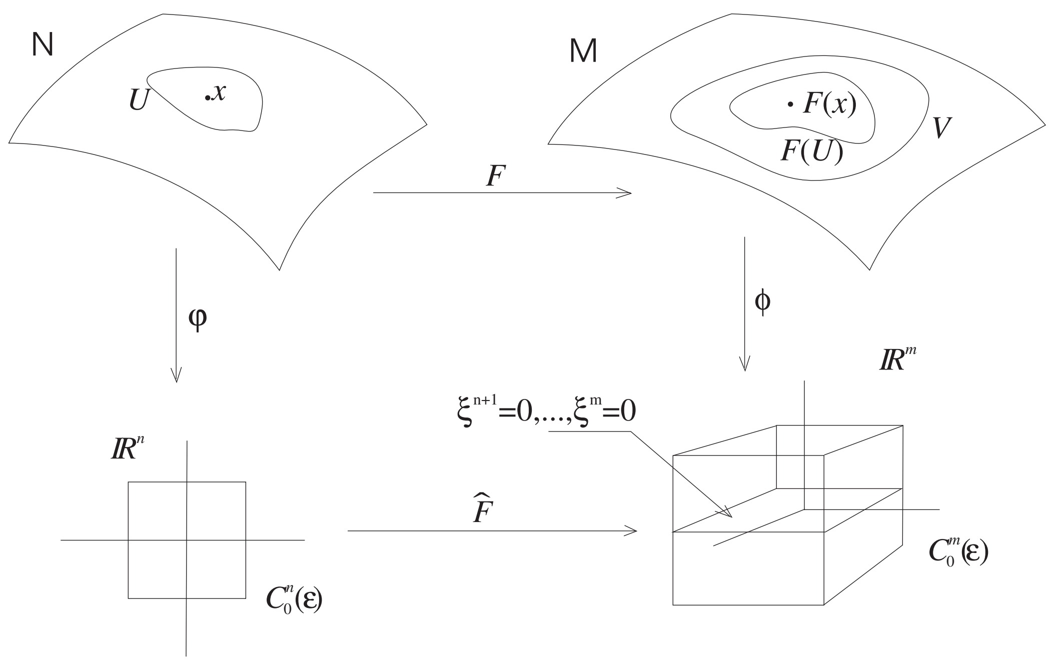


Fig. 1.11: Inmersión $\Rightarrow$ Embebimiento local

Para ver que $F_{|U}$ es un homeomorfismo de U sobre $F(U)$ con la topología relativa, observemos en primer lugar que como $F(U) \subset V$ y V es abierto en M, la topología de $F(U)$ como subespacio de M es la misma que como subespacio de V. Así $F_{|U}$ es un homeomorfismos, pues lo son las aplicaciones $\varphi : U \to C_0^n(\varepsilon)$, $\phi : V \to C_0^m(\varepsilon)$ y $\widehat{F}$ de $C_0^n(\varepsilon)$ sobre el subconjunto de $C_0^m(\varepsilon)$ definido por

$$\xi^{n+1} = 0, \ \ldots \ , \xi^m = 0.$$

◪

Esta proposición nos da la posibilidad de expresar localmente las subvariedades embebidas mediante ciertas relaciones entre la coordenadas locales de la variedad donde están contenidas. Necesitamos para ello, dar previamente unas definiciones.

Definición 1.72 *Llamamos* placa *en un sistema coordenado cúbico* (U, φ) *en una variedad* m*–dimensional* M *al conjunto* $S \subset U$ *tal que*

$$\varphi(S) = \left\{ \xi \in C_0^m(\varepsilon) \Big/ \xi^{r+1} = c^{r+1}, \; \dots \; , \xi^m = c^m \right\}.$$

Usando esta defininición podemos reenunciar la proposición anterior en la forma siguiente:

Proposición 1.73 *Si* $F \colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ *una inmersión y* $x \in \mathsf{N}$*, existe un sistema coordenado cúbico centrado en el origen* (V, ϕ) *alrededor de* $F(x) \in \mathsf{M}$ *y un entorno abierto* U *de* x*, tal que* $F_{|U}$ *es inyectiva y* $F(U)$ *es una placa en* (V, ϕ). ◪

Nota 1.74 Resaltemos que esta proposición sólo nos dice que existe un entorno U de x tal que $F(U)$ es una placa del sistema de coordenadas. No obstante, si tenemos una subvariedad (N, F), no siempre $F(\mathsf{N}) \cap V$ va a ser una placa, ni siquiera es unión de placas. Por ejemplo, consideremos el punto $(0,0)$ en la figura de "ocho". Sin embargo, en el caso de ser (N, F) una subvariedad embebida, se puede siempre elegir un sistema de coordenadas (V, ϕ) tal que $F(\mathsf{N}) \cap V$ es una única placa de V.

Profundicemos un poco más en el estudio de las subvariedades que poseen esta propiedad y su relación con las variedades embebidas.

Definición 1.75 *Un subconjunto* N *de una variedad* m*–dimensional* M*, se dice que tiene la* propiedad de una n–subvariedad $(1 \leq n \leq m)$ *si para todo punto* $x \in N$ *existe un sistema coordenado cúbico centrado en el origen* (V, ϕ) *sobre* M *alrededor de* x*, tal que*

$$\phi(V \cap N) = \left\{ \xi \in C_0^n(\varepsilon) \Big/ \xi^{n+1} = 0, \; \dots \; , \xi^m = 0 \right\}$$

es decir, $V \cap N$ *es una placa de* (V, ϕ).

A un sistema de coordenadas de este tipo se le denomina adaptado *a* N.

Proposición 1.76 *Sea* N *un subconjunto de una variedad* m*–dimensional* M*, que tiene la propiedad de una* n*–subvariedad. Entonces* N*, con la topología relativa, es una variedad diferenciable de dimensión* n *y además la inclusión* $i \colon N \hookrightarrow \mathsf{M}$ *es un embebimiento; i.e.* (N, i) *es una subvariedad embebida de* M.

Demostración.- Por definición, para todo punto $x_0 \in N$, existe un sistema coordenado cúbico centrado en el origen $\big(V, \phi = (x^1, \dots, x^m)\big)$ sobre M alrededor de x_0 tal que

$$x^{n+1}(x) = 0, \; \dots \; , x^m(x) = 0, \qquad \forall x \in V \cap N.$$

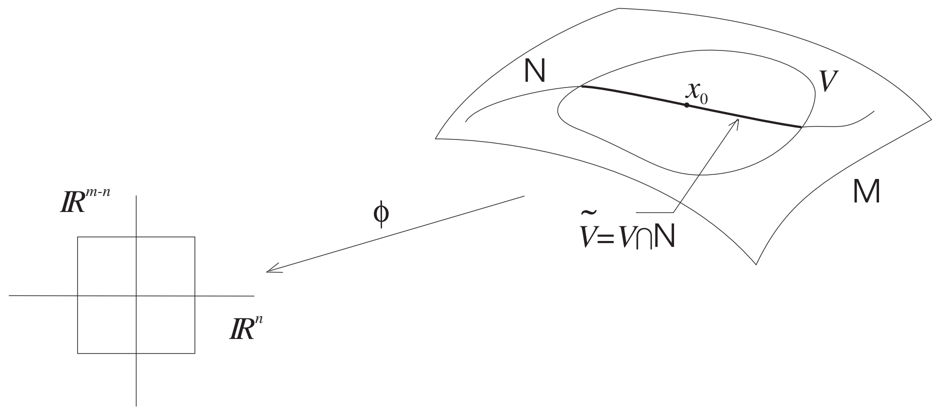


Fig. 1.12: Conjunto con la propiedad de n–subvariedad

Entonces $\widetilde{V} = V \cap N$ es un abierto en N y $\widetilde{\phi} = \pi \circ \phi_{|\widetilde{V}}$ es un homeomorfismo sobre $C_0^n(\varepsilon) = \pi(C_0^m(\varepsilon))$ en $I\!R^n$, para la topología relativa, donde $\pi\colon I\!R^m \to I\!R^n$ $(m \geq n)$ es la proyección sobre las n primeras coordenadas.

El conjunto $\widetilde{\mathfrak{A}} = \left\{(\widetilde{V}, \widetilde{\phi}) \middle/ \widetilde{V} = V \cap N, \widetilde{\phi} = \pi \circ \phi_{|\widetilde{V}},\ (V, \phi) \in \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \text{ atlas de } \mathsf{M}\right\}$ constituye un atlas que define una estructura diferenciable en N; pues:

1) Como los abiertos V recubren a M, los abiertos $\widetilde{V} = V \cap N$ recubren a N.

2) Sean $(\widetilde{V}, \widetilde{\phi})$ y $(\widetilde{V}', \widetilde{\phi}')$ dos cartas de $\widetilde{\mathfrak{A}}$ con $\widetilde{V} \cap \widetilde{V}' \neq \emptyset$, correspondientes a las cartas (V, ϕ) y (V', ϕ') de $\mathfrak{A}$, entonces

$$\widetilde{\phi}' \circ \widetilde{\phi}^{-1} \colon \phi(V \cap V' \cap N) \to \phi'(V \cap V' \cap N)$$

viene dada por la composición de aplicaciones

$$(\xi^1, ..., \xi^n) \mapsto (\xi^1, ..., \xi^n, 0, ..., 0) \overset{\phi' \circ \phi^{-1}}{\longmapsto} \left((\xi')^1, ..., (\xi')^n, 0, ..., 0\right) \mapsto \left((\xi')^1, ..., (\xi')^n\right)$$

todas ellas diferenciables.

La aplicación inclusión $i\colon N \hookrightarrow \mathsf{M}$ es diferenciable con inducida inyectiva; esto es i es una inmersión: En efecto, si $x \in N$ y (V, ϕ) es un sistema coordenado en M adaptado a N, resulta, si $\widetilde{V} = V \cap N$ y $\widetilde{\phi} = \pi \circ \widetilde{\phi}_{|\widetilde{V}}$

$$\begin{tikzcd}
x \in \widetilde{V} \subset N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\widetilde{\phi}"'] & x \in V \subset \mathsf{M} \arrow[d, "\phi"] \\
(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in C_0^n(\varepsilon) \arrow[r] & (\xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0) \in C_0^m(\varepsilon)
\end{tikzcd}$$

por tanto, $\phi \circ i \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ es diferenciable y la matriz asociada a la aplicación inducida i_*

es

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{}^{n} \\ n \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

que tiene rango n.

Como la topología de N es la relativa, la inclusión $i : N \hookrightarrow \mathsf{M}$ es un homeomorfismo sobre su imagen $i(N) = N$; esto es, i es un embebimiento. ◪

Definición 1.77 *Una* subvariedad regular *de dimensión n de una variedad m–dimensional M $(1 \leq n \leq m)$ es un subespacio topológico N con la propiedad de n–subvariedad y con la estructura diferenciable que las correspondientes cartas adaptadas determinan sobre N.*

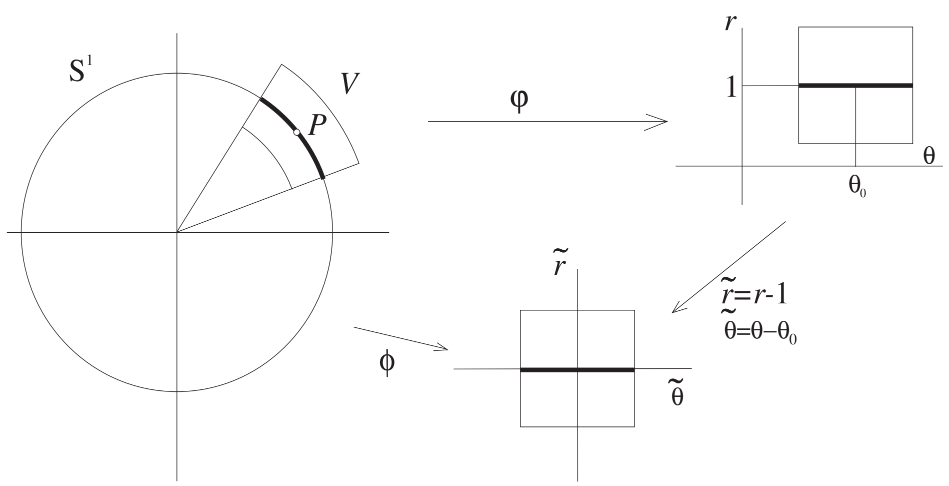


Fig. 1.13: S^1: Subvariedad regular

Ejemplo 1.78 Veamos que la circunferencia unidad $\mathsf{S}^1 = \{x \in I\!\!R^2 / \|x\| = 1\}$, que con la parametrización del Ejemplo 1.65 es una inmersión locamente inyectiva, es realmente una subvariedad regular (Fig.1.13). Sea x_0 un punto arbitrario P de S^1, introduzcamos $\varphi \equiv (\theta, r)$ las coordenadas polares usuales en $I\!\!R^2$, y si $(\theta_0, 1)$ son las coordenadas de P, cambiemos las coordenadas de tal forma que r es reemplazado por $\tilde{r} = r - 1$ y θ por $\tilde{\theta} = \theta - \theta_0$. Entonces existen funciones coordenadas

$$\phi : x \mapsto \big(\tilde{\theta}(x), \tilde{r}(x)\big)$$

definidas para x en un entorno V tal que $|\tilde{\theta}| < \varepsilon$ y $|\tilde{r}| < \varepsilon$, que definen un sistema coordenado alrededor de P, teniendo P las coordenadas $(0,0)$ y el subconjunto abierto $V \cap \mathsf{S}^1$ de S^1 corresponde a $\tilde{r} = 0$. Con lo que S^1 es pues un subvariedad regular.

Hemos definido tres clases de subvariedades en una variedad M – inmersa, embebida y regular. La primera de ellas, que usualmente llamaremos simplemente subvariedad, fue definida como la imagen $\mathsf{N} = F(\mathsf{N}')$ mediante una inmersión inyectiva F de N' en M. Ya que $F\colon \mathsf{N}' \to \mathsf{N} \subset \mathsf{M}$, tomamos (como parte de la definición) sobre N la topología y estructura diferenciable de N'; los conjuntos abiertos de N son la imagen de conjuntos abiertos en N' y las cartas de N, (U, φ) son de la forma $U = F(U')$, $\varphi = \varphi' \circ F^{-1}$, donde (U', φ') es una carta en N'. El hecho de que F sea continua implica que la topología de N obtenida por este camino es en general más fina que la topología relativa como subespacio de M, esto es, si V es un abierto de M, entonces $V \cap \mathsf{N}$ es un abierto de N, pero pueden existir abiertos de N que no sean de esta forma.

Un embebimiento es un caso particular de inmersiones inyectivas, aquellas en las que U' es un abierto de N' si y sólo si $F(U') = V \cap \mathsf{N}$ para algún abierto V de M, esto es, que la topología de la subvariedad $\mathsf{N} = F(\mathsf{N}')$ es exactamente su topología relativa como subespacio de M. Un embebimiento es así un caso particular de subvariedad (inmersa).

Finalmente si $\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$ es una subvariedad regular, entonces es también una subvariedad embebida ya que la inclusión $i\colon \mathsf{N} \hookrightarrow \mathsf{M}$ es un embebimiento.

La siguiente proposición demuestra que las subvariedades embebidas y las subvariedades regulares coinciden.

Proposición 1.79 *Sea $F : \mathsf{N}' \to \mathsf{M}$ un embebimiento de una variedad N' de dimensión n en una variedad M de dimensión m, $n \leq m$. Entonces $\mathsf{N} = F(\mathsf{N}')$ es una subvariedad regular difeomorfa a N' con respecto a la aplicación $F\colon \mathsf{N}' \to \mathsf{N}$.*

Demostración.- Sea $y = F(x) \in \mathsf{N}$ (Fig. 1.14). De acuerdo con el Teorema del rango existen entornos coordenados (U', φ') de x y $(\tilde{V}, \tilde{\phi})$ de y tal que $\varphi'(x) = (0, \ldots, 0) \in C_0^n(\varepsilon) = \varphi'(U')$, $\tilde{\phi}(y) = (0, \ldots, 0) \in C_0^m(\varepsilon) = \tilde{\phi}(\tilde{V})$, $F(U') \subset \tilde{V}$ y la aplicación $F_{|U'}$ está dada en coordenadas locales por

$$\widehat{F} = \tilde{\phi} \circ F \circ (\varphi')^{-1} : (\xi^1, \ldots, \xi^n) \longmapsto (\xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0).$$

Si ocurre que $F(U') = \widetilde{V} \cap N$, entonces el sistema coordenado $(\widetilde{V}, \widetilde{\phi})$ sería un entorno adaptado a N, y la proposición estaría demostrada. Mas esto, en principio, no ocurre, por lo que tratamos a continuación, de obtener unos nuevos entornos coordenados a partir de los dados de x e y que gocen de esta propiedad:

Como F es un embebimiento, $F(U')$ es un abierto en la topología relativa de N, esto es, $F(U') = \widetilde{W} \cap \mathsf{N}$, donde $\widetilde{W}$ es un abierto de M. Tomenos $W = \widetilde{W} \cap \widetilde{V}$; así, $\widetilde{\phi}(W)$ es un conjunto abierto de $C_0^m(\varepsilon)$ conteniendo al origen y $\widetilde{\phi}(F(U')) \subset \widetilde{\phi}(W)$

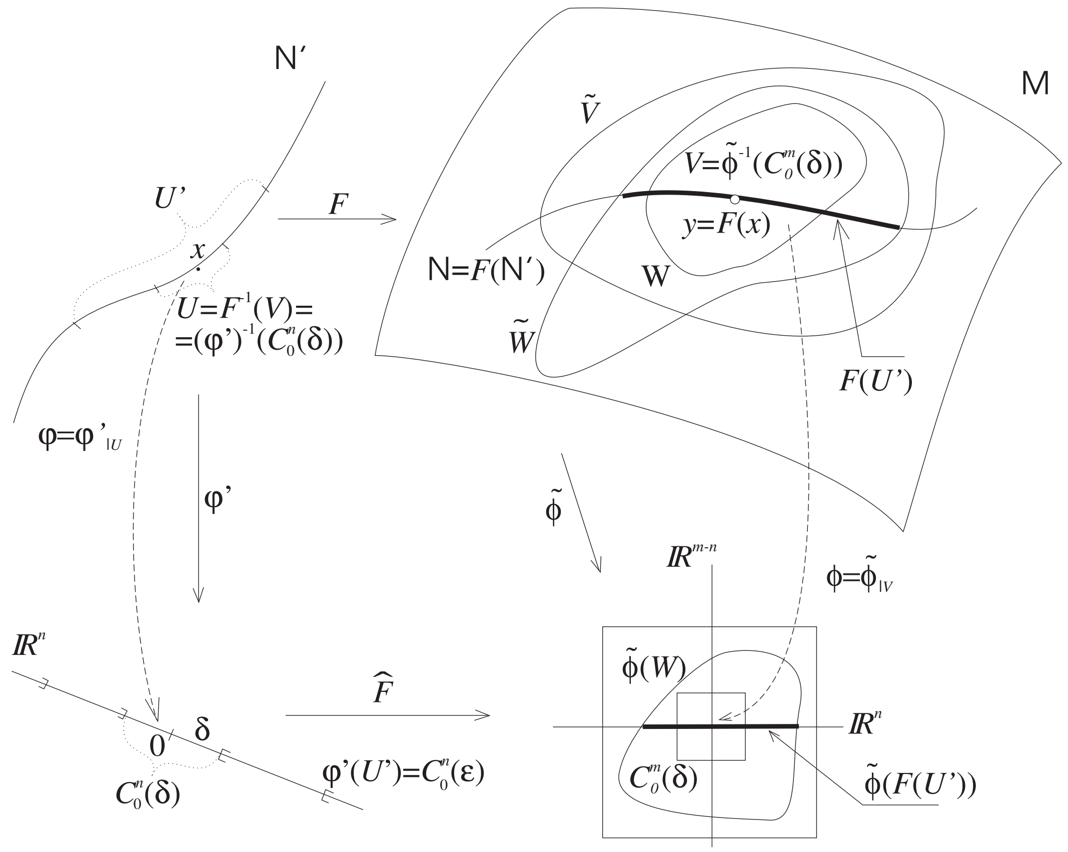


Fig. 1.14: Subvariedad embebida $\Longrightarrow$ Subvariedad regular

y $\tilde{\phi}(F(U')) \subset \left\{\xi \in C_0^m(\varepsilon) \big/ \xi^{n+1} = \cdots = \xi^m = 0\right\}$. Entonces podemos escoger un entorno cúbico suficientemente pequeño $C_0^m(\delta) \subset \tilde{\phi}(W)$; y sea

$$V = (\tilde{\phi})^{-1}(C_0^m(\delta)), \qquad \phi = \tilde{\phi}_{|V}.$$

(V, ϕ) es un entorno cúbico centrado en y, para el cual $F(U') \cap V = V \cap \mathsf{N}$; y si tomamos $U = (\varphi')^{-1}(C_0^n(\delta)) = F^{-1}(V)$, vemos que (U, φ), con $\varphi = \varphi'_{|U}$ es un entorno coordenado cúbico centrado en x y los pares (U, φ) y (V, ϕ) tienen la propiedad necesaria, es decir $F(U) = V \cap \mathsf{N}$.

Esto prueba que N goza de la propiedad de n-subvariedad y por tanto en virtud del Proposición 1.76 se trata de una subvariedad regular.

Además con esta estructura de variedad en N, F es un difeomorfismo de N' sobre N. Pues $F\colon \mathsf{N}' \to \mathsf{N}$ está dada, en los sistemas coordenados (U, φ) y $(V \cap \mathsf{N}, \pi \circ \phi)$ en N, por

$$\widehat{F} : (\xi^1, \ldots, \xi^n) \mapsto (\xi^1, \ldots, \xi^n)$$

y la aplicación inversa $\widehat{F}^{-1}$ tiene exactamente la misma expresión. Por tanto, ambas son diferenciables. ◪

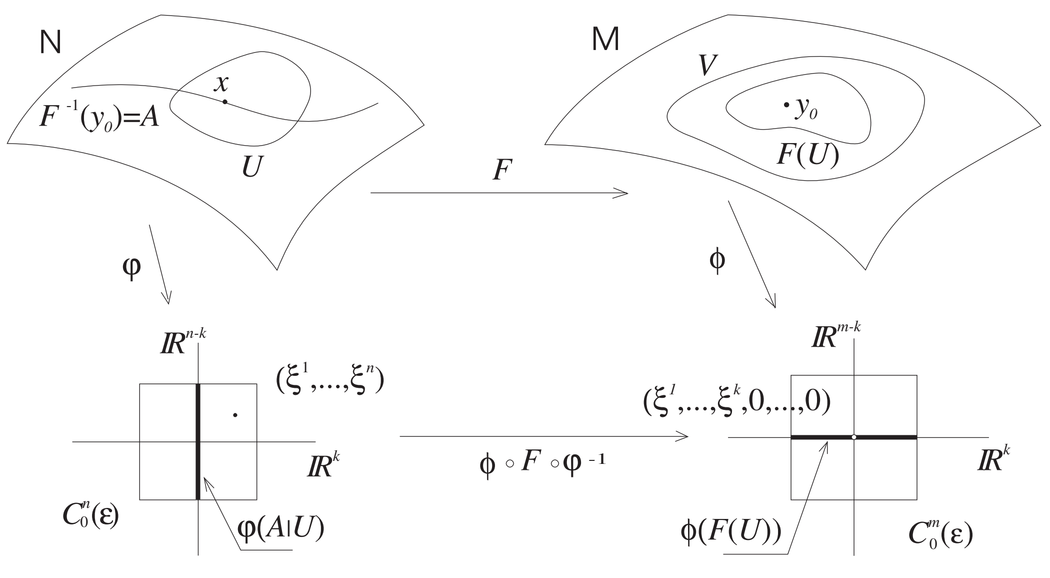


Fig. 1.15: Ejemplo subvariedad embebida

Un método para encontrar subvariedades está dado por el siguiente resultado y su corolario:

Proposición 1.80 *Sea* N *una variedad diferenciable n–dimensional,* M *una variedad m–dimensional y $F\colon \mathsf{N}\to\mathsf{M}$ una aplicación diferenciable. Supongamos que F tiene rango constante igual a k sobre* N *y que $y_0\in F(\mathsf{N})$. Entonces $F^{-1}(y_0)$ es una subvariedad regular de* N *de dimensión $n-k$.*

Demostración.- Sea $A=F^{-1}(y_0)$ (Fig. 1.15). Demostremos que A tiene la propiedad de una $(n-k)$–subvariedad. Sea $x\in A$, ya que F tiene rango constante igual a k (sobre un entorno de x), por el Teorema del rango podemos encontrar entornos coordenados (U,φ) y (V,ϕ) de x e y_0, respectivamente, tales que $\varphi(x)$ y $\phi(y_0)$ son el origen en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, $\varphi(U)=C_0^n(\varepsilon)$, $\phi(V)=C_0^m(\varepsilon)$ y en coordenadas locales $F_{|U}$ está dada por la aplicación

$$(\phi\circ F\circ\varphi^{-1})(\xi^1,\dots,\xi^n)=\widehat{F}(\xi^1,\dots,\xi^n)=(\xi^1,\dots,\xi^k,0,\dots,0).$$

Esto significa que los puntos de U que se aplican en y_0 son aquellos con las k primeras coordenadas nulas, esto es,

$$A\cap U=\varphi^{-1}\left(\widehat{F}^{-1}(0)\right)=\varphi^{-1}\left(\left\{\xi\in C_0^n(\varepsilon)\Big/\xi^1=\cdots=\xi^k=0\right\}\right).$$

Y así A es una subvariedad regular de dimensión $n-k$ ya que tiene la propiedad de subvariedad. ◪

El siguiente Colorario tiene gran importancia a la hora de dar ejemplos de subvariedades:

Corolario 1.81 *Si $F : \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ es una aplicación diferenciable entre variedades, $\dim \mathsf{N} = n \geq m = \dim \mathsf{M}$, y rango de F es igual a m (F_* sobre) en todo punto de $A = F^{-1}(y_0)$, $y_0 \in F(\mathsf{N})$, entonces A es una subvariedad regular de N. El subespacio de $T_x(\mathsf{N})$ tangente a la subvariedad A en x es el núcleo de F_*.*

Demostración.- F tiene en A el máximo rango posible, es decir m. Por el lema siguiente, $\{x \in \mathsf{N} / \operatorname{rango} F = m\}$ es un abierto; luego $A = F^{-1}(y_0)$ está contenido en un abierto en el que también F tiene rango m. Pero tal subconjunto abierto es así mismo una variedad de dimensión n, y podemos aplicar la proposición anterior, para demostrar que A es una subvariedad regular de N de dimensión $n - m$.

Si $i : A \hookrightarrow \mathsf{N}$ es la inclusión natural, la aplicación $F \circ i$ es constante y, por tanto, su aplicación inducida $F_* \circ i_*$ es idénticamente nula. En consecuencia,

$$i_*(T_x(A)) \subset \left(F_*^{-1}\right)_{|x}(0).$$

Y como estos subespacios vectoriales tienen la misma dimensión deben coincidir. ◪

Lema 1.82 *Sean N y M variedades diferenciables y $F : \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ aplicación diferenciable, entonces*

$$\mathfrak{O}_k = \left\{x \in \mathsf{N} \Big/ (\operatorname{rango} F)_x \geq k\right\}$$

es un abierto de N.

Demostración.- En efecto, sea $x_0 \in \mathfrak{O}_k$ y (U, φ) y (V, ϕ) cartas definidas alrededor de x_0 y $F(x_0)$ respectivamente. $\forall x \in U$, $(\operatorname{rango} F)_x = (\operatorname{rango}(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x)}$. Demostraremos que $\Omega = \left\{\xi \in \varphi(U) \Big/ (\operatorname{rango} \widehat{F})_\xi \geq k\right\}$ es un abierto; con lo que, al tenerse $\varphi^{-1}(\Omega) \subset \mathfrak{O}_k$, resulta que $\mathfrak{O}_k$ es abierto.

Sea $\xi_1 \in \Omega$, entonces $\operatorname{rango}(J\widehat{F})(\xi_1) \geq k$; sea $\mathfrak{M}$ una matriz cuadrada extraída de $(J\widehat{F})(\xi_1)$ de orden $\geq k$, y determinante $\neq 0$.

Definimos $\quad d : \varphi(U) \to I\!R \qquad \xi \mapsto d(\xi) = \det \mathfrak{M}(\xi),$

d es continua y $d(\xi_1) \neq 0$, luego $\exists \Omega'$ abierto, $\xi_1 \in \Omega'$ y $d(\xi) \neq 0$ en Ω', por tanto Ω es un abierto, pues

$$\forall \xi \in \Omega', \ \operatorname{rango}(J\widehat{F})(\xi) \geq k \implies \Omega' \subset \Omega.$$

◪

Ejemplo 1.83 La aplicación $F : I\!R^n \to I\!R$ definida por $F(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2$ tiene rango 1 en $I\!R^n - \{0\}$, constante en $F^{-1}(1) = \mathsf{S}^{n-1}$. Así, la esfera S^{n-1} es una subvariedad $(n-1)$–dimensional de $I\!R^n$.

Ejemplo 1.84 La aplicación $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = \left(a - (x^2+y^2)^{1/2}\right)^2 + z^2$$

tiene rango 1 en cada punto de $F^{-1}(b^2)$, $a > b > 0$. Así, el lugar geométrico $F^{-1}(b^2)$, el toro en $\mathbb{R}^3$, es una subvariedad.

Ejemplo 1.85 Los puntos que constituyen todos los planos tangentes a la esfera S^1:

$$T(\mathsf{S}^1) = \left\{(x,y)/(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 = 0\right\}$$

constituyen una subvariedad de $\mathbb{R}^6$ de dimensión 4. Pues, siempre es 2 el rango de

$$\begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 2x^3 & 0 & 0 & 0 \\ y^1 & y^2 & y^3 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}.$$

1.8 Grupos y subgrupos de Lie

Veremos en este párrafo más ejemplos de variedades, en las que además existe una estructura de grupo cuyas operaciones son diferenciables.

El espacio $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable y al mismo tiempo un un grupo abeliano cuya ley de composición está dada sumando componente a componente. Además la estructura algebraica y la estructura diferenciable están relacionadas:

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (x,y) \mapsto x+y$$

es una aplicación diferenciable de la variedad producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, esto es, la operación del grupo es diferenciable. También vemos que la aplicación

$$J\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto -x$$

es diferenciable.

Sea ahora G un grupo que es al mismo tiempo una variedad diferenciable. Para $x,y \in \mathsf{G}$ denotamos por xy el producto y por x^{-1} el inverso de x.

Definición 1.86 *G es un* grupo de Lie *si son diferenciables las aplicaciones*

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathsf{G}\times\mathsf{G} \to \mathsf{G} &\qquad (x,y) \mapsto \phi(x,y) = xy \\ J\colon \mathsf{G} \to \mathsf{G} &\qquad x \mapsto J(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.87 $GL(n, I\!R)$, el conjunto de las matrices no singulares de orden $n \times n$ con coeficientes reales, es, como hemos visto (Ejemplo 1.17), un subconjunto abierto de $\mathfrak{gl}(n, I\!R)$, conjunto de las $n \times n$ matrices reales identificadas con $I\!R^{n^2}$. Además, $GL(n, I\!R^n)$ es un grupo con respecto a la multiplicación de matrices. En efecto, una matriz A es no singular si y sólo si $\det A \neq 0$, pero $\det(AB) = (\det A)(\det B)$; así, si A y B son no singulares, AB lo es también. Una $n \times n$ matriz A no singular tiene inversa para la multiplicación; con lo que $GL(n, I\!R)$ es un grupo.

Las aplicaciones $(A, B) \mapsto AB$ y $A \mapsto A^{-1}$ son diferenciables: El producto tiene términos que son polinómios de los términos de A y B, y estos coeficientes son las expresiones en coordenadas locales de la aplicación producto, con lo que ésta es diferenciable.

La matriz inversa de $A = (a_{ij})$ puede ser escrita como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\tilde{a}_{ij}),$$

donde $\tilde{a}_{ij}$ es el adjunto de a_{ij} en A (y por tanto un polinomio en los términos de A) y $\det A$ es un polinomio de los términos de A que no se anula. Se concluye que los términos de A^{-1} son funciones racionales sobre $GL(n, I\!R)$, cuyos denominadores no se anulan, en consecuencia diferenciable.

En definitiva $GL(n, I\!R)$ es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.88 Como caso particular del ejemplo anterior resulta: $GL(1, I\!R) \equiv I\!R^*$ grupo multiplicativo de los números reales no nulos es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.89 Sea $\mathbb{C}^*$ el conjunto de los números complejos no nulos. Se trata de un grupo con la operación de multiplicación de números complejos. Además $\mathbb{C}^*$ es una variedad diferenciable de dimensión 2, recubierta con un único entorno coordenado $U = \mathbb{C}^*$ con homeomorfismo coordenado

$$\varphi\colon U \to I\!R^2 \qquad z \mapsto \varphi(z) = \varphi(x + iy) = (x, y).$$

Usando estas coordenadas la expresión del producto $w = zz', z = x + iy, z' = x' + iy'$ está dado por

$$\begin{tikzcd}
(z,z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] & \phi((z,z')) = zz' \in \mathbb{C}^* \arrow[d, "\varphi"] \\
((x,y),(x',y')) \arrow[r, "\widehat{\phi}"] & (xx' - yy', xy' + yx')
\end{tikzcd}$$

y la aplicación

$$\begin{tikzcd}
z \in \mathbb{C}^* \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\varphi"'] & z^{-1} \in \mathbb{C}^* \arrow[d, "\varphi"] \\
(x,y) \arrow[r, "\widehat{J}"] & \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)
\end{tikzcd}$$

Ambas son diferenciables, en consecuencia, $\mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.90 Si G_1 y G_2 son grupos de Lie, entonces el producto cartesiano $\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$ con la estructura diferenciable del producto cartesiano de variedades es un grupo de Lie:

Las aplicaciones

$$\begin{aligned}
\phi\colon (\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2) \times (\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2) \to \mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2 &\qquad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1y_1, x_2y_2) \\
J\colon \mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2 \to \mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2 &\qquad (x,y) \mapsto (x^{-1}, y^{-1})
\end{aligned}$$

son diferenciables.

La proposición siguiente nos permite dar muchos ejemplos de grupos de Lie:

Proposición 1.91 *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo (algebraico) que también es subvariedad regular. Entonces con su estructura diferenciable como subvariedad H es un subgrupo de Lie.*

Demostración.- Se verifica fácilmente que $\mathsf{H} \times \mathsf{H}$ es una subvariedad regular de $\mathsf{G} \times \mathsf{G}$. Así, la aplicación inclusión $i : \mathsf{H} \times \mathsf{H} \hookrightarrow \mathsf{G} \times \mathsf{G}$ es un embebimiento. Si $\phi\colon \mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathsf{G}$, $(x,y) \mapsto xy$ es la ley de composición del grupo G (ϕ diferenciable), entonces

$$\phi \circ i\colon \mathsf{H} \times \mathsf{H} \to \mathsf{G}$$

es diferenciable y $(\phi \circ i)(\mathsf{H} \times \mathsf{H}) \subset \mathsf{H}$.

Si $\phi_{|H}$ denota la aplicación $\phi \circ i$, considerada como aplicación en H, es decir

$$\phi_{|H}\colon \mathsf{H} \times \mathsf{H} \to \mathsf{H},$$

$\phi_{|H}$ no es la misma aplicación que la $\phi \circ i$, pues se ha cambiado de variedad de llegada.

Necesitamos demostrar que $\phi_{|H}$ es diferenciable, y similarmente la aplicación $J : \mathsf{H} \to \mathsf{G}$, dada por $x \mapsto J(x) = x^{-1}$, es diferenciable como aplicación en H: $J_{|H}\colon \mathsf{H} \to \mathsf{H}$.

Ambos hechos se siguen del lema que veremos a continuación, con lo que se completa la demostración. ◪

Ejemplo 1.92 La circunferencia S^1 puede ser identificada con los números complejos de módulo 1. S^1 es entonces un grupo de Lie contenido en el grupo de Lie $\mathbb{C}^*$.

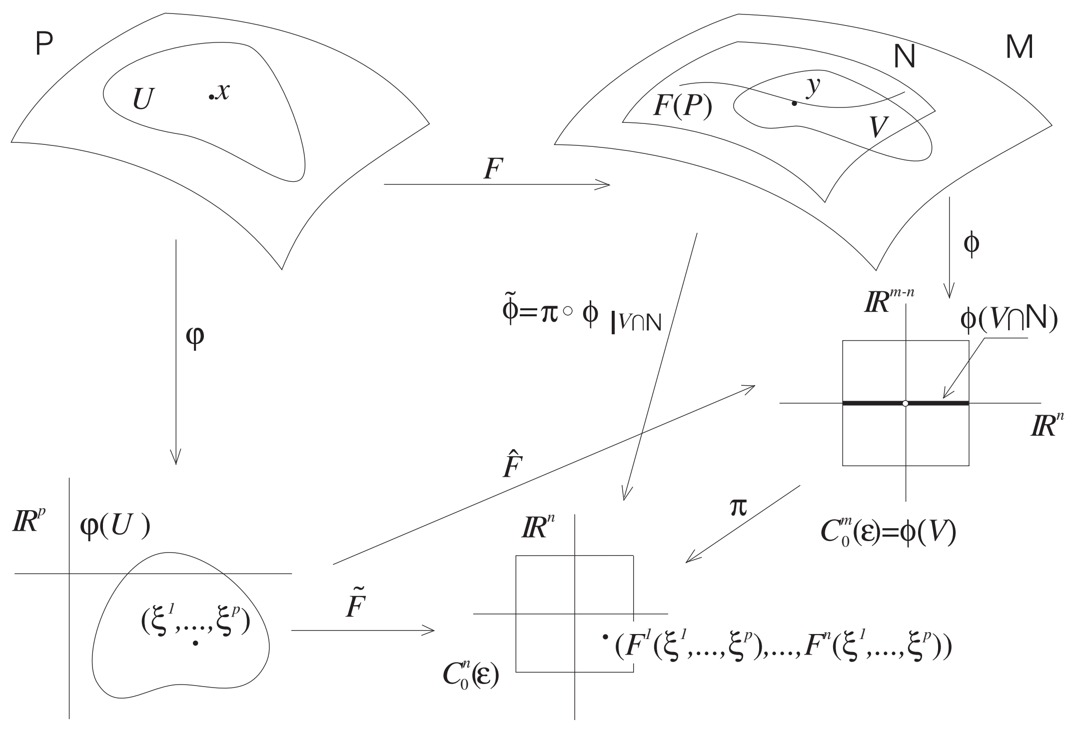


Fig. 1.16:

Establezcamos el siguiente lema al que se hace alusión en la proposición anterior.

Lema 1.93 *Sea $F\colon \mathsf{P}\to\mathsf{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, N una subvariedad regular de M tal que $F(\mathsf{P})\subset\mathsf{N}$. Entonces $F\colon\mathsf{P}\to\mathsf{N}$ es diferenciable.*

Demostración.- Ya que N es una subvariedad regular de M, cada punto de N está contenido en un entorno coordenado adaptado a N. Sea $x\in\mathsf{P}$ e $y=F(x)\in\mathsf{M}$ y sean (U,φ) un sistema coordenado alrededor de x en P y (V,ϕ) una carta adaptada alrededor de $y=F(x)$ en M, tal que $F(U)\subset V$. Tenemos $\phi(V)=C_0^m(\varepsilon)$ con $\phi(y)=(0,\ldots,0)\in I\!R^m$ ($m=\dim\mathsf{M}$) y

$$\phi(V\cap\mathsf{N})=\left\{\xi\in C_0^m(\varepsilon)/\xi^{n+1}=0,\cdots,\xi^m=0\right\}\qquad(n=\dim\mathsf{N}).$$

Entonces la expresión en coordenadas locales de F respecto a estas cartas es

$$\widehat{F}\colon\varphi(U)\to C_0^m(\varepsilon)=\phi(V)$$

$$(\xi^1,\ldots,\xi^p)\longmapsto\left(F^1(\xi^1,\ldots,\xi^p),\ldots,F^n(\xi^1,\ldots,\xi^p),0,\ldots,0\right),$$

($p=dim\ \mathsf{P}$), ya que $F(\mathsf{P})\subset\mathsf{N}$.

Ahora bien $(V\cap\mathsf{N},\tilde{\phi}=\pi\circ\phi_{|V\cap N})$ es una carta alrededor de y en N, así F considerada como aplicación en N, se expresa respecto a esta carta y a la carta

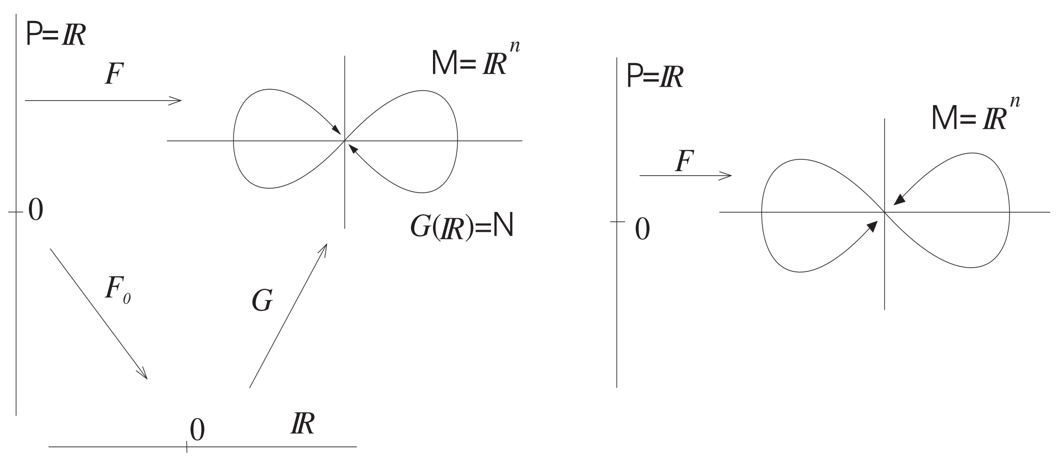


Fig. 1.17:

(U, φ) en P (ver Fig 1.16)

$$(\xi^1, \ldots, \xi^p) \stackrel{\widetilde{F}}{\longmapsto} \left(F^1(\xi^1, \ldots, \xi^p), \ldots, F^n(\xi^1, \ldots, \xi^p)\right),$$

esto es, $\widehat{F}$ compuesta con la proyección sobre las primeras n coordenadas (proyección de $I\!R^m$ en $I\!R^n$), así $\widehat{F}$ es composición de aplicaciones diferenciable y por tanto diferenciable. ◪

Nota 1.94 Este lema no se verifica, en general, si N es una subvariedad inmersa. Como ejemplo, sean $\mathsf{P} = I\!R, \mathsf{M} = I\!R^2$; $F\colon I\!R \to I\!R^2$, $G\colon I\!R \to I\!R^2$ las aplicaciones que describen la figura de "ocho" (Ejemplo 1.68) pero recorrida según indica la Fig. 1.17 y $F(0) = G(0)$; y sea la subvariedad inmersa $\mathsf{N} = G(I\!R)$.

$F\colon I\!R \to G(I\!R)$ no es continua, ya que $A = G(\,]-1, 1[\,)$ es un abierto en $G(I\!R)$ y $F^{-1}(A) = \{0\} \cup]\delta, +\infty[\cup\ ]-\infty, -\delta[$, para algún $\delta > 0$.

En el caso en que N sea una subvariedad inmersa, la aplicación $F\colon \mathsf{P} \to \mathsf{N}$ del lema, es diferenciable si es continua, más precisamente:

Proposición 1.95 *Sea $F : \mathsf{P} \to \mathsf{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades (dim P=p, dim M=m), N una subvariedad inmersa de M (dim N=n) y se verifica que $F(\mathsf{P}) \subset \mathsf{N}$ y $F : \mathsf{P} \to \mathsf{N}$ es continua. Entonces $F : \mathsf{P} \to \mathsf{N}$ es diferenciable.*

Demostración.- En efecto, sea $G : \mathsf{N}' \to \mathsf{M}$ la inmersión inyectiva que define la subvariedad N, $G(\mathsf{N}') = \mathsf{N}$. Entonces existe una única aplicación $F_0 : \mathsf{P} \to \mathsf{N}'$ continua tal que $F = G \circ F_0$. (Fig. 1.18)

F_0 es única por ser G inyectiva. F_0 es continua, pues si A es un abierto de N', entonces $G(A)$ es abierto en N, y por las hipótesis ($F\colon \mathsf{P} \to \mathsf{N}$) $F^{-1}(G(A)) = F_0^{-1}(A)$ es abierto en P.

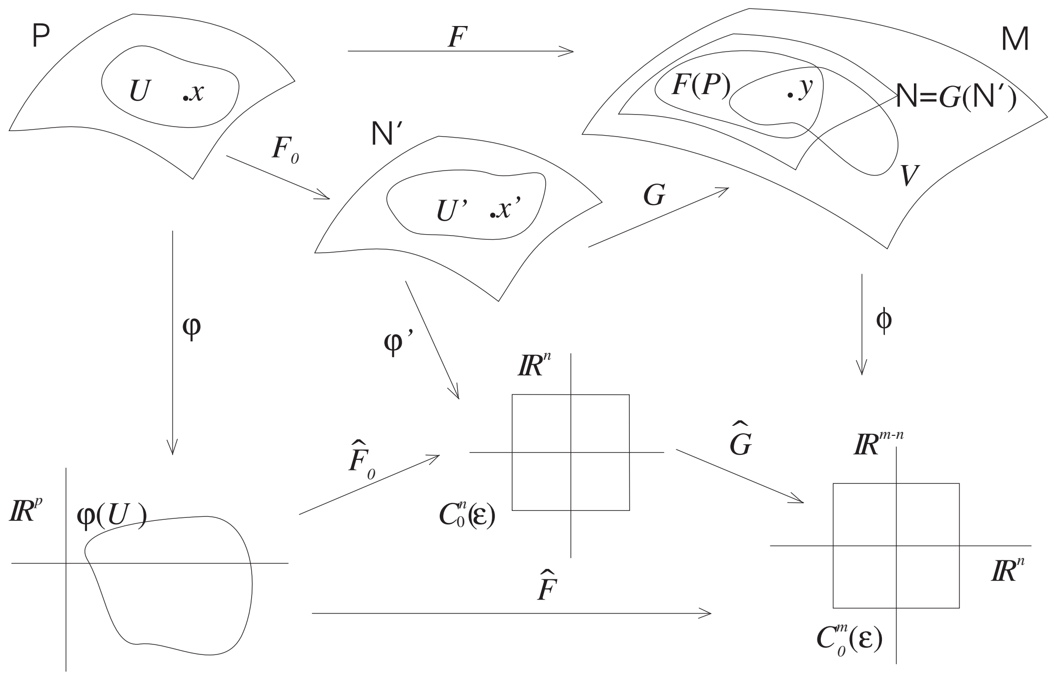


Fig. 1.18:

Para demostrar que $F\colon \mathsf{P} \to \mathsf{N}$ es diferenciable, basta probar que F_0 lo es. Para demostrar que F_0 es diferenciable procedemos de la forma siguiente:

Sean los punto $x \in \mathsf{P}$, $x' = F_0(x) \in \mathsf{N}'$ e $y = G(F_0(x)) = F(x) \in \mathsf{M}$ y los sistemas coordenados (U', φ') y (V, ϕ) en N' y M, respectivamente, tales que $x' \in U'$, $y \in V$, $G(U') \subset V$, $\varphi'(x') = (0, \dots, 0) \in I\!R^n$, $\varphi'(U') = C_0^n(\varepsilon)$, $\phi(y) = (0, \dots, 0) \in I\!R^m$, $\phi(V) = C_0^m(\varepsilon)$ y que la expresión en coordenadas de la inmersión G esté dada por

$$\widehat{G}\colon C_0^n(\varepsilon) \to C_0^m(\varepsilon), \qquad (\xi^1, \dots, \xi^n) \longmapsto (\xi^1, \dots, \xi^n, 0, \dots, 0).$$

Como F_0 es continua, existe un sistema coordenado (U, φ) en P, tal que $x \in U$ y $F_0(U) \subset U'$, que en coordenadas se expresa por

$$\widehat{F_0}\colon \varphi(U)) \to C_0^n(\varepsilon), \qquad (\eta^1, \dots, \eta^p) \longmapsto \left(\widehat{F_0}^1(\eta^1, \dots, \eta^p), \dots, \widehat{F_0}^n(\eta^1, \dots, \eta^p)\right).$$

Ocurre entonces que respecto a las cartas (U, V) y (V, ϕ) la aplicación diferenciable tiene la siguiente expresión

$$\widehat{F} = \widehat{G} \circ \widehat{F_0}\colon \varphi(U) \to C_0^m(\varepsilon),$$

$$(\eta^1, \dots, \eta^p) \longmapsto \left(\widehat{F_0}^1(\eta^1, \dots, \eta^p), \dots, \widehat{F_0}^n(\eta^1, \dots, \eta^p), 0, \dots, 0\right)$$

siendo $\widehat{F}$ diferenciable, y por tanto $r^j \circ \widehat{F} = \widehat{F_0}^j\colon \varphi(U) \to I\!R$ son diferenciables ($j = 1, \dots, n$), es decir $r^j \circ \widehat{F_0} = \widehat{F_0}^j$ son diferenciables, y por tanto $\widehat{F_0}$ es diferenciable, esto es $F_0\colon \mathsf{P} \to \mathsf{N}'$ es diferenciable. ◪

Definición 1.96 *Si* G *es un grupo de Lie, se llaman* traslación a la izquierda *y* traslación a la derecha *a las aplicaciones*

$$\begin{array}{rl} L_a \colon \mathsf{G} \to \mathsf{G} & \\ x \longmapsto L_a(x) = ax \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} R_a \colon \mathsf{G} \to \mathsf{G} & \\ x \longmapsto R_a(x) = xa \end{array}$$

donde a es un elemento fijo de G.

Proposición 1.97 *Las aplicaciones L_a y R_a son difeomorfismos y tienen como inversas a $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ y $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$.*

Demostración.- Para demostrarlo basta observa que, por ejemplo, L_a es la composición de las aplicaciones diferenciables:

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{G} & \overset{i_a}{\hookrightarrow} & \mathsf{G}\times\mathsf{G} & \overset{\phi}{\longrightarrow} & \mathsf{G} \\ x & \longmapsto & (a,x) & \longmapsto & ax \end{array}$$

donde la primera aplicación es la inclusión y la segunda la ley del grupo. Lo mismo ocurre con R_a. ◪

Ejemplo 1.98 *Grupo lineal especial.* $SL(n,\mathbb{R}) = \{X \in GL(n,\mathbb{R}) / \ \det X = 1\}$.

$SL(n,\mathbb{R})$ es un subgrupo y una subvariedad regular de $GL(n,\mathbb{R})$, y por tanto, por la proposición anterior, es un grupo de Lie. Para probar esto, consideremos la aplicación

$$F \colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \qquad X \longmapsto F(X) = \det X.$$

Como $\det(XY) = (\det X)(\det Y)$, F es un homomorfismo de grupos (abstractos), y así $Ker\ F = SL(n,\mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$. Además F es diferenciable y tiene rango constante:

Sean $A \in GL(n,\mathbb{R})$, $a = \det A$, y L_X y L_x las traslaciones en $GL(n,\mathbb{R})$ y en $\mathbb{R}^*$, respectivamente. Entonces

$$F(X) = (L_a \circ F \circ L_{A^{-1}})(X),$$

ya que se tiene $\det X = a \det(A^{-1}X)$.

Como L_a y $L_{A^{-1}}$ son difeomorfismos:

$$(\text{rango}\, F)_X = (\text{rango}(L_a \circ F \circ L_{A^{-1}}))_X = \text{rango}\,((L_a \circ F \circ L_{A^{-1}})_*(X)) =$$
$$= \text{rango}\,\big((L_a)_*(\det(A^{-1}X)) \circ F_*(A^{-1}X) \circ (L_{A^{-1}})_*(X)\big) =$$
$$= \text{rango}\,\big(F_*(A^{-1}X)\big) = (\text{rango}\, F)_{A^{-1}X}.$$

Esto es, $(\text{rango}\, F)_X = (\text{rango}\, F)_{A^{-1}X}$, $\forall A, X \in GL(n,\mathbb{R})$; con lo que tomando $A = X$, resulta

$$(\text{rango}\, F)_X = (\text{rango}\, F)_{X^{-1}X} = (\text{rango}\, F)_I.$$

Es decir, $(\text{rango}\, F)_X = cte$.

Ejemplo 1.99 *Grupo ortogonal.* $O(n) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) / X\,{}^tX = I\}$.

$O(n)$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ y una subvariedad regular y por tanto es un grupo de Lie. En efecto:

$O(n)$ es subgrupo abstracto de $GL(n, \mathbb{R})$.

Sea $F\colon GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$, $X \mapsto F(X) = {}^tX\,X$, (${}^tX$ es la traspuesta de X); F es diferenciable. Calculemos su rango:

Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$ un elemento fijo. Si Y es un elemento arbitrario de $GL(n, \mathbb{R})$, se puede poner de la forma $Y = XA^{-1}$, para un cierto $X \in GL(n, \mathbb{R})$. Por tanto para probar que el rango de F es constante, sólo es necesario establecer que rango$(F_*(X)) =$ rango$(F_*(XA^{-1}))$.

A tal fin, nótese que

$$F(XA^{-1}) = {}^t(XA^{-1})XA^{-1} = {}^tA^{-1}\,{}^tXXA^{-1} = (L_{{}^tA^{-1}} \circ R_{A^{-1}} \circ F)(X),$$

así

$$\text{rango}(F_*(XA^{-1})) = \text{rango}\left((L_{{}^tA^{-1}})_*({}^tXXA^{-1}) \circ (R_{A^{-1}})_*({}^tXX) \circ F_*(X)\right) =$$

$$= \text{rango}(F_*(X)),$$

por ser $L_{{}^tA^{-1}}$ y $R_{A^{-1}}$ difeomorfismos. Ver además el Ejercicio 43.

2

Tensores y formas diferenciales sobre una variedad

2.1 Tensores sobre espacios vectoriales reales

Necesitamos hacer un repaso de algunos hechos de álgebra multilineal sobre espacios vectoriales de dimensión finita. Para luego aplicar estos conceptos a las variedades diferenciables tomando como base diversos espacios vectoriales y álgebras asociados a sus espacios tangentes.

Definición 2.1 *Se llama* producto tensorial *de dos espacios vectoriales reales E y F a todo par (G_0, φ_0) formado por un espacio vectorial real G_0 y una aplicación bilineal $\varphi_0 \colon E \times F \to G_0$ verificando las dos condiciones siguientes:*

1. *$\varphi_0(E \times F)$ genera a G_0.*
2. *(Propiedad de factorización universal) Para todo espacio vectorial real G y toda aplicación bilineal $h \colon E \times F \to G$, existe una única aplicación lineal $\widehat{h} \colon G_0 \to G$ tal que $h = \widehat{h} \circ \varphi_0$.*

$$\begin{tikzcd} & E \times F \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dr, "h"] & \\ G_0 \arrow[rr, "\widehat{h}"'] & & G \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2 (Existencia y Unicidad) *Dados dos espacios vectoriales reales E y F, existe un único producto tensorial de E y F, salvo isomorfismo. Lo denotaremos por $(E \otimes F, \varphi)$.*

Demostración.- Existencia: Consideremos el conjunto $\Gamma = \Gamma(E, F)$ de todas las combinaciones lineales formales de elementos del producto cartesiano $E \times F$, es decir, las expresiones de la forma:

$$a = \sum_{i \in I} \alpha^i (u_i, v_i),$$

donde $(u_i, v_i) \in E \times F$ y $\alpha^i \in \mathbb{R}$, son nulos salvo para un número finito de índices.

Observemos que si $a, b \in \Gamma$, se puede siempre tratar de modificar sus expresiones añadiéndole, si es preciso, elementos (u, v) con coeficientes nulos, y suponerlos de la forma

$$a = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i (u_i, v_i) \qquad b = \sum_{i=1}^{r} \beta^i (u_i, v_i).$$

Se define sobre Γ una estructura de espacio vectorial, poniendo

$$a+b=\sum_{i=1}^{r}(\alpha^i+\beta^i)(u_i,v_i) \qquad \lambda a=\lambda\sum_{i=1}^{r}\alpha^i(u_i,v_i)$$

Así, Γ es el espacio vectorial generado por $E\times F$: $\Gamma=\widetilde{E\times F}$.

Consideremos ahora el subespacio Γ_0 de Γ engengrado por los elementos de la forma

$$(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,\mu_1v_1+\mu_2v_2)-\lambda_1\mu_1(u_1,v_1)-\lambda_1\mu_2(u_1,v_2)-\lambda_2\mu_1(u_2,v_1)-\lambda_2\mu_2(u_2,v_2)$$

con $u_1,u_2\in E$; $v_1,v_2\in F$; $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in I\!R$.

Sea el espacio vectorial cociente Γ/Γ_0 (que denotamos por $E\otimes F$) y la proyección canónica $\pi\colon\Gamma\to\Gamma/\Gamma_0$. Entonces el par $(\Gamma/\Gamma_0,\pi_{|E\times F})\equiv(E\otimes F,\varphi)$ es el producto tensorial de E y F, donde φ es la restricción $\pi_{|E\times F}\colon E\times F\to\Gamma/\Gamma_0$:

Probemos en primer lugar que φ es bilineal: Las sumas formales

$$(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v)-\lambda_1(u_1,v)-\lambda_2(u_2,v) \qquad (u,\mu_1v_1+\mu_2v_2)-\mu_1(u,v_1)-\mu_2(u,v_2)$$

pertenecen a Γ_0. En consecuencia, su imagen mediante π es nula. Así:

$$\pi\big((\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v)\big)-\lambda_1\pi\big((u_1,v)\big)-\lambda_2\pi\big((u_2,v)\big)=0$$

$$\pi\big((u,\mu_1v_1+\mu_2v_2)\big)-\mu_1\pi\big((u,v_1)\big)-\mu_2\pi\big((u,v_2)\big)=0$$

con lo que

$$\varphi\big((\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v)\big)=\lambda_1\varphi\big((u_1,v)\big)+\lambda_2\varphi\big((u_2,v)\big)$$
$$\varphi\big((u,\mu_1v_1+\mu_2v_2)\big)=\mu_1\varphi\big((u,v_1)\big)+\mu_2\varphi\big((u,v_2)\big)$$

lo que prueba que φ es bilineal.

Ya que la propiedad 1. se sigue de la construcción, tenemos sólo que probar que la 2. es válida:

Sea G un espacio vectorial real y $f\colon E\times F\to G$ una aplicación bilineal. Ya que $E\times F$ genera a $\Gamma=\Gamma(E,F)$, podemos extender f a una aplicación lineal $f'\colon\Gamma\to G$

$$f'\left(\sum_{i\in I}\alpha^i(u_i,v_i)\right)=:\sum_{i\in I}\alpha^i f\big((u_i,v_i)\big).$$

Como f es bilineal, f' se anula en Γ_0, y por tanto, f' induce una aplicación lineal $\widehat{f}\colon E\otimes F\to G$. Obviamente $f=\widehat{f}\circ\varphi$. La unicidad de $\widehat{f}$ se sigue de que $\varphi(E\times F)$ genera a $E\otimes F$.

$$\begin{tikzcd}
& E\times F \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_0"] \arrow[dd, "f"] & \\
E\otimes F \arrow[rr, shift left, "\sigma"] \arrow[dr, "\widehat{f}"'] & & G_0 \arrow[ll, shift left, "\tau"] \arrow[dl, "\widehat{f}_0"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Unicidad: Sea (G_0,φ_0) otro par gozando de la propiedad de factorización universal para $E\times F$. Por la propiedad de factorización universal de $(E\otimes F,\varphi)$ [respectivamente, de (G_0,φ_0)], existe una única aplicación lineal $\sigma: E\otimes F\to G_0$ [resp., $\tau: G_0\to E\otimes F$] tal que $\varphi_0=\sigma\circ\varphi$ [resp., $\varphi=\tau\circ\varphi_0$]. Entonces

$$\varphi = (\tau \circ \sigma) \circ \varphi \qquad \text{y} \qquad \varphi_0 = (\sigma \circ \tau) \circ \varphi_0$$

Usando la unicidad de $\widehat{f}$ en la definición de la propiedad de factorización universal, concluimos que $\tau \circ \sigma$ y $\sigma \circ \tau$ son las transformaciones identidad en $E \otimes F$ y G_0 respectivamente, esto es $\tau = \sigma^{-1}$. ◪

Si (u, v) es un elemento de Γ, su clase en $E \otimes F$, es decir, la imagen mediante la proyección canónica $\pi \colon \Gamma \to E \otimes F$, la denotamos por $u \otimes v$.

De acuerdo con la construcción de $E \otimes F$ se satisfacen las siguientes identidades:

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v \qquad u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$$

$$\lambda(u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v)$$

para todo $u, u_1, u_2 \in E$; $v, v_1, v_2 \in F$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.3 *Sea E un espacio vectorial real y consideremos a $\mathbb{R}$ como un espacio vectorial real. Entonces $\mathbb{R} \otimes E$ es isomorfo a E.*

Demostración.- En efecto, sea $f : \mathbb{R} \times E \to E$ la aplicación bilineal que define la ley externa en E. En virtud de la propiedad de la factorización universal, existe una única aplicación $\widehat{f} \colon \mathbb{R} \otimes E \to E$ tal que

$$\widehat{f}(\lambda \otimes v) = \lambda v, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \forall v \in E.$$

Por otra parte, existe una aplicación lineal $g \colon E \to \mathbb{R} \otimes E$, $\; x \longmapsto g(x) = 1 \otimes x$, tal que $\widehat{f} \circ g = 1_E$ y $g \circ \widehat{f} = 1_{\mathbb{R} \otimes E}$; en consecuencia, $\widehat{f}$ es un isomorfismo. ◪

Proposición 2.4 *$E \otimes F$ y $F \otimes E$ son canónicamente isomorfos.*

Demostración.- Sea $f : E \times F \to F \otimes E$ la aplicación bilineal definida por $f\big((u, v)\big) = v \otimes u$. Factorizando $E \times F$, existe una única $\widehat{f} : E \otimes F \to F \otimes E$ aplicación lineal, tal que $\widehat{f}(u \otimes v) = v \otimes u$. Simultáneamente, existe una única aplicación lineal $\widehat{f}' \colon F \otimes E \to E \otimes F$ tal que $\widehat{f}'(v \otimes u) = u \otimes v$. Es obvio que $\widehat{f}' \circ \widehat{f}$ y $\widehat{f} \circ \widehat{f}'$ son las transformaciones identidad en $E \otimes F$ y $F \otimes E$, respectivamente; con lo que $\widehat{f} \colon E \otimes F \to F \otimes E$ es un isomorfismo, y se tiene pues una biyección lineal canónica de $E \otimes F$ y $F \otimes E$. ◪

Nota 2.5 En caso de ser $E = F$ se ve que existe una biyección lineal única de $E \otimes E$ en sí mismo, que envia $u \otimes v$ sobre $v \otimes u$, para $u, v \in E$. Pero no podemos identificar $u \otimes v$ con $v \otimes u$, pues esta biyección no es la identidad. (La misma situación aparece en el producto cartesiano: Si A, B son dos conjuntos; $(x, y) \mapsto (y, x)$ es una biyección de $A \times B$ sobre $B \times A$; para $A = B$, esta biyección no es la identidad).

Proposición 2.6 *$(E \otimes F) \otimes G$ y $E \otimes (F \otimes G)$ son canónicamente isomorfos a $E \otimes F \otimes G$.*

Demostración.- En efecto, procediendo de forma análoga que para la definición de producto tensorial de dos espacios vectoriales, se define el producto tensorial $H_0 = E \otimes F \otimes G$ y una aplicación trilineal canónica $\varphi_0 \colon E \times F \times G \to E \otimes F \otimes G$ denotada por

$$\varphi_0(u, v, w) = u \otimes v \otimes w.$$

De esta forma toda aplicación trilineal $f \colon E \times F \times G \to (E \otimes F) \otimes G$ se prolonga a una aplicación lineal única

$$\widehat{f} \colon E \otimes F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G \quad \text{tal que} \quad \widehat{f}(u \otimes v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w.$$

Existe una aplicación lineal $g \colon (E \otimes F) \otimes G \to E \otimes F \otimes G$ definida por $(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes v \otimes w$ tal que $\widehat{f} \circ g$ y $g \circ \widehat{f}$ son identidades. Luego $E \otimes F \otimes G$ y $(E \otimes F) \otimes G$ son canónicamente isomorfos.

Se demuestra de forma similar que $E \otimes F \otimes G \simeq E \otimes (F \otimes G)$. El producto tensorial es pues asociativo. ◪

Proposición 2.7 *Dadas a las aplicaciones lineales* $f_i : E_i \to F_i$, $i = 1, 2$, *existe una única aplicación lineal*

$$f \colon E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2, \; f(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2), \; \forall v_1 \in E_1, \; \forall v_2 \in E_2.$$

Demostración.- Consideremos la aplicación bilineal

$$g \colon E_1 \times E_2 \to F_1 \otimes F_2 \quad \text{definida por} \quad (v_1, v_2) \longmapsto g\big((v_1, v_2)\big) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2),$$

existe entonces, por la propiedad de factorización universal, una única aplicación lineal

$$f \colon E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2, \; f(v_1 \otimes v_2) = g\big((v_1, v_2)\big) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2), \;\; \forall (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2.$$

◪

Nota 2.8 La aplicación f obtenida en esta Proposición 2.7 la denotaremos por $f_1 \otimes f_2$ producto tensorial de f_1 y f_2. La generalización al caso de más de dos aplicaciones es inmediata.

Proposición 2.9 *Si E,F,G son espacios vectoriales reales, el conjunto* $\mathfrak{L}_2(E \times F, G)$, *de todas las aplicaciones bilineales de* $E \times F$ *en* G, *es isomorfo a* $\mathfrak{L}(E \otimes F, G)$, *aplicaciones lineales de* $E \otimes F$ *en* G.

Demostración.- Dada una aplicación bilineal $f : E \times F \to G$, la propiedad de factorización universal de $E \times F$, nos permite asegurar la existencia de una única aplicación lineal $\widehat{f} \colon E \otimes F \to G$. Podemos entonces definir la aplicación

$$\Phi \colon \mathfrak{L}_2(E \times F, G) \to \mathfrak{L}(E \otimes F, G) \qquad f \longmapsto \Phi(f) = \widehat{f}.$$

Esta aplicación está bien definida, es lineal, inyectiva y sobreyectiva; en consecuencia, Φ es un isomorfismo: $\mathfrak{L}_2(E \times F, G) \simeq \mathfrak{L}(E \otimes F, G)$. ◪

Corolario 2.10 *Si E y F son espacios vectoriales reales*

$$(E \otimes F)^* \simeq \mathfrak{L}_2(E \times F, \mathbb{R}).$$ ◪

Proposición 2.11 *Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con $dim\, E = n$ y $dim\, F = m$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E y $\{f_1, \ldots, f_m\}$ es una base de F, entonces $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m}$ es una base de $E \otimes F$ y $dim\, E \otimes F = (dim\, E)(dim\, F) = nm$.*

Demostración.- Definimos las aplicaciones

$$\phi^{\ell k} \colon E \times F \to \mathbb{R} \qquad \text{por} \qquad \phi^{\ell k}\big((e_i, f_j)\big) = \delta_i^\ell \delta_j^k \quad (i, \ell = 1, \ldots, n;\ j, k = 1, \ldots, m)$$

Estas aplicaciones se extienden por linealidad a todos los elementos de $E \times F$ y son linealmente independientes en $\mathfrak{L}_2(E \times F, \mathbb{R})$. En efecto, si

$$\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \lambda_{\ell k} \phi^{\ell k} = 0, \qquad \lambda_{\ell k} \in \mathbb{R}$$

entonces

$$0 = \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \lambda_{\ell k} \phi^{\ell k}\big((e_i, f_j)\big) = \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \lambda_{lk} \delta_i^\ell \delta_j^k = \lambda_{ij}.$$

Por tanto, y por el corolario anterior, $dim\, (E \otimes F)^* = dim\, \mathfrak{L}_2(E \times F, \mathbb{R}) \geq nm$.

Ahora bien, todo elemento $u \otimes v = \varphi\big((u, v)\big)$ es combinación lineal de $e_i \otimes f_j = \varphi\big((e_i, f_j)\big)$, y ya que $\varphi(E \times F)$ genera a $E \otimes F$, se sigue que $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m}$ genera a $E \otimes F$. Así, se tiene la otra desigualdad:

$$dim\, (E \otimes F)^* = dim\, E \otimes F \leq nm.$$ ◪

Proposición 2.12 *Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces*

$$E^* \otimes F \simeq \mathfrak{L}(E, F).$$

Demostración.- Consideremos la aplicación bilineal

$$f \colon E^* \times F \to \mathfrak{L}(E, F) \qquad \Big(f\big((\theta, v)\big)\Big)(u) = \theta(u) v,\ \forall \theta \in E^*,\ \forall u \in E,\ \forall v \in F,$$

que al factorizarla a través de $E^* \otimes F$, existe una única aplicación lineal

$$\widehat{f} \colon E^* \otimes F \to \mathfrak{L}(E, F) \qquad \text{tal que} \qquad \big(\widehat{f}(\theta \otimes v)\big)(u) = \theta(u) v.$$

Probemos que $\widehat{f}$ es un isomorfismo: Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ su base dual en E^* y $\{f_1, \ldots, f_m\}$ un a base de F. Demostremos que

$$\Big\{\widehat{f}(e^i \otimes f_j) / 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\Big\}$$

son linealmente independientes; si

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \lambda_i^j \widehat{f}(e^i \otimes f_j) = 0, \qquad \lambda_i^j \in \mathbb{R}$$

entonces

$$0 = \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \lambda_i^j \widehat{f}(e^i \otimes f_j) \right)(e_k) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \lambda_i^j \delta_k^i f_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^j f_j = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

y de aquí, al ser $\{f_1, \ldots, f_m\}$ una base, resulta $\lambda_i^j = 0$.

Ahora bien, ya que $dim\ E^* \otimes F = dim\, \mathfrak{L}(E,F) = nm$, $\widehat{f}$ es un isomorfismo de $E^* \otimes F$ sobre $\mathfrak{L}(E,F)$. ◪

Proposición 2.13 *Dados dos espacios vectoriales E y F de dimensión finita, se tiene*

$$E^* \otimes F^* \simeq (E \otimes F)^*.$$

Demostración.- Por la propiedad de factorización universal de $E^* \times F^*$, la aplicación bilineal $f\colon E^* \times F^* \to (E \otimes F)^*$ definida por

$$\Big(f\big((\alpha,\beta)\big)\Big)(u \otimes v) = \alpha(u)\beta(v), \quad \forall (u,v,\alpha,\beta) \in E \times F \times E^* \times F^*$$

da lugar a una aplicación lineal $\widehat{f}\colon E^* \otimes F^* \to (E \otimes F)^*$ tal que

$$\big(\widehat{f}(\alpha \otimes \beta)\big)(u \otimes v) = \alpha(u)\beta(v) \quad \forall (u,v,\alpha,\beta) \in E \times F \times E^* \times F^*.$$

Para probar que $\widehat{f}$ es un isomorfismo, basta con tomar bases en E, F, E^*, F^*, y proceder como en la demostración de la proposición precedente. ◪

2.2 Algebra tensorial

Definimos ahora varios espacios tensoriales asociados a un espacio vectorial real fijo E, de dimensión finita.

Definición 2.14 *Para un entero positivo r, llamamos a* $\bigotimes^r E = E \otimes \overset{r)}{\cdots} \otimes E$ espacio tensorial contravariante de grado r. *Un elemento de* $\bigotimes^r E$ *se denomina* tensor contravariante de grado r. *Si* $r = 1$, $\bigotimes^1 E = E$, *y por convenio agregamos que* $\bigotimes^0 E = \mathbb{R}$.

Similarmente, $\bigotimes_s E = E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^*$ *se llama* espacio tensorial covariante de grado s, *y sus elementos,* tensores covariantes de grado s. *Entonces* $\bigotimes_1 E = E^*$, *y convenimos en que* $\bigotimes_0 E = \mathbb{R}$.

Definimos el espacio tensorial de tipo (r,s), *o espacio tensorial de grado contravariante r y de grado covariante s, como el producto tensorial*

$$\bigotimes_s^r E = (\bigotimes^r E) \otimes (\bigotimes_s E) = E \otimes \overset{r)}{\cdots} \otimes E \otimes E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^*,$$

a sus elementos le denominamos tensores de tipo (r,s).

Componentes de un tensor. Criterio de tensorialidad

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ su base dual en E^*, entonces una base de $\bigotimes_s^r E$ está formada por los elementos del conjunto

$$\left\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} / 1 \leq i_k, j_\ell \leq n,\ 1 \leq k \leq r,\ 1 \leq \ell \leq s\right\}.$$

Todo tensor de tipo (r,s) puede expresarse de forma única por

$$t = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \cdots i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 \cdots j_s \leq n}} t_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s},$$

donde los $t_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ son denominadas **componentes** de t respecto a la base $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$.

Para un cambio de base en E, las componentes de los tensores sufren las siguientes transformaciones:

Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ dos bases de E relacionadas por la transformación lineal

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n A_i^j e_j, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

El correspondiente cambio de las bases duales en E^* está dado por

$$\bar{e}^i = \sum_{j=1}^n B_j^i e^j, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

donde $B = (B_j^i)$ es la matriz inversa de la matriz $A = (A_j^i)$ tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^n A_j^i B_k^j = \delta_k^i$.

Así para las componentes del tensor de tipo (r,s) expresado arriba tenemos la siguiente transformación:

$$\boxed{t_{\ j_1 \cdots j_s}^{\ i_1 \cdots i_r} = \sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_r \leq n \\ 1 \leq \ell_1, \ldots, \ell_s \leq n}} A_{k_1}^{i_1} \cdots A_{k_r}^{i_r} B_{j_1}^{\ell_1} \cdots B_{j_s}^{\ell_s}\ \bar{t}_{\ \ell_1 \cdots \ell_s}^{\ k_1 \cdots k_r} \qquad \begin{pmatrix} 1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \ldots, j_s \leq n \end{pmatrix}}$$

Es ésta la ley de transformación tensorial que constituye un criterio de tensorialidad, que nos permite averiguar cuando una serie de números reales son las componentes de un tensor.

Definición 2.15 *Al espacio vectorial suma directa* $T(E) = \sum_{r,s\geq 0} \bigotimes_s^r E$, *siendo* $\bigotimes_0^0 E = I\!R$, *se denomina* álgebra tensorial *de* E.

Un elemento de $T(E)$ es de la forma $\sum_{r,s\geq 0} K_s^r$, donde $K_s^r \in \bigotimes_s^r E$ y son nulos salvo un número finito de ellos. Cada elemento de $T(E)$ se denomina simplemente tensor.

Sobre $T(E)$ se define una estructura de álgebra graduada, asociativa, con elemento unidad y no conmutativa sobre $I\!R$, definiendo un producto

$$\otimes : T(E) \times T(E) \to T(E)$$

de la forma siguiente: si

$$u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s \in \bigotimes_s^r E \quad \text{y} \quad v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^q \in \bigotimes_q^p E,$$

por definición, $u \otimes v \in \bigotimes_{s+q}^{r+p} E$ es el elemento

$$u \otimes v = u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^q,$$

y se extiende este producto por linealidad a todo $T(E)$. Así tenemos la ley de composición

$$\otimes : T(E) \times T(E) \to T(E) \qquad (K, L) \in \bigotimes_s^r E \times \bigotimes_q^p E \longmapsto K \otimes L \in \bigotimes_{s+q}^{r+p} E$$

En términos de componentes, si K está dado por $K_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$ y L por $L_{\ell_1\cdots\ell_q}^{k_1\cdots k_p}$, entonces

$$(K \otimes L)_{j_1\cdots j_{s+q}}^{i_1\cdots i_{r+p}} = K_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} L_{j_{s+1}\cdots j_{s+q}}^{i_{r+1}\cdots i_{r+p}}$$

Definición 2.16 *Los elementos de* $T(E)$ *que pertenecen a* $\bigotimes_s^r E$ *se denominan* tensores homogéneos *de grado (r,s). Un tensor homogéneo se dice* descomponible *si puede ser escrito de la forma*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s$$

con $v_i \in E$ *y* $\omega^j \in E^*$, $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s)$.

Definición 2.17 *Sean* $r, s \geq 1$, *enteros; para cada par ordenado de enteros* (ℓ, k), *tales que* $1 \leq \ell \leq r$ *y* $1 \leq k \leq s$, *se le asocia una aplicación lineal, llamada* contracción *y denotada por* $\mathcal{C}_\ell^k$:

$$\mathcal{C}_\ell^k : \bigotimes_s^r E \to \bigotimes_{s-1}^{r-1} E$$

$$\mathcal{C}^k_\ell(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s) =$$
$$= \omega^k(v_\ell) v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v_\ell} \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\omega^k} \otimes \cdots \otimes \omega^s,$$

donde $v_i \in E$, $\omega^j \in E^*$ $(i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s)$ *y* $\widehat{\ }$ *significa que ese término se suprime.*

En términos de componentes la contración $\mathcal{C}^k_\ell$ aplica un tensor $K \in \bigotimes^r_s E$ de componentes $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ en un tensor $\mathcal{C}^k_\ell K \in \bigotimes^{r-1}_{s-1} E$, cuyas componentes, con respecto a bases duales, están dadas por

$$(\mathcal{C}^k_\ell K)^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{s-1}} = \sum_{h=1}^n K^{i_1\cdots i_{\ell-1} h i_\ell \cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{k-1} h j_k \cdots j_{s-1}}.$$

Interpretación de tensores como aplicaciones multilineales

Proposición 2.18 $\bigotimes_s E = E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^*$ *es canónicamente isomorfo al espacio vectorial* $\mathfrak{L}_s(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E, I\!R)$*, de todas las aplicaciones multilineales de* $E \times \overset{s)}{\cdots} \times E$ *en* $I\!R$*.*

Demostración.- Si factorizamos la aplicación multilineal

$$f \colon E^* \times \overset{s)}{\cdots} \times E^* \to \mathfrak{L}_s(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E, I\!R),$$
$$(\theta^1, \dots, \theta^s) \longmapsto \Big(f\big((\theta^1, \dots, \theta^s)\big)\Big)(v_1, \dots, v_s) = \theta^1(v_1) \cdots \theta^s(v_s), \qquad \forall v_i \in E,$$

a través del producto tensorial $E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^*$, se obtiene un isomorfismo

$$\widehat{f} \colon E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^* \to \mathfrak{L}_s(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E, I\!R).$$

Resulta, por tanto, que podemos identificar los elementos de $\bigotimes_s E$ (tensores de tipo $(0, s)$) con aplicaciones multilineales de $E \times \overset{s)}{\cdots} \times E$ en $I\!R$. ◪

Proposición 2.19 $\bigotimes^r E = E \otimes \overset{r)}{\cdots} \otimes E$ *es isomorfo a* $\mathfrak{L}_r(E^* \times \overset{r)}{\cdots} \times E^*, I\!R)$

Demostración.- Se procede de forma análoga a la proposición anterior. Se identifican así, los tensores de tipo $(r, 0)$ con aplicaciones multilineales de $E^* \times \overset{r)}{\cdots} \times E^*$ en $I\!R$. ◪

Proposición 2.20 $\bigotimes_s^1 E = E \otimes E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^*$ *es isomorfo a* $\mathfrak{L}_s(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E, E)$

Demostración.- Usando sucesivamente las Proposiciones 2.4, 2.12 y las correspondientes generalizaciones de las Proposiciones 2.13 y 2.9, resulta

$$E \otimes (\bigotimes\nolimits_s E) \simeq (\bigotimes\nolimits_s E) \otimes E \simeq \mathfrak{L}\big((\bigotimes\nolimits_s E)^*, E\big) \simeq \mathfrak{L}(\bigotimes\nolimits^s E, E) \simeq \mathfrak{L}_s(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E, E).$$

◪

Con esta interpretación un tensor K de tipo $(1, s)$ es una aplicación multilineal de $E \times \overset{s)}{\cdots} \times E$ en E. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E, $K = K^i_{j_1 \cdots j_s} e_i \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$ se corresponde con la aplicación multilineal de $E \times \overset{s)}{\cdots} \times E$ en E tal que

$$K(e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) = K^i_{j_1 \cdots j_s} e_i.$$

Nota 2.21 Hemos denotado por $\{e^1, \ldots, e^n\}$ la base dual, en el espacio vectorial dual E^*, de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E.

También hemos prescindido del signo de sumatorio, lo cual haremos en lo sucesivo, entendiendo que si un superíndice coincide con un subíndice de términos distintos el sumatorio se extiende al rango de dicho índice.

Similar interpretación puede darse para tensores de tipo (r, s) sobre E, por ejemplo:

Proposición 2.22 *El espacio vectorial* $\bigotimes_s^r E = E \otimes \overset{r)}{\cdots} \otimes E \otimes E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^*$ *es isomorfo a* $\mathfrak{L}_{s,r}(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E \times E^* \overset{r)}{\cdots} \times E^*, I\!R)$ *espacio vectorial de las aplicaciones multilineales de* $E \times \overset{s)}{\cdots} \times E \times E^* \overset{r)}{\cdots} \times E^*$ *en* $I\!R$.

Demostración.- Si a cada $f \in \mathfrak{L}_{s,r}(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E \times E^* \overset{r)}{\cdots} \times E^*, I\!R)$ se le asigna $\widehat{f} \in \mathfrak{L}(\bigotimes_r^s E, I\!R)$, de tal forma que el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E \times \overset{s)}{\cdots} \times E \times E^* \overset{r)}{\cdots} \times E^* \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"] & & I\!R \\
& \bigotimes_r^s E = E \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E \otimes E^* \overset{r)}{\cdots} \otimes E^* \arrow[ur, "\widehat{f}"] &
\end{tikzcd}$$

(siendo $\widehat{f}$ la factorización de f a través del producto tensorial $\bigotimes_r^s E$), resulta un isomorfismo. Así:

$$\mathfrak{L}_{s,r}(E \times \overset{s)}{\cdots} \times E \times E^* \overset{r)}{\cdots} \times E^*, I\!R) \simeq \mathfrak{L}(\bigotimes\nolimits_r^s E, I\!R) \simeq (\bigotimes\nolimits_r^s E)^* \simeq$$

$$\simeq E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^* \otimes E \otimes \overset{r)}{\cdots} \otimes E \simeq E \otimes \overset{r)}{\cdots} \otimes E \otimes E^* \otimes \overset{s)}{\cdots} \otimes E^* \simeq \bigotimes\nolimits_s^r E$$

◪

Extensión de un isomorfismo entre espacios vectoriales a un isomorfismo entre álgebras tensoriales

Proposición 2.23 *Existe una correspondencia biyectiva canónica entre los isomorfismos lineales de un espacio vectorial E sobre otro espacio vectorial F y los isomorfismo de las álgebras $T(E)$ sobre $T(F)$ que conservan el tipo tensorial y conmutan con la contracción.*

En particular, el grupo de automorfismos de E es isomorfo, de forma canónica, al grupo de los automorfismos del álgebra tensorial $T(E)$ que conservan el tipo tensorial y conmutan con la contracción.

Demostración.-

a) Si $f\colon E \to F$ es un isomorfismo lineal, entonces su traspuesta ${}^t f\colon F^* \to E^*$ es un isomorfismo y ${}^t f^{-1} : E^* \to F^*$ es un isomorfismo. Por la Proposición 2.7, obtenemos un único isomorfismo lineal $f \otimes {}^t f^{-1} : E \otimes E^* \to F \otimes F^*$. En general, obtenemos un isomorfismo lineal de $T(E)$ sobre $T(F)$ que aplica $\bigotimes_s^r E$ sobre $\bigotimes_s^r F$. Este isomorfismo, llamado **extensión** de f y denotado por $\widetilde{f}$, es el único isomorfismo entre las álgebras $T(E)$ y $T(F)$ que es extensión de f; la unicidad se sigue del hecho de estar $T(E)$ generado por $\mathbb{R}$,E y E^*.

$\widetilde{f}$ conmuta con toda contracción, pues si $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s \in \bigotimes_s^r E$

$$\begin{aligned}
&\left(\widetilde{f} \circ \mathcal{C}_\ell^k\right)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s) = \\
&= \theta^k(v_\ell) f(v_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{f(v_\ell)} \otimes \cdots \otimes f(v_r) \otimes {}^t f^{-1}(\theta^1) \otimes \cdots \\
&\qquad \cdots \otimes \widehat{{}^t f^{-1}(\theta^k)} \otimes \cdots \otimes {}^t f^{-1}(\theta^s) = \\
&= \mathcal{C}_\ell^k\big(f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_r) \otimes {}^t f^{-1}(\theta^1) \otimes \cdots \otimes {}^t f^{-1}(\theta^s)\big) = \\
&= \left(\mathcal{C}_\ell^k \circ \widetilde{f}\right)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s),
\end{aligned}$$

donde $\widehat{\ }$ significa que se suprime ese factor. De aquí se deduce que $\mathcal{C}_\ell^k \circ \widetilde{f} = \widetilde{f} \circ \mathcal{C}_\ell^k$, en todo $\bigotimes_s^r E$.

b) Probemos ahora que todo isomorfismo de álgebras $h : T(E) \to T(F)$ está inducido por un isomorfismo $f : E \to F$, en el supuesto que h conserve el tipo tensorial y conmute con la contracción.

Ya que h conserva el tipo de tensores, aplica $\bigotimes_0^1 E = E$ isomórficamente sobre $\bigotimes_0^1 F = F$. Denotaremos la restricción de h a E por f. Ya que aplica todo elemento del cuerpo $\mathbb{R}$ sobre sí mismo, y conmuta con toda contracción, tenemos, para todo $v \in E$ y $\theta \in E^*$,

$$h(\theta)\big(f(v)\big) = h(\theta)\big(h(v)\big) = \mathcal{C}_1^1\big(h(v) \otimes h(\theta)\big) =$$

$$= \mathcal{C}_1^1\big(h(v \otimes \theta)\big) = h\big(\mathcal{C}_1^1(v \otimes \theta)\big) = h\big(\theta(v)\big) = \theta(v).$$

Entonces $h(\theta) = {}^t f^{-1}(\theta)$.

h y la extensión de f coinciden sobre $I\!R$, E y E^*, y ya que el álgebra tensorial está generada por $I\!R$, E y E^*, h coincide con la extensión de f. ◪

2.3 Algebra exterior

Tensores simétricos y antisimétricos

Sea p un entero positivo, y consideremos $\bigotimes^p E^* \simeq \mathfrak{L}_p(E\times \overset{p)}{\cdots} \times E, I\!R)$ el espacio vectorial de todos los tensores covariantes de orden p sobre E. Definimos las aplicaciones lineales

$$\mathcal{S}\colon \bigotimes^p E^* \to \bigotimes^p E^*, \qquad \mathcal{A}\colon \bigotimes^p E^* \to \bigotimes^p E^*,$$

respectivamente por:

$$(\mathcal{S}K)(v_1,\dots,v_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} K(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})$$

$$(\mathcal{A}K)(v_1,\dots,v_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma K(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})$$

donde $K\in\bigotimes^p E^*$,$v_i\in E$, $\mathfrak{S}_p$ es el grupo de las permutaciones de p elementos y ϵ_σ igual a +1 o -1 según que la paridad de la permutación σ sea par o impar respecto a la permutación natural $(1,2,\dots,p)$.

Definición 2.24 *A las aplicaciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ se les denomina* operador antisimetrización *y* simetrización*, respectivamente.*

Un tensor $K\in\bigotimes^p E^*$, se llama antisimétrico *o* alternado *si $\mathcal{A}K = K$ y K se dice que es* simétrico *si $\mathcal{S}K = K$.*

Estas condiciones de la definición se expresan en forma equivalente como sigue: $K\in\bigotimes^p E^*$ es simétrico si para cada $1\le i,j\le p$, se tiene

$$K(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) = K(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p).$$

Similarmente, K es antisimétrico si al intercambiar los índices $1\le i,j\le p$, cambia el signo

$$K(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) = -K(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p),$$

o equivalentemente

$$K(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_p) = 0.$$

Nota 2.25 Todo esto, de hecho, es válido también para el espacio de todos los tensores contravariantes de orden p sobre E: $\bigotimes^p E$. No obstante, nos ocuparemos, en lo sucesivo, solamente de los tensores covariantes antisimétricos.

El conjunto de las aplicaciones multilineales antisimétricas de $E\times \overset{p)}{\cdots} \times E$ en $I\!R$ (tensores covariantes antisimétricos de orden p sobre E) forman un subespacio vectorial de $\bigotimes^p E^*$ y lo denotaremos por $\bigwedge^p E^*$. Ponemos $\bigwedge^0 E^* = I\!R$. Para $p = 1$, tenemos $\bigwedge^1 E^* = E^*$. Y si $p > n$ ($n = dim\ E$), entonces $\bigwedge^p E^* = \{0\}$.

Denotaremos por $\bigwedge E^*$ la suma directa $\bigwedge^0 E^* \oplus \bigwedge^1 E^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n E^*$, o sea

$$\bigwedge E^* = I\!R \oplus E^* \oplus \bigwedge^2 E^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n E^*.$$

$\bigwedge E^*$ es un subespacio vectorial de $\sum_{k\geq 0} \bigotimes^k E^*$, pero no una subálgebra, pues si $\alpha \in \bigwedge^p E^*$ y $\beta \in \bigwedge^q E^*$, se puede demostrar, con un ejemplo, que $\alpha \otimes \beta$ puede no ser un elemento de $\bigwedge^{p+q} E^*$. Esto es, el producto tensorial de tensores alternados sobre E no es, en general, un tensor alternado sobre E. Sabemos que cada tensor determina un tensor antisimétrico: su imagen mediante el operador antisimetrización $\mathcal{A}$. Este hecho nos va servir para dar otra multiplicación de tensores antisimétricos.

Definición 2.26 *La aplicación*

$$\wedge\colon \bigwedge^p E^* \times \bigwedge^q E^* \to \bigwedge^{p+q} E^* \qquad (\alpha,\beta) \longmapsto \alpha\wedge\beta = \mathcal{A}(\alpha\otimes\beta)$$

se llama producto exterior *de α y β.*

Propiedades del producto exterior

1) Bilineal: Si $\alpha,\beta,\gamma \in \bigwedge^p E^*$, $a, b \in I\!R$, se tiene

$$(a\alpha + b\beta)\wedge\gamma = a(\alpha\wedge\gamma) + b(\beta\wedge\gamma),$$

$$\alpha\wedge(a\beta + b\gamma) = a(\alpha\wedge\beta) + b(\alpha\wedge\gamma),$$

relaciones que surgen claramente de la definición de producto exterior: linealidad de $\mathcal{A}$ y distributividad del producto tensorial.

2) Asociativa: Si $\alpha \in \bigwedge^p E^*$, $\beta \in \bigwedge^q E^*$ *y* $\gamma \in \bigwedge^r E^*$, entonces

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$

Para probarla, primero establezcamos la propiedad del operador antisimetrización siguiente: Si $P \in \bigotimes^p E^*$, $Q \in \bigotimes^q E^*$ y $R \in \bigotimes^r E^*$, entonces

$$\mathcal{A}(P\otimes Q\otimes R) = \mathcal{A}\big(\mathcal{A}(P\otimes Q)\otimes R\big) = \mathcal{A}\big(P\otimes \mathcal{A}(Q\otimes R)\big).$$

Para ello, sea $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{p+q+r}$ el grupo de las permutaciones de $(1, 2, \ldots, p+q+r)$ y $\mathfrak{S}'$ el subgrupo de $\mathfrak{S}$ que deja fijo los últimos r elementos; $\mathfrak{S}'$ es isomorfo al grupo de las permutaciones $\mathfrak{S}_{p+q}$ de $(1, 2, \ldots, p+q)$.

Tenemos, para $v_1, \ldots, v_{p+q+r} \in E$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\big(\mathcal{A}(P \otimes Q) \otimes R\big)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) = \\
&\quad = \frac{1}{(p+q+r)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma \mathcal{A}(P \otimes Q)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) R(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}) = \\
&\quad = \frac{1}{(p+q+r)!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}'} \varepsilon_{\sigma\sigma'} P(v_{\sigma\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma\sigma'(p)}) \\
&\qquad\qquad Q(v_{\sigma\sigma'(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\sigma'(p+q)}) R(v_{\sigma\sigma'(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma\sigma'(p+q+r)}),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\varepsilon_\sigma \varepsilon_{\sigma'} = \varepsilon_{\sigma\sigma'}$ y que σ' es la identidad sobre los últimos r elementos de $(1, 2, \ldots, p+q+r)$.

La relación anterior es igual a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}'} \varepsilon_{\sigma'} \big(\mathcal{A}(P \otimes Q \otimes R)\big)(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(p+q+r)}) = \\
= \big(\mathcal{A}(P \otimes Q \otimes R)\big)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}),
\end{aligned}$$

ya que $\mathcal{A}(P \otimes Q \otimes R)$ es antisimétrico y por tanto el último sumatorio tiene $(p+q)!$ sumandos iguales.

Por tanto

$$\mathcal{A}(P \otimes Q \otimes R) = \mathcal{A}\big(\mathcal{A}(P \otimes Q) \otimes R\big).$$

La segunda igualdad se prueba de forma análoga.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \big(\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)\big) \wedge \gamma = \mathcal{A}\big(\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\big) = \\
= \mathcal{A}\big(\alpha \otimes \mathcal{A}(\beta \otimes \gamma)\big) = \alpha \wedge \mathcal{A}(\beta \otimes \gamma) = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).
\end{aligned}$$

3) Si $\alpha^i \in \bigwedge^{p_i} E^*$, $(i = 1, \ldots, k)$ entonces

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = \mathcal{A}(\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \cdots \otimes \alpha^k).$$

Se trata de una generalización inmediata de la propiedad anterior, suprimiendo los paréntesis, debido a la asociatividad del producto tensorial.

Estas propiedades nos permite dotar a $\bigwedge E^*$ de una estructura de álgebra asociativa sobre $\mathbb{R}^n$. Para ello definimos el producto

$$\wedge\colon \bigwedge E^* \to \bigwedge E^*$$

simplemente extendiendo el producto exterior por bilinealidad para que se verifique la ley distributiva. Así si $\alpha, \beta \in \bigwedge E^*$, entonces si $n = dim\ E$

$$\alpha = \alpha^1 + \cdots + \alpha^k, \quad \alpha^i \in \bigwedge^{p_i} E^* \qquad (1 \leq i \leq k, \ \ 0 \leq p_i \leq n)$$

$$\beta = \beta^1 + \cdots + \beta^\ell, \quad \beta^j \in \bigwedge^{q_j} E^* \qquad (1 \leq j \leq \ell, \ \ 0 \leq q_j \leq n = dim\ E)$$

y definimos

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \alpha^i \wedge \beta^j.$$

Definición 2.27 *El algebra $\bigwedge E^*$ asociativa así obtenida , se llama* álgebra exterior *o* álgebra de Grassmann *y a sus elementos se les denomina* formas *sobre E. Las formas en $\bigwedge^k E^*$ se dicen que son de grado k o k–formas.*

4) El álgebra exterior $\bigwedge E^*$ es anticonmutativa; es decir, se tiene la siguiente propiedad:

Si $\alpha \in \bigwedge^p E^*$ y $\beta \in \bigwedge^q E^*$, entonces

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Esto es equivalente a demostar que

$$\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{pq} \mathcal{A}(\beta \otimes \alpha).$$

Para probar esta igualdad, observemos que para todo $v_1, \ldots, v_{p+q} \in E$

$$\big(\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)\big)(v_1, \ldots, v_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) =$$

$$\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma \beta(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q)}) \alpha(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) =$$

$$= \big(\mathcal{A}(\beta \otimes \alpha)\big)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(q)}, v_{\tau(q+1)}, \ldots, v_{\tau(p+q)}) = \varepsilon_\tau \big(\mathcal{A}(\beta \otimes \alpha)\big)(v_1, \ldots, v_{p+q})$$

siendo τ la permutación que envía la $(p+q)$–upla $(1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q)$ en la $(p+1, \ldots, p+q, 1, 2, \ldots, p)$. Y, ya que es fácil comprobar que $\varepsilon_\tau = (-1)^{pq}$, podemos escribir

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Proposición 2.28 *Si* $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ *es una base de* E^*, *entonces*

$$\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} / 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$$

es una base de $\bigwedge^r E^*$ $(r \leq n)$ *y* $dim\ \bigwedge E^* = 2^n$.

Demostración.- Si $r > n$, sabemos que $\bigwedge^r E^* = \{0\}$. Sea entonces un entero $r \leq n$, y $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ la base dual en E^* de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E.

Ya que $\bigwedge^r E^* = \mathcal{A}(\bigotimes^r E^*)$, la imagen mediante el operador antisimetrización de la base $\{\omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_r}\}$ de $\bigotimes^r E^*$ genera a $\bigwedge^r E^*$. Tenemos que $\mathcal{A}(\omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_r}) = \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$.

Pero por otra parte, de acuerdo con la propiedad anticonmutativa, al permutar el orden de los $i_1, \ldots, i_r$, los elementos que se obtienen en el segundo miembro son iguales, salvo a caso un cambio de signo. Deducimos que el conjunto de $\binom{n}{r}$ elementos

$$\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} / 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$$

genera a $\bigwedge^r E^*$. Además son independientes: sea

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} = 0.$$

Si aplicamos esta relación a los vectores $(e_{k_1}, \ldots, e_{k_r})$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \right) ((e_{k_1}, \ldots, e_{k_r})) = \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma a_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1}(e_{\sigma(k_1)}) \cdots \omega^{i_r}(e_{\sigma(k_r)}) = \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1}(e_{k_1}) \cdots \omega^{i_r}(e_{k_r}) = \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \cdots i_r} \delta^{i_1}_{k_1} \cdots \delta^{i_r}_{k_r} = \frac{1}{r!} a_{k_1 \cdots k_r} = 0.
\end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquiera que sean los elementos $k_1 < \cdots < k_r$ tomados, resulta que todos los coeficientes son nulos y los elementos del conjunto

$$\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} / 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$$

son independientes. Así $dim\ \bigwedge^r E^* = \binom{n}{r}$, y

$$dim \bigwedge E^* = dim \left(I\!R \oplus E^* \oplus \bigwedge^2 E^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n E^* \right) =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

◪

Nota 2.29 Suele darse también la siguiente definición de producto exterior, que denotamos aquí por $\overline{\wedge}$, de dos formas $\alpha \in \bigwedge^p E^*$ y $\beta \in \bigwedge^q E^*$:

$$\alpha \,\overline{\wedge}\, \beta = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta).$$

Por consiguiente, la relación entre este producto exterior y el que nosotros hemos adoptado es:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{p!\, q!}{(p+q)!}\, \alpha \,\overline{\wedge}\, \beta, \quad \alpha \in \bigwedge^p E^*, \;\; \beta \in \bigwedge^q E^*.$$

Isomorfismo entre $\bigwedge^p E^*$ y $(\bigwedge^p E)^*$

El estudio que hemos hecho para tensores covariantes de orden p ($\bigotimes^p E^* = \mathfrak{L}_p(E \times \overset{p)}{\cdots} \times E, I\!R)$), lo podemos efectuar de forma paralela con tensores contravariantes de orden p ($\bigotimes^p E = \mathfrak{L}_p(E^* \times \overset{p)}{\cdots} \times E^*, I\!R)$). Así, podemos definir el subespacio vectorial de los tensores contravariantes de orden p antisimétricos, que denotamos por $\bigwedge^p E$; y dotar al conjunto

$$\bigwedge E = I\!R \oplus E \oplus \bigwedge^2 E \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n E$$

de estructura de álgebra asociativa. Se tiene entonces los siguientes isomorfismos canónicos:

Proposición 2.30 *$\bigwedge^p E^*$ es isomorfo a $(\bigwedge^p E)^*$, y por consiguiente*

$$\bigwedge E^* \simeq (\bigwedge E)^*.$$

Demostración.- Consideremos la aplicación que a $\varphi \in (\bigwedge^p E)^*$ le asocia el elemento $\widehat{\varphi} \in \bigwedge^p E^*$, definido como sigue:

$$\widehat{\varphi} \colon E \times \overset{p)}{\cdots} \times E \to I\!R \qquad \widehat{\varphi}\big((v_1, \ldots, v_p)\big) = \varphi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p), \quad \forall v_1, \ldots, v_p \in E,$$

esta aplicación $\widehat{\varphi}$ está bien definida; es decir, $\widehat{\varphi}$ es multilineal y alternada (o antisimétrica); esto es, se trata de un elemento de $\bigwedge^p E^*$.

Además la aplicación $\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}$ verifica

$$\widehat{\lambda\varphi} = \lambda \widehat{\varphi} \qquad \text{y} \qquad \widehat{\varphi + \phi} = \widehat{\varphi} + \widehat{\phi}, \quad \forall \lambda \in I\!R, \; \forall \varphi, \phi \in (\bigwedge^p E)^*.$$

Y, finalmente, si $\widehat{\varphi} = 0$, resulta que $\varphi = 0$. Por lo que al ser $dim\ (\bigwedge^p E)^* = dim\ \bigwedge^p E^* = \binom{n}{p}$, se tiene que la aplicacion $\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}$ es un isomorfismo de $(\bigwedge^p E)^*$ sobre $\bigwedge^p E^*$.

Como consecuencia de estos isomorfismos para $p = 0, 1, \ldots, n$, se tiene

$$\bigwedge E^* = \sum_{k=0}^{n} \bigwedge^k E^* \simeq \sum_{k=0}^{n} (\bigwedge^k E)^* \simeq \left(\sum_{k=0}^{n} \bigwedge^k E \right)^* = (\bigwedge E)^*.$$

Extensión de un isomorfismo sobre E a un isomorfismo sobre $\bigwedge E^*$

Para terminar esta sección, consideremos la extensión de un isomorfismo de un espacio vectorial E sobre sí mismo, a un isomorfismo de $\bigwedge E^*$ en sí mismo. (También se puede considerar el caso en que el isomorfismo sea de un espacio vectorial E sobre otro F).

Si $f : E \to E$ es un isomorfismo, entonces f induce un único isomorfismo de álgebras $\widetilde{f} : \bigwedge E^* \to \bigwedge E^*$ que es extensión de f; $\widetilde{f}$ conserva el grado tensorial, esto es, $\widetilde{f} : \bigwedge^k E^* \to \bigwedge^k E^*$.

En particular, $\widehat{f} : \bigwedge^n E^* \to \bigwedge^n E^*$. Entonces ya que $dim \ \bigwedge^n E^* = 1$, existe $\lambda \in I\!R$ tal que

$$\widetilde{f}_{|\wedge^n E^*} = \lambda 1_{|\wedge^n E^*},$$

este escalar λ es precisamente el determinante de la matriz asociada a f.

2.4 Tensores en un punto de una variedad

Sea M una variedad diferenciable n–dimensional y consideremos los espacios vectoriales $T_x(\mathsf{M})$ y $T_x^*(\mathsf{M})$ de los vectores tangentes y cotangentes a M en un punto x, respectivamente. Trasladando los conceptos de álgebra tensorial asociada a un espacio vectorial arbitario al espacio tangente a una variedad, tenemos las siguientes definiciones:

Definición 2.31 *Un* tensor r veces contravariante en $x \in \mathsf{M}$ *es un elemento del espacio vectorial* $\bigotimes^r T_x(\mathsf{M})$*; es decir, una aplicación* $T_x^*(\mathsf{M}) \times \overset{r)}{\cdots} \times T_x^*(\mathsf{M}) \to I\!R$ *multilineal.*

Un tensor s veces covariante en $x \in \mathsf{M}$ *es un elemento del espacio vectorial* $\bigotimes_s T_x(\mathsf{M}) = \bigotimes^s T_x^*(\mathsf{M})$*; es decir, una aplicación* $T_x(\mathsf{M}) \times \overset{s)}{\cdots} \times T_x(\mathsf{M}) \to I\!R$ *multilineal.*

Un tensor de tipo (r,s) en $x \in \mathsf{M}$, *es decir r veces contravariante y s veces covariante, es un elemento del espacio vectorial* $\bigotimes_s^r T_x(\mathsf{M}) = (\bigotimes^r T_x(\mathsf{M})) \otimes$

$(\bigotimes^s T_x^*(\mathsf{M}))$; *esto es, una aplicación multilineal* $T_x(\mathsf{M})\times \overset{s)}{\cdots} \times T_x(\mathsf{M}) \times T_x^*(\mathsf{M})\times \overset{r)}{\cdots} \times T_x^*(\mathsf{M}) \to \mathbb{R}$.

Una p–forma diferencial en $x \in \mathsf{M}$ *es un elemento del espacio vectorial* $\bigwedge^p T_x^*(\mathsf{M})$; *es decir, un tensor* p *veces covariante antisimétrico; o lo que es lo mismo, una aplicación multilineal antisimétrica* $T_x(\mathsf{M})\times \overset{p)}{\cdots} \times T_x(\mathsf{M}) \to \mathbb{R}$.

En particular, los vectores tangentes a M en x son tensores de tipo (1,0) en x y los vectores cotangentes o covectores a M en x, son tensores de tipo (0,1) en x o 1–formas en x.

La base natural del espacio tangente a una variedad en un punto x viene dada por los vectores básicos asociados a un sistema coordenado alrededor de x. Así, si $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ es una carta local con $x \in U$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ es la base de $T_x(\mathsf{M})$ y $\left\{dx^1, \dots, dx^n\right\}$ la de $T_x^*(\mathsf{M})$ asociadas a dicha carta. Un tensor K de tipo (r,s) en x se tendrá la siguiente expresión:

$$K = K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}.$$

Si $\big(V, \phi \equiv (y^1, \dots, y^n)\big)$ es otra carta alrededor de x, respecto a ésta, K se expresará por:

$$K = \bar K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dy^{j_1} \otimes \cdots \otimes dy^{j_s}.$$

Por lo que la relación entre ambas componentes viene dada, teniendo en cuenta como es el cambio de base, por la siguiente relación (ver pág. 57):

$$\bar K^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s} = K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{\beta_s}}.$$

2.5 Fibrado tangente. Campos de vectores

Con objeto de estudiar la diferenciabilidad de tensores sobre una variedad diferenciable M introducimos nuevas variedades canónicamente asociadas a M y así podemos interpretar cualquier tipo de tensor como aplicaciones de M en tales variedades.

Definición 2.32 *El conjunto*

$$T(\mathsf{M}) = \bigcup_{x\in} T_x(\mathsf{M})$$

se denomina fibrado tangente *a la variedad* M.

Definimos la aplicación canónica $\pi : T(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ en la manera siguiente: si $v \in T(\mathsf{M})$, $v \in T_x(\mathsf{M})$ para un solo $x \in \mathsf{M}$, entonces ponemos $\pi(v) = x$.

Teorema 2.33 *Sobre el fibrado tangente $T(\mathsf{M})$ de una variedad M de dimensión n existe una estructura de variedad diferenciable de clase C^∞ y de dimensión $2n$ de forma tal que $\pi \colon T(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ es una submersión.*

Demostración.- Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)/\alpha \in A\}$ un atlas sobre M. Para cada $\alpha \in A$ consideramos el subconjunto $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset T(\mathsf{M})$, y definimos

$$\widetilde{\varphi}_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

$$v \longmapsto \widetilde{\varphi}_\alpha(v) = \big(\varphi_\alpha(\pi(v)); v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n\big) = \big(x_\alpha^1(\pi(v)), \dots, x_\alpha^n(\pi(v)), v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n\big),$$

donde $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ son las funciones coordenadas de $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y $(v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ son las componentes de $v \in T_{\pi(v)}(\mathsf{M})$ respecto a la base natural relativa a dicha carta; esto es, $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n v_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$.

La colección de pares $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{\varphi}_\alpha)/\alpha \in A\}$ verifican las siguientes propiedades, que permiten definir una estructura diferenciable sobre $T(\mathsf{M})$:

1) Para todo $\alpha \in A$, $\widetilde{\varphi}_\alpha$ es biyectiva sobre su imagen.

2) Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son dos cartas locales en M, tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$, y la composición

$$\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \colon \widetilde{\varphi}_\beta\big(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)\big) \to \widetilde{\varphi}_\alpha\big((\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)\big)$$

es una aplicación diferenciable; pues está dada por

$$(\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1})(\xi^1, \dots, \xi^n, \lambda^1, \dots, \lambda^n) =$$

$$= \left((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\pi(\xi^1, \dots, \xi^n));\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta^j}(x_\alpha^1)\lambda_\beta^j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta^j}(x_\alpha^n)\lambda_\beta^j \right),$$

donde $(\xi^1, \dots, \xi^n, \lambda^1, \dots \lambda^n) \in \widetilde{\varphi}_\beta\left(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)\right)$, $\varphi_\beta \equiv (x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ y $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_\beta^i \frac{\partial}{\partial x_\beta^i}$, y, por tanto

$$\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \times J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}),$$

donde $J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación diferenciable determinada por la matriz Jacobiana de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$.

3) La colección $\{\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(W)/\alpha \in A \text{ y } W \text{ conjunto abierto en } \mathbb{R}^{2n}\}$ constituye una base para la topología de $T(\mathsf{M})$. Para esta topología en $T(\mathsf{M})$ la familia $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{\varphi}_\alpha)/\alpha \in A\}$ constituye un atlas para una estructura diferenciable de dimensión $2n$ sobre $T(\mathsf{M})$.

4) Con esta topología es fácil demostrar que $T(\mathsf{M})$ es separado:

Sean $v_1, v_2 \in T(\mathsf{M})$, $v_1 \neq v_2$. Distinguiremos dos casos:

a) Si $v_1 \in T_{x_1}(\mathsf{M}), v_2 \in T_{x_2}(\mathsf{M})$, con $x_1 \neq x_2$. Como M es separado, existen U_1, U_2 abiertos disjuntos y $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$. Luego $\pi^{-1}(U_1), \pi^{-1}(U_2)$ son abiertos disjuntos de $T(\mathsf{M})$ y $v_1 \in \pi^{-1}(U_1), v_2 \in \pi^{-1}(U_2)$.

b) Si $v_1, v_2 \in T_{x_1}(\mathsf{M})$. Respecto a la carta (U, φ) en M, $\widetilde{\varphi}(v_1) = (x, \xi^1, \dots, \xi^n)$, $\varphi(v_2) = (x, \eta^1, \dots, \eta^n)$. Como $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$, $\xi \neq \eta$ y $I\!R^n$ es separado, existen abiertos disjuntos W_1, W_2 en $I\!R^n$ con $\xi \in W_1, \eta \in W_2$. Luego $\widetilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \times W_1)$, $\widetilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \times W_2)$ son abiertos disjuntos en $T(\mathsf{M})$ y se tiene que $v_1 \in \widetilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \times W_1)$, $v_2 \in \widetilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \times W_2)$.

5) Si consideramos sobre $T(\mathsf{M})$ la estructura de variedad diferenciable así definida, $\pi : T(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ es trivialmente diferenciable y su aplicación inducida es sobreyectiva, se trata pues de una submersión. ◪

Definición 2.34 *Un* campo de vectores *sobre una variedad diferenciable* M*, es una aplicación* $X \colon \mathsf{M} \to T(\mathsf{M})$*, tal que* $\pi \circ X = 1$.

Así pues, dar un campo de vectores consiste en asignar a cada punto de la variedad un vector tangente en dicho punto.

Dado X, campo de vectors sobre M, y $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, función real diferenciables sobre M, definimos la aplicación

$$Xf \colon \mathsf{M} \to I\!R \qquad \text{por} \qquad (Xf)(x) = X(x)\big(f\big) =: X_x(f) \quad \forall x \in \mathsf{M}.$$

Si $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ es una carta local de M, definimos los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to T(U)$, por $\frac{\partial}{\partial x^i}(x) \in T_x(\mathsf{M})$, $\forall x \in U$; estando dada sobre U la estructura de variedad diferenciable inducida por la de M.

Proposición 2.35 *Un campo de vectores* $X \colon \mathsf{M} \to T(\mathsf{M})$ *es diferenciable si y sólo si* $\forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, $Xf \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$.

Demostración.- Ya que la diferenciablidad tiene carácter local, basta con hacer la demostración en una carta (U, φ) de funciones coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$.

1) Supongamos que $X : U \to T(U)$ y $f \colon U \to I\!R$ son diferenciables, probemos que $Xf \in \mathfrak{F}(U)$.

$\forall x \in U,\ X_x = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_x^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}$, siendo $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1,\dots,n}$ los campos de vectores básicos en U. Definimos las aplicaciones $X^i \colon U \to I\!R$, por $X^i(x) = X_x^i$. Entonces

$$(Xf)(x) = X_x(f) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}(f) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i} \circ \varphi \right)(x).$$

Así Xf es suma de productos de funciones diferenciables.

2) Recíprocamente, la aplicación X es diferenciable si lo es la aplicación

$$\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto (x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^n),$$

la cual lo es al ser todas sus funciones componentes diferenciables. ◪

Al conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M lo denotamos por $\mathfrak{X}(\mathsf{M})$, el cual, con las operaciones siguientes, es un $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–módulo:

$$\left.\begin{array}{rcl} (X+Y)_x(f) &=& X_x(f) + Y_x(f) \\ (fX)_x(g) &=& f(x) X_x(g) \end{array}\right\} \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M}),\ \forall f, g \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}),\ \forall x \in \mathsf{M}.$$

En particular $\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Si U es un abierto coordenado de M, con funciones coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, los campos de vectores $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ es una base de $\mathfrak{X}(U)$.

Se tienen unos ejemplos notables de subvariedades en el fibrado tangente $T(\mathsf{M})$ a una variedad diferenciable:

– Si $x \in \mathsf{M}$, cada fibra $\pi^{-1}(x) = T_x(\mathsf{M})$ es una subvariedad regular de $T(\mathsf{M})$, y π es una submersión.

– Si $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $X(\mathsf{M})$ es una subvariedad de $T(\mathsf{M})$, pues $X \colon \mathsf{M} \to T(\mathsf{M})$ es una inmersión inyectiva.

Algebra de Lie de los campos de vectores diferenciables sobre M

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, definimos un producto en $\mathfrak{X}(\mathsf{M})$, que denominaremos corchete, por la relación siguiente:

$$[X,Y]_x(f) = X_x(Yf) - Y_x(Xf), \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}),\ \forall x \in \mathsf{M}.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1) $[X,Y] \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ (Campo de vectores diferenciable)
2) $[X,Y] = -[Y,X]$ (Anticonmutatividad)
3) $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$ (Bilinealidad respecto a la suma)
4) $[\lambda X, Y] = [X, \lambda Y] = \lambda [X,Y]$ (" " al producto por un escalar)
5) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Identidad de Jacobi)
6) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$,

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $\forall f, g \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se deduce de ellas que $\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$, que por verificar las propiedades 2) y 5) (identidad de Jacobi) se denomina álgebra de Lie de los campos de vectores diferenciables sobre M.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$ una carta local de M, y X^i e Y^i son las componentes de los campos X e Y en la base de campos de vectores $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, las funciones componentes de $[X,Y] \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ son

$$[X,Y]^i = \sum_{k=1}^{n} \left(X^k \frac{\partial}{\partial x^k}(Y^i) - Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}(X^i) \right).$$

2.6 Fibrado cotangente. 1–formas diferenciales

Definición 2.36 *El conjunto*

$$T^*(\mathsf{M}) = \bigcup_{x\in} T_x^*(\mathsf{M})$$

se denomina fibrado cotangente *a la variedad* M.

Es el conjunto de todos los covectores en todos los puntos de la variedad M. Se tiene la proyección canónica $\pi: T^*(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ definida como sigue: si $\omega \in T^*(\mathsf{M})$, entonces $\omega \in T_x^*(\mathsf{M})$, para un único $x \in \mathsf{M}$ y ponemos $\pi(\omega) = x$.

Teorema 2.37 *Sobre el fibrado cotangente $T^*(\mathsf{M})$ existe una estructura de variedad diferenciable de dimensión 2n, de forma tal que la aplicación proyección $\pi: T^*(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ es una submersión.*

Demostración.- Se procede de forma análoga que para el caso del fibrado tangente. Tomando los homomorfismos coordenados a partir de las aplicaciones biyectivas $\widetilde{\varphi}_\alpha$ definidas a continuación:

Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)/\alpha \in A\}$ es un atlas para la estructura diferenciable de M. Para cada $\alpha \in A$, consideramos el subconjunto $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset T^*(\mathsf{M})$ y las aplicaciones

$$\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times I\!R^n \subset I\!R^{2n}$$

definidas de la forma siguiente: si $\omega \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, entonces $\pi(\omega) \in U_\alpha$; y si $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ son las funciones coordenadas de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\{dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n\}$ es la base natural de $T_{\pi(\omega)}^*(\mathsf{M})$ y $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i^\alpha dx_\alpha^i$, definimos

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(\omega) = \big(\varphi_\alpha(\pi(\omega)), \omega_1^\alpha, \dots, \omega_n^\alpha\big).$$

El conjunto $\big\{\big(\widetilde{\varphi}_\alpha, \pi^{-1}(U_\alpha)\big)/\alpha \in A\big\}$ permite dar una estructura diferenciable en $T^*(\mathsf{M})$, respecto a la cual $\pi : T^*(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ es una aplicación diferenciable con inducidad sobreyectiva. ◪

Definición 2.38 *Una* 1–forma diferencial *sobre una variedad diferenciable* M, *es una aplicación* $\omega: \mathsf{M} \to T^*(\mathsf{M})$ *tal que* $\pi \circ \omega = 1$.

Dados un campo de vectores X y una 1–forma diferencial ω sobre M, definimos la aplicación

$$\omega(X): \mathsf{M} \to I\!R \qquad \text{poniendo} \qquad \big(\omega(X)\big)(x) = \omega_x(X_x), \quad \forall x \in \mathsf{M}.$$

Si $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ es una carta local de M, definimos las 1–formas diferenciales $dx^i : U \to T^*(U)$, por $dx^i(x) \in T_x^*(\mathsf{M})$, $\forall x \in U$; considerándose en U la estructura diferenciable inducida por la de M. Se tiene de forma inmediata la siguiente:

Proposición 2.39 *Una 1–forma diferencial* $\omega\colon \mathsf{M} \to T^*(\mathsf{M})$ *es diferenciable* $\Leftrightarrow$

$$(\forall X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \Rightarrow \omega(X) \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})).$$

Designaremos por $\Omega^1(\mathsf{M})$ el conjunto de todas las 1–formas diferenciales diferenciables sobre M.

$\Omega^1(\mathsf{M})$ constituye un $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–módulo, definiendo la suma de 1–formas y el producto por una función diferenciable de manera natural. En particular, $\Omega^1(\mathsf{M})$ es un espacio vectorial real, no necesariamente de dimensión finita.

Si (U, φ) es una carta local con funciones coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$, el conjunto $\Omega^1(U)$ está generado por las 1–formas diferenciables dx^i $(i = 1, \dots, n)$; además $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ son independientes. Luego $\Omega^1(U)$ es un $\mathfrak{F}(U)$–módulo de dimensión n.

Dada $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, función real diferenciable, induce la 1–forma diferencial diferenciable definida como sigue

$$df\colon \mathsf{M} \to T^*(\mathsf{M})$$

tal que para todo $x \in \mathsf{M}$, $df(x)$ es la aplicación lineal (ver pág. 26)

$$df(x)\colon T_x(\mathsf{M}) \to I\!R, \qquad df(x)(v) = v(f), \quad \forall v \in T_x(\mathsf{M}).$$

La diferenciabilidad de df surge de que en una carta local $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$ se tiene

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(f) dx^i.$$

Dada una aplicación diferenciable $\mu : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ entre dos variedades diferenciables, ella induce aplicaciones entre los fibrados tangentes y cotangentes de la forma siguiente:

$$\mu_*\colon T(\mathsf{M}) \to T(\mathsf{N}) \qquad v \in T(\mathsf{M}) \longmapsto \mu_*(v) \in T(\mathsf{N})$$

de tal forma que si $v \in T_x(\mathsf{M})$, $\mu_*(v)$ es el elemento $\mu_*(x)\big(v\big)$ de $T_{\mu(x)}(\mathsf{N})$ determinado por la aplicación inducida entre los espacios tangentes $\mu_*(x) : T_x(\mathsf{M}) \to T_{\mu(x)}(\mathsf{N})$ (Proposisión 1.46).

Si además μ es biyectiva induce la aplicación entre los fibrados cotangentes

$$\mu^*\colon T^*(\mathsf{N}) \to T^*(\mathsf{M})$$

tal que si $\omega \in T^*(\mathsf{N})$, existe un $x \in \mathsf{M}$ y $\omega \in T^*_{\mu(x)}(\mathsf{N})$; entonces $\mu^*(\omega)$ es el covector en $T^*_x(\mathsf{M})$ dado por la aplicación lineal (ver pág. 27):

$$\mu^*(\omega)\colon T_x(\mathsf{M}) \to I\!R \qquad v \longmapsto \omega\Big(\mu_*(x)\big(v\big)\Big), \quad \forall v \in T_x(\mathsf{M}).$$

Ejercicio.- Probar que si $\mu : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ es un difeomorfismo, las aplicaciones inducidas $\mu_*\colon T(\mathsf{M}) \to T(\mathsf{N})$ y $\mu^*\colon T^*(\mathsf{N}) \to T^*(\mathsf{M})$ son diferenciables.

2.7 Fibrado tensorial. Campos de tensores

Generalizemos ahora, de manera natural, los conceptos de fibrados tangentes y cotagentes para el caso de tensores sonre una variedad.

Definición 2.40 *El conjunto*

$$T^r_s(\mathsf{M}) = \bigcup_{x\in} (\bigotimes^r_s T_x(\mathsf{M}))$$

se denomina fibrado tensorial *a la variedad* M.

Existe una proyección canónica $\pi\colon T^r_s(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$, tal que si K es un elemento de $T^r_s(\mathsf{M})$, entonces $\pi(K)$ es el único elemento $x \in \mathsf{M}$ para el cual $K \in \bigotimes^r_s T_x(\mathsf{M})$.

Teorema 2.41 *Sobre el fibrado tensorial $T^r_s(\mathsf{M})$ existe una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n+n^{r+s}$, de forma tal que la aplicación proyección $\pi\colon T^r_s(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ es una submersión.*

Demostración.- Se procede de forma análoga a la del caso de los fibrados tangente y cotangente. Tomando los homeomorfismos coordenados como las aplicaciones biyectivas $\widetilde{\varphi}_\alpha$ definidas, a partir de un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ para la estructura diferenciable de M, de la forma siguiente: Sobre el subconjunto $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset T^r_s(\mathsf{M})$,

$$\widetilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times I\!R^{n^{r+s}} \subset I\!R^{n+n^{r+s}}$$

está definida como sigue: si $K \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, entonces $\pi(K) \in U_\alpha$, y si $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ son las funciones coordenadas de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}_\alpha} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}_\alpha} \otimes dx^{j_1}_\alpha \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}_\alpha\right\}$$

es la base natural de $\bigotimes^r_s T_{\pi(K)}(\mathsf{M})$; por tanto

$$K = K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}_\alpha} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}_\alpha} \otimes dx^{j_1}_\alpha \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}_\alpha\,,$$

y por definición ponemos

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(K) = \left(\varphi_\alpha\big(\pi(K)\big), K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right).$$

El conjunto $\left\{(\widetilde{\varphi}_\alpha, \pi^{-1}(U_\alpha))\big/\alpha \in A\right\}$ constituye un atlas para una estructura diferenciable en $T^r_s(\mathsf{M})$, para la cual $\pi\colon T^r_s(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ es diferenciable y su inducida es sobreyectiva. ◪

Definición 2.42 *Un* campo tensorial *de tipo (r, s) sobre una variedad diferenciable M, está dado por una aplicación $K\colon \mathsf{M} \to T^r_s(\mathsf{M})$, tal que $\pi \circ K = 1$.*

Dados s campos de vectores diferenciables, $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ y r 1–formas diferenciables, $\omega^1, \ldots, \omega^r \in \Omega^1(\mathsf{M})$; definimos la función real, para cada campo tensorial K de tipo (r, s) y para cada $x \in \mathsf{M}$, siguiente

$$K(X_1, \ldots, X_s, \omega^1, \ldots, \omega^r)\colon \mathsf{M} \to I\!R$$

$$x \longmapsto \left(K(X_1,\ldots,X_s,\omega^1,\ldots,\omega^r)\right)(x) = K_x\left(X_1(x),\ldots,X_s(x),\omega^1(x),\ldots,\omega^r(x)\right).$$

Si $\left(U,\varphi\equiv(x^1,\ldots,x^n)\right)$ es una carta local de M, definimos los campos de tensores de tipo (r,s) básicos

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s} : U \to T^r_s(U)$$

por $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}{}_{|x}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}{}_{|x}\otimes dx^{j_1}{}_{|x}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}{}_{|x}\in\bigotimes^r_s T_x(\mathsf{M})$, $\quad\forall x\in U$; donde en U se considera la estructura diferenciable inducida por la de M.

Proposición 2.43 *Un campo tensorial de tipo (r,s), $K:\mathsf{M}\to T^r_s(\mathsf{M})$ es diferenciable si y sólo si $\forall X_1,\ldots,X_s\in\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ y $\forall\omega^1,\ldots,\omega^r\in\Omega^1(\mathsf{M})$ se tiene que $K(X_1,\ldots,X_s,\omega^1,\ldots,\omega^r)\in\mathfrak{F}(\mathsf{M})$.* ◪

Por $\mathfrak{T}^r_s(\mathsf{M})$ indicaremos el conjunto de todos los campos de tensores de tipo (r,s) diferenciables sobre M.

$\mathfrak{T}^r_s(\mathsf{M})$ constituye un $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–módulo. Siendo $\mathfrak{T}^1_0(\mathsf{M})=\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ y $\mathfrak{T}^0_1(\mathsf{M})=\Omega^1(\mathsf{M})$.

Si $\left(U,\varphi\equiv(x^1,\ldots,x^n)\right)$ es una carta local de M, el conjunto $\mathfrak{T}^r_s(U)$ está generado por los campos de tensores básicos de tipo (r,s) $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$ $(1\le i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\le n)$; además estos campos tensoriales son independientes, por lo que $\mathfrak{T}^r_s(U)$ es un $\mathfrak{F}(U)$–módulo de dimensión n^{r+s}.

Como se observa con claridad, es condición necesaria y suficiente para la diferenciabilidad de un campo de tensores K, dado el caracter local de este concepto, que sus componentes respecto a una carta $\left(U,\varphi\equiv(x^1,\ldots,x^n)\right)$ en M, $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$, sean diferenciables en U.

Daremos a continuación otra interpretación de campos de tensores de tipo $(0,s)$ y $(1,s)$ según el punto de vista de las Proposiciones 2.18 y 2.20. Antes necesitamos establecer los dos lemas siguientes: El primero es la versión para funciones diferenciables del Teorema de Tietze para aplicaciones continuas.

Lema 2.44 *Sea M una variedad diferenciable, K un compacto contenido en un abierto W de M. Entonces, existe sobre M una función diferenciable de clase C^∞ con valores comprendidos entre 0 y 1, igual a 1 sobre K y a 0 sobre $\mathsf{M}-W$.*

Demostración.- Consideremos en primer lugar el caso en el que W esté contenido en un abierto coordenado de una carta local (U,φ). Si la función buscada existe, es de la forma $f=g\circ\varphi$ donde g es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$, con soporte (la clausura del conjunto de puntos ξ donde $g(\xi)\neq 0$, $sop(g)=\overline{\{\xi\in\mathbb{R}^n/g(\xi)\neq 0\}}$) compacto contenido en $\varphi(W)$, y con valores comprendidos entre 0 y 1, igual a 1 sobre el compacto $A=\varphi(K)$, igual a 0 sobre $\mathbb{R}^n-\varphi(W)$. La clausura $\bar{A}$ es compacta; existe, entonces, un recubrimiento finito de A por bolas B_i, cada una de las cuales concéntrica a una bola $B_i^{'}\subset\varphi(W)$.

Sean $B = B_c^n(a)$, $B' = B_c^n(b)$ un par de estas bolas, de centro c y radios $a, b\,(a < b)$. Consideremos la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(t) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{t-b} - \frac{1}{t-a}\right)} & \text{para} \qquad a < t < b \\ 0 & \text{para} \quad -\infty < t \leq a, \;\; b \leq t < \infty \end{cases}$$

h es positiva y diferenciable sobre $\mathbb{R}$. La función $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\eta(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} h(u)\,du}{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,du}$$

es positiva y diferenciable sobre $\mathbb{R}$, con valores comprendidos entre entre 0 y 1, igual a 0 para $t \leq a$, e igual a 1 para $t \geq b$.

La aplicación $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \eta(r) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; r = d(c, x)$$

es positiva, diferenciable y de valores comprendidos entre 0 y 1: igual a 0 en B, y a 1 en $\mathbb{R}^n - B'$.

Si designamos por g_i las aplicaciones así definidas para todo par de bolas B_i, B_i', la función

$$g = 1 - \prod_i g_i$$

es positiva, diferenciable, de valores comprendidos entre 0 y 1, igual a 1 sobre $\bigcup_i B_i$ e igual a 0 sobre $\bigcap_i(\mathbb{R}^n - B_i') = \mathbb{R}^n - \bigcup_i B_i'$. Como $\varphi(K) \subset \bigcup_i B_i$ y $\bigcup_i B_i' \subset \varphi(W)$, esta función es igual a 1 sobre $\varphi(K)$, y a 0 sobre $\mathbb{R}^n - \varphi(W)$. Con lo que queda demostrado el lema para el caso en que W esté contenido en un abierto coordenado.

En el caso en que K sea un compacto contenido en abierto cualquiera W de M, notemos que K admite un recubrimiento finito por compactos K_α, tales que cada K_α está contenido en un abierto W_α de W, contenido en un abierto coordenado U_α, de modo que $K \subset \bigcup_\alpha K_\alpha$ y $\bigcup_\alpha W_\alpha \subset W$. Si designamos por f_α la función definida por cada índice α, la función

$$f = 1 - \prod_\alpha (1 - f_\alpha)$$

es positiva sobre toda la variedad M, diferenciable, con valores conprendidos entre 0 y 1, igual a 1 sobre $\bigcup_\alpha K_\alpha$ y en consecuencia sobre K, e igual a 0 sobre $\bigcap_\alpha(\mathsf{M} - W_\alpha) = \mathsf{M} - \bigcup_\alpha W_\alpha$ y por tanto sobre $\mathsf{M} - W$. ◪

El segundo lema que necesitamos es el que expresa el caracter local del campo de tensores K:

Lema 2.45 *Si $K \in \mathfrak{T}_s^0(\mathsf{M})$, $X_i \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $Y_i \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ $(i = 1, \ldots, s)$, tal que $X_i = Y_i$ en un entorno abierto U de $x \in \mathsf{M}$, entonces*

$$K(X_1, \ldots, X_s) = K(Y_1, \ldots, Y_s) \quad \textit{en } U.$$

Demostración.- Es suficiente demostrar que si $X_1 = 0$ en U, entonces también se verifica que $K(X_1, \ldots, X_s) = 0$ en U. Para $y \in U$, el Lema 2.44, garantiza al existencia de una función diferenciable $f\colon \mathsf{M} \to I\!R$ tal que $f(y) = 0$ y $f \equiv 1$ fuera de U. Entonces $X_1 = fX_1$ y $K(X_1, \ldots, X_s) = fK(X_1, \ldots, X_s)$, que se anula en y. ◪

Proposición 2.46 *Un campo de tensores de tipo (0,s) sobre* M *puede ser considerado como una aplicación multilineal*

$$K\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M})\times \overset{s)}{\cdots} \times\mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{F}(\mathsf{M})$$

tal que

$$K(f_1X_1, \ldots, f_sX_s) = f_1 \cdots f_s K(X_1, \ldots, X_s),$$

$$\text{para} \quad f_i \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}) \;\; y \;\; X_i \in \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Inversamente, una tal aplicación puede ser considerada como un campo de tensores de tipo (0,s).

Demostración.- Dado un campo de tensores K de tipo $(0, s)$, para cada punto x de M, $K_x : T_x(\mathsf{M})\times \overset{s)}{\cdots} \times T_x(\mathsf{M}) \to I\!R$ es una aplicación multilineal por la Proposición 2.18, y entonces

$$K\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M})\times \overset{s)}{\cdots} \times\mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{F}(\mathsf{M})$$

$$(X_1, \ldots, X_s) \longmapsto K(X_1, \ldots, X_s)\colon \mathsf{M} \to I\!R$$

$$x \longmapsto K_x\left((X_1)_x, \ldots, (X_s)_x\right)$$

satisface la condición del enunciado.

Recíprocamente, sea

$$K\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M})\times \overset{s)}{\cdots} \times\mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{F}(\mathsf{M})$$

una aplicación $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–multilineal. Lo esencial en la demostración es establecer que el valor de la función $K(X_1, \ldots, X_s)$ en un punto x depende sólo de los X_i en x. Esto implicará que K induce una aplicación multilineal de $T_x(\mathsf{M}) \times \cdots \times T_x(\mathsf{M})$ sobre $I\!R$ para cada x.

Tenemos que demostrar que si X_1 se anula en un punto x, también se anula $K(X_1, \ldots, X_s)$. Sean $x^1, \ldots, x^n$ funciones coordenadas alrededor del punto x y $X_1 = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Podemos tomar los campos de vectores Y_i y las funciones diferenciables tales que $g^i = f^i$ e $Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ para $i = 1, \ldots, n$ en algún entorno U de x. Entonces $X_1 = \sum_{i=1}^n g^i Y_i$ en U. Por el Lema 2.45, $K(X_1, \ldots, X_s) = g^i K(Y_i, X_2, \ldots, X_s)$ en U. Ya que $g^i(x) = f^i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, así $K(X_1, \ldots, X_s)$ se anula en x. ◪

Análogamente se demuestra el resultado para campos de tensores de tipo (1,s):

Proposición 2.47 *Un campo de tensores de tipo (1,s) sobre* M *puede ser considerado como una aplicación multilineal*

$$K : \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \overset{s)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$$

tal que $$K(f_1X_1, \dots, f_sX_s) = f_1 \cdots f_s K(X_1, \dots, X_s),$$
$$\text{para} \quad f_i \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}) \ \text{ y } \ X_i \in \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \quad (i = 1, \dots, s).$$

Inversamente, una tal aplicación puede ser considerada como un campo de tensores de tipo (1,s).

Sea $\mu : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ un difeomorfismo entre variedades diferenciables, para cada punto $x \in \mathsf{M}$ se tienen los isomorfismos lineales siguientes

$$\begin{aligned} \mu_*(x) : T_x(\mathsf{M}) &\to T_{\mu(x)}(\mathsf{N}), \\ \mu^*(x) = {}^t\mu_*(x) : T^*_{\mu(x)}(\mathsf{N}) &\to T^*_x(\mathsf{M}), \\ \left(\mu^{-1}\right)^*(\mu(x)) : T^*_x(\mathsf{M}) &\to T^*_{\mu(x)}(\mathsf{N}). \end{aligned}$$

Se define entonces el siguiente isomorfismo

$$\widetilde{\mu}(x) : \bigotimes\nolimits^r_s T_x(\mathsf{M}) \to \bigotimes\nolimits^r_s T_{\mu(x)}(\mathsf{N})$$

dado para $K_x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s \in \bigotimes^r_s T_x(\mathsf{M})$ por

$$\widetilde{\mu}(K_x) = \mu_*(v_1) \otimes \cdots \otimes \mu_*(v_r) \otimes (\mu^{-1})^*(\theta^1) \otimes \cdots \otimes (\mu^{-1})^*(\theta^s);$$

y se extiende por linealidad, obteniéndose así un isomorfismo de espacios vectoriales.

Tratamos ahora de asociar al difeomorfismo $\mu : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ un isomorfismo entre las álgebras $\mathfrak{T}(\mathsf{M})$ y $\mathfrak{T}(\mathsf{N})$. Siendo $\mathfrak{T}(\mathsf{M})$ el conjunto de las aplicaciones diferenciables de M en el fibrado $\bigcup\limits_{x\in} \sum\limits_{r,s\geq 0} \bigotimes^r_s T_x(\mathsf{M})$ que compuesta con la proyección canónica da la identidad en M (tensores diferenciables de cualquier tipo sobre M).

Para ello empezamos definiendo las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\mu} : \mathfrak{T}^0_0(\mathsf{M}) = \mathfrak{F}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{T}^0_0(\mathsf{N}) = \mathfrak{F}(\mathsf{N}), & \widetilde{\mu}(f) = f \circ \mu^{-1}, & \forall f \in \mathfrak{T}^0_0(\mathsf{M}) \\ \widetilde{\mu} : \mathfrak{T}^1_0(\mathsf{M}) = \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{T}^1_0(\mathsf{N}) = \mathfrak{X}(\mathsf{N}), & \widetilde{\mu}(X) = \mu_* \circ X \circ \mu^{-1}, & \forall X \in \mathfrak{T}^1_0(\mathsf{M}) \\ \widetilde{\mu} : \mathfrak{T}^0_1(\mathsf{M}) = \Omega^1(\mathsf{M}) \to \mathfrak{T}^0_1(\mathsf{N}) = \Omega^1(\mathsf{N}), & \widetilde{\mu}(\omega) = (\mu^{-1})^* \circ \omega \circ \mu^{-1}, & \forall \omega \in \mathfrak{T}^0_1(\mathsf{M}) \end{array}$$

Las cuales se extendienden de modo natural a una única aplicación

$$\widetilde{\mu} : \mathfrak{T}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{T}(\mathsf{N}),$$

y se tiene el siguiente resultado, basándonos en la Proposición 2.23

Proposición 2.48 *Todo difeomorfismo* $\mu : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ *induce un único isomorfismo de álgebra* $\widetilde{\mu} : \mathfrak{T}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{T}(\mathsf{N})$ *que conserva el tipo tensorial y conmuta con la contración.* ◪

2.8 Formas diferenciales

Consideremos en cada punto $x \in \mathsf{M}$, de una variedad diferenciable M de dimensión n, el espacio vectorial $\bigwedge^k T_x^*(\mathsf{M})$, de dimensión $\binom{n}{k}$.

Definición 2.49 *Al conjunto*

$$\bigwedge^k \mathsf{M} = \bigcup_{x\in} \left(\bigwedge^k T_x^*(\mathsf{M})\right)$$

se denomina fibrado de las k–formas *de la variedad* M.

Y se denota por $\pi : \bigwedge^k \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ la proyección canónica. Enunciamos, a continuación resultados análogos a los que se tienen para los fibrados anteriormente estudiados y de los cuales omitiremos su demostración:

Teorema 2.50 $\bigwedge^k \mathsf{M}$ *tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión* $n + \binom{n}{k}$ *tal que* $\pi\colon \bigwedge^k \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ *es una submersión.* ◪

Definición 2.51 *Una* k–forma diferencial *sobre* M *a una aplicación* $\omega\colon \mathsf{M} \to \bigwedge^k \mathsf{M}$, *tal que* $\pi \circ \omega = 1$.

Si ω es una k–forma diferencial y $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ se considera la función

$$\omega(X_1, \ldots, X_k)\colon \mathsf{M} \to I\!R$$

$$x \in \mathsf{M} \longmapsto (\omega(X_1, \ldots, X_k))\,(x) = \omega_x\,(X_1(x), \ldots, X_k(x)) \in I\!R.$$

Si $\left(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\right)$ es una carta local en M, definimos las k–formas diferenciables $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} : U \to \bigwedge^k U$, por $dx^{i_1}{}_{|x} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}{}_{|x} \in \bigwedge^k (T_x^*(\mathsf{M}))$.

Proposición 2.52 *Una k–forma diferencial* $\omega\colon \mathsf{M} \to \bigwedge^k \mathsf{M}$ *es diferenciable si y sólo si* $\forall X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ *se tiene que* $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ *es diferenciable.* ◪

Representaremos por $\Omega^k(\mathsf{M})$ el conjunto de todas las k–formas diferenciables sobre M.

Cada $\Omega^k(\mathsf{M})$ es un $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–módulo y si U es un abierto coordenado $\Omega^k(U)$ es un $\mathfrak{F}(U)$-módulo de dimensión finita igual a $\binom{n}{k}$.

Si consideramos el espacio fibrado de todas las formas diferenciables sobre una variedad: $\displaystyle\bigcup_{x\in} \sum_{k=0}^{n} \bigwedge^k T_x^*(\mathsf{M})$; sobre el conjunto $\Omega(\mathsf{M})$ de todas las formas diferenciales diferenciables (es decir, de todas las aplicaciones diferenciales de M en tal fibrado que compuestas con la proyección canónica dan la identidad en M), se puede definir una estructura de álgebra, con las operaciones suma de formas del mismo grado, multiplicación por un escalar y con un producto dado por

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x), \qquad \alpha \in \Omega^p(\mathsf{M}), \;\; \beta \in \Omega^q(\mathsf{M}),$$

obteniéndose así una $(p+q)$–forma. El álgebra así obtenida se denomina **álgebra de Grassmann** o **álgebra exterior** de una variedad diferenciable M, y se suele denotar también por $\mathcal{G}(\mathsf{M})$.

Sean M y N variedades diferenciables y $\mu\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ una aplicación diferenciable. Entonces μ induce una aplicación entre las álgebras de Grassmann respectivas: $\mu^*\colon \mathcal{G}(\mathsf{N}) \to \mathcal{G}(\mathsf{M})$, definida como sigue:

$$\mu^* f = f \circ \mu, \qquad \forall f \in \Omega^0(\mathsf{N}) \equiv \mathfrak{F}(\mathsf{N})$$

$$(\mu^*\omega)_x\,(X_1(x), \ldots, X_k(x)) = \omega_{\mu(x)}\,(\mu_*(X_1(x)), \ldots, \mu_*(X_k(x)))$$

$$\forall \omega \in \Omega^k(\mathsf{N})\ (k \geq 0), \quad x \in \mathsf{M}, \quad X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathsf{M}).$$

Es claro que si f y ω son diferenciables también lo son $\mu^* f$ y $\mu^*\omega$.
Finalmente se extiende μ^* a todo $\Omega(\mathsf{N})$ por linealidad.

Las propiedades siguientes son fáciles de establecer:

1. μ^* aplica k–formas sobre k–formas: $\mu^*\colon \Omega^k(\mathsf{N}) \to \Omega^k(\mathsf{M})$.
2. μ^* es un homomorfismo de álgebras; es decir, μ^* es lineal y

$$\mu^*(\alpha \wedge \beta) = \mu^*\alpha \wedge \mu^*\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega(\mathsf{N}).$$

3. Si $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{N})$, entonces $d(\mu^* f) = \mu^*(df)$.
4. Si $\omega \in \Omega^k(\mathsf{N})$ se expresa localmente, respecto a una carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$, por

$$\omega = a_{i_1 \cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

entonces

$$\mu^*\omega = (a_{i_1 \cdots i_k} \circ \mu) d(x^{i_1} \circ \mu) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ \mu).$$

5. $(1\ \ )^* = 1_{\Omega(\ \ )}$.
6. $(\nu \circ \mu)^* = \mu^* \circ \nu^*$, donde $\mu : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ y $\nu : \mathsf{N} \to \mathsf{P}$ son aplicaciones diferenciables entre variedades.

2.9 Diferencial exterior

Teorema 2.53 *Sea* M *una variedad diferenciable, existe una única aplicación lineal*

$$d\colon \Omega(\mathsf{M}) \to \Omega(\mathsf{M})$$

llamada la diferencial exterior*, tal que cumple las propiedades siguientes:*

1. $d\colon \Omega^k(\mathsf{M}) \to \Omega^{k+1}(\mathsf{M})$.
2. $d(f) = df$ *(diferencial ordinaria),* $f \in \Omega^0(\mathsf{M}) \equiv \mathfrak{F}(\mathsf{M})$.
3. $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta, \quad \alpha \in \Omega^k(\mathsf{M}),\ \beta \in \Omega(\mathsf{M})$.
4. $d^2 = d \circ d = 0$.

Para la demostración necesitamos el siguiente Lema 2.54 que afirma que para todo operador diferencial exterior d, $(d\omega)(x)$ depende sólo del valor de ω en un entorno abierto de x.

Lema 2.54 *Sea* $d\colon \Omega(\mathsf{M}) \to \Omega(\mathsf{M})$ *lineal y satisfaciendo las condiciones del teorema. Supongamos que* $\omega \in \Omega(\mathsf{M})$ *es tal que* $\omega_{|W} = 0$ *para algún conjunto abierto* $W \subset \mathsf{M}$*. Entonces* $(d\omega)_{|W} = 0$.

Así, si $\omega, \tau \in \Omega(\mathsf{M})$ *son tales que* $\omega_{|W} = \tau_{|W}$*, entonces* $(d\omega)_{|W} = (d\tau)_{|W}$.

Demostración.- Supongamos que $\omega_{|W} = 0$. Sea $x_0 \in W$ y $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0, \forall x \notin W$ (ver Lema 2.44). Entonces $f\omega$ es idénticamente nula en M, así que

$$0 = d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega.$$

Evaluando en x_0, resulta $(d\omega)(x_0) = 0$. Ya que esto se tiene para todo $x_0 \in W$, $d\omega_{|W} = 0$.

Si $\omega_{|W} = \tau_{|W}$, entonces $(\omega - \tau)_{|W} = (d\omega - d\tau)_{|W} = 0$ y $(d\omega)_{|W} = (d\tau)_{|W}$. ◪

Demostración del Teorema.- Unicidad: Supongamos que $d : \Omega(\mathsf{M}) \to \Omega(\mathsf{M})$ satisface las condiciones del teorema. Sea $x \in \mathsf{M}$, $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ una carta alrededor de x y $\omega \in \Omega^k(\mathsf{M})$. Entonces la restricción de ω a U se expresa por:

$$\omega_{|U} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \qquad a_{i_1 \cdots i_k} \in \mathfrak{F}(U).$$

Ahora bien, el término de la derecha de esta ecuación no es una forma diferencial sobre M, por tanto no le podemos aplicar el operador d. No obstante, sea U_1 un abierto conteniendo a x con $\overline{U_1}$ compacto y $\overline{U_1} \subset U$, y sea (en virtud del Lema 2.44) $g \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ tal que $g(x) = 1, \forall x \in \overline{U_1}$; $g(x) = 0, \forall x \notin U$.

Entonces

$$\widetilde{\omega} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (g a_{i_1\cdots i_k}) d(gx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(gx^{i_k}) \in \Omega^k(\mathsf{M})$$

entendiendo los producto de funciones de la fórmula, gh, para $h \in \mathfrak{F}(U)$, como sigue

$$(gh)(x) = \begin{cases} g(x)h(x) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Además se tiene, $\widetilde{\omega}_{|U_1} = \omega_{|U_1}$. Y, por el Lema 2.54, se sigue que $(d\widetilde{\omega})_{|U_1} = (d\omega)_{|U_1}$.

Si ahora calculamos su diferencial

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega} &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d\Big(g a_{i_1\cdots i_k} d(gx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(gx^{i_k})\Big) \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d(g a_{i_1\cdots i_k}) \wedge d(gx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(gx^{i_k}) + \\ &\quad + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} g a_{i_1\cdots i_k} d\Big(d(gx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(gx^{i_k})\Big) = \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d(g a_{i_1\cdots i_k}) \wedge d(gx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(gx^{i_k}). \end{aligned}$$

En particular, ya que g es idénticamente 1 en U_1 y ya que $(d\widetilde{\omega})_{|U_1} = (d\omega)_{|U_1}$,

$$(d\omega)_{|U_1} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}(a_{i_1\cdots i_k}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Así, si d existe, su valor en x sobre k–formas debe estar dado por esta fórmula. Ya que x es arbitrario en M y que toda forma diferencial es suma de k–formas, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, la unicidad queda establecida.

<u>Existencia:</u> Primeramente definimos d localmente. Sea $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$ una carta en M, definimos

$$d_U : \Omega(U) \to \Omega(U)$$

como sigue, para

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \qquad a_{i_1\cdots i_k} \in \mathfrak{F}(U)$$

$$\boxed{d_U\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}(a_{i_1\cdots i_k}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.}$$

Extendemos d_U a $\Omega(U)$ por linealidad.

Las propiedades (1) y (2) se satisfacen claramente.

Para verificar (3) y (4), notemos primero que cada forma en $\Omega(U)$ es suma de formas de tipo

$$adx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}.$$

Por la linealidad de d, junto con la distributividad de la multiplicación respecto a la suma, es suficiente comprobar (3) y (4) sobre formas de este tipo:

(3) Supongamos

$$\alpha = adx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}, \qquad \beta = bdx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta) &= d(ab\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}) = \\
&= \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^r}(a)b + a\frac{\partial}{\partial x^r}(b)\right) dx^r\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell} = \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^r}(a)dx^r\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right)\wedge\left(b\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}\right) + \\
&\quad +(-1)^k\left(a\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right)\wedge\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^r}(b)dx^r\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}\right) = \\
&= (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta.
\end{aligned}$$

(4) Para $\omega = a\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$

$$\begin{aligned}
d^2\omega &= d\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^r}(a)dx^r\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right) = \\
&= \sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{\partial}{\partial x^r}(a)\right) dx^s\wedge dx^r\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} = 0
\end{aligned}$$

pues los términos en esta expresión con $r = s$ son nulos, ya que $dx^r\wedge dx^r = 0$. Además para $r\neq s$, la igualdad de las derivadas parciales mixtas sobre $\mathbb{R}^n$, implica que

$$\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial x^r}a = \frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial x^s}a;$$

así que

$$\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial x^r}a\, dx^s\wedge dx^r = -\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial x^s}a\, dx^r\wedge dx^s,$$

con lo que los restantes términos se cancelan.

Así el operador d_U tiene las propiedades (1) – (4).

Por la unicidad, todo operador lineal sobre $\Omega(\mathsf{M})$ cumpliendo estas propiedades debe estar dado por la fórmula recuadrada.

En particular, si U_1 es un subconjunto abierto de U, entonces $(U_1, \varphi_{|U_1})$ es un sistema coordenado de M y $d_{U_1} : \Omega(U_1) \to \Omega(U_1)$ está dado en el sistema coordenado $\varphi_{|U_1}$ por la misma fórmula. Así, si $\omega \in \Omega(\mathsf{M})$, entonces

$$d_{U_1}(w_{|U_1}) = \big(d_U(\omega_{|U})\big)_{|U_1} .$$

Esta relación nos permite definir d globalmente por

$$(dw)_{|U} = d_U(\omega_{|U}),$$

para todo $\omega \in \Omega(\mathsf{M})$ y todo entorno coordenado U.

Este d está bien definido puesto que si U y V son dos entornos coordenados que se solapan, entonces

$$\big(d_U(\omega_{|U})\big)_{|U\cap V} = d_{U\cap V}(\omega_{|U\cap V}) = \big(d_V(\omega_{|V})\big)_{|U\cap V} .$$

Así, d tiene las propiedades requeridas, ya que d_U las tiene para cada U. ◪

Proposición 2.55 *El operador diferencial exterior sobre dos variedades diferenciables* M *y* N *conmuta con la aplicación inducida entre sus álgebras de Grassmann por la aplicación diferenciable* $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$*; es decir,*

$$F^* \circ d = d \circ F^*$$

esto es, $\forall k \geq 0$*, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k\mathsf{N} \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^k\mathsf{M} \arrow[d, "d"] \\
\Omega^{k+1}\mathsf{N} \arrow[r, "F^*"] & \Omega^{k+1}\mathsf{M}
\end{tikzcd}$$

Demostración.- Debido a las propiedades de F^*, linealidad y comportamiento respecto al producto exterior $(F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta))$, y al carácter local y linealidad del operador d, basta verificar la igualdad del enunciado solamente para los elementos de grado 0 y 1.

1) Si $f \in \Omega^0(\mathsf{N}) \equiv \mathfrak{F}(\mathsf{N})$, $v \in T_x(\mathsf{M})$:

$$\big((d \circ F^*)(f)\big)(v) = \big(d(f \circ F)\big)(v) = v(f \circ F) = \big(F_*(v)\big)(f) =$$
$$= df\big(F_*(v)\big) = \big(F^*(df)\big)(v) = \big((F^* \circ d)(f)\big)(v).$$

2) Si $df \in \Omega^1(\mathsf{N})$

$$(d \circ F^*)(df) = d\big(F^*(df)\big) = d\big(d(F^*f)\big) = (d \circ d)(F^*f) = 0$$

$$(F^* \circ d)(df) = F^*\big((d \circ d)(f)\big) = 0.$$

◪

Proposición 2.56 *Sea $\omega \in \Omega^1(\mathsf{M})$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, entonces tenemos la fórmula siguiente*

$$d\omega(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\Big).$$

Demostración.- Es suficiente probar esta relación localmente. En una carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$, se tiene $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i$ y es fácil demostrar que la ecuación del enunciado se verifica para todo ω, si se verifica para un ω de la forma $f\,dg$, donde f y g son funciones diferenciables en U. Supongamos, por tanto, que $\omega = f\,dg$, y sean X, Y campos de vectores diferenciables. Evaluando ambos miembros de la ecuación por separado se obtiene

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y) &= (df \wedge dg)(X,Y) = \\
&= \frac{1}{2}\big(df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X)\big) = \\
&= \frac{1}{2}\big((Xf)(Yg) - (Xg)(Yf)\big) \\
X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) &= X\,(f\,dg(Y)) - Y\,(f\,dg(X)) - f\,dg([X,Y]) = \\
&= X\,(f(Yg)) - Y\,(f(Xg)) - f\,(X(Yg) - Y(Xg)) \\
&= (Xf)(Yg) - (Xg)(Yf).
\end{aligned}$$

◪

2.10 Formas cerradas y exactas. Cohomología de De Rham

Definición 2.57 *Una forma diferencial α sobre una variedad diferenciable M se dice que es* cerrada *si $d\alpha = 0$; y se dice que es* exacta *si existe una forma β tal que $\alpha = d\beta$.*

Claramente toda forma exacta es cerrada, ya que $d^2 = 0$; mientras que el inverso no es cierto; es decir, dada una k–forma cerrada, no existe en general una $(k-1)$–forma cuya diferencial sea la dada.

Ejemplo 2.58 Sea M un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\alpha = \alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy$, con α_1 y α_2 funciones diferenciables en M, entonces

$$d\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}$$

se deduce que si α es cerrada, existe localmente una función f tal que $\alpha = df$.

Ejemplo 2.59 La forma en $\mathsf{M} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\alpha = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

es cerrada pero no exacta. Aunque podemos poner $\alpha = d(arctag\frac{y}{x})$, $arctag\frac{y}{x}$ no es una función unívocamente definida en en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

El hecho de que una forma cerrada sea también exacta está estrechamente ligado a la topología de la variedad. De hecho se puede caracterizar a través de su cohomología. A tal fin vamos a estudiar la cohomología en la variedad definida haciendo uso del operador diferencial exterior.

Representaremos por

$$\mathcal{Z}^k(\mathsf{M}, d) = \left\{\omega \in \Omega^k(\mathsf{M}) \big/ d\omega = 0\right\},$$

$$\mathcal{B}^k(\mathsf{M}, d) = \left\{\omega \in \Omega^k(\mathsf{M}) \big/ \exists\eta \in \Omega^{k-1}(\mathsf{M}),\ \omega = d\eta\right\}.$$

En términos del operador diferencial exterior, $d_k : \Omega^k(\mathsf{M}) \to \Omega^{k+1}(\mathsf{M})$, estos conjuntos son respectivamente el núcleo de d_k, $Ker\, d_k$, y la imagen de d_{k-1}, $Im\, d_{k-1} = d_{k-1}(\Omega^{k-1}(\mathsf{M}))$; y, por consiguiente, son ambos subgrupos del grupo aditivo $\Omega^k(\mathsf{M})$, y se tiene que $\mathcal{B}^k(\mathsf{M}, d) \subset \mathcal{Z}^k(\mathsf{M}, d)$, lo que nos permite dar la siguiente definición:

Definición 2.60 *El grupo cociente*

$$H^k(\mathsf{M}, d) = \frac{\mathcal{Z}^k(\mathsf{M}, d)}{\mathcal{B}^k(\mathsf{M}, d)}$$

se denomina k–ésimo grupo de cohomología de de Rham *de la variedad* M.

Aunque los grupos de cohomología son definidos en términos de la estructura diferenciable de la variedad M, ellos son invariantes topológicos; esto es, si dos variedades son homeomorfas (pero no necesariamente difeomorfas), entonces sus grupos de cohomología son isomorfos, de hecho estos grupos pueden ser definidos directamente usando sólo la estructura topológica de M.

Ejemplo 2.61 Sea M una variedad diferenciable conexa. Entonces

$$H^0(\mathsf{M}, d) \cong \mathbb{R}.$$

En efecto; comencemos por observar que, puesto que no existen formas diferenciales de grado negativo, $\mathcal{B}^0(\mathsf{M}, d) \equiv 0$.

Por tanto

$$H^0(\mathsf{M}, d) = \mathcal{Z}^0(\mathsf{M}, d) = \{f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}) / df = 0\}.$$

Observemos ahora que, si $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n))$ es una carta coordenada en M, $df = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(f)dx^i = 0$ en U significa que $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pero esto significa trivialmente que f es constante sobre U; puesto que M es conexa y f es constante sobre cada entorno coordenado en M, necesariamnete f debe ser constante sobre todo M; en consecuencia

$$\mathcal{Z}^0(\mathsf{M}, d) = \{f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}) / f = cte\} \cong I\!R.$$

Si M no es conexa y tiene p componentes conexas, entonces $H^0(\mathsf{M}, d) \cong I\!R^p$.

Ejemplo 2.62 La circunferencia unidad $\mathsf{S}^1 = \{(x, y) \in I\!R^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 1 y conexa, luego $H^0(\mathsf{S}^1, d) \cong I\!R$. Ahora probemos que también

$$H^1(\mathsf{S}^1, d) \cong I\!R.$$

En efecto; comencemos por observar que, puesto que no existen formas diferenciales de grado dos sobre S^1 no nulas se tiene

$$\mathcal{Z}^1(\mathsf{S}^1, d) = \Omega^1(\mathsf{S}^1).$$

Por otra parte,

$$\mathcal{B}^1(\mathsf{S}^1, d) = \{df / f \in \mathfrak{F}(\mathsf{S}^1)\}.$$

Representemos por θ la función coordenada natural sobre S^1, función coordenada polar; asociada a ella tenemos el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial\theta}$ no nulo sobre S^1 y la 1–forma dual $d\theta$ [(1)]. Ahora sea $\omega \in \Omega^1(\mathsf{S}^1)$; entonces, puesto que $\Omega^1(\mathsf{S}^1)$ es de dimensión 1, será

$$\omega = g(\theta)\, d\theta$$

para una función diferenciable g; consideremos la 1–forma una diferencial sobre S^1 dada por

$$\omega - c\, d\theta$$

para $c \in I\!R$ definido por

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta.$$

Afirmamos que $\omega - c\, d\theta$ es exacta; en efecto, definimos $f \colon \mathsf{S}^1 \to I\!R$ por

$$f(\theta) = \int_0^{\theta} (g(\theta) - c) d\theta$$

y, puesto que $f(\theta + 2\pi n) = f(\theta)$, $\forall n \in Z$, f está bien definida y $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{S}^1)$. Además

$$df = (g(\theta) - c) d\theta = \omega - c\, d\theta,$$

por tanto, $\omega - c\, d\theta$ es una 1–forma diferencial exacta. Así

$$H^1(\mathsf{S}^1, d) = \frac{\mathcal{Z}^1(\mathsf{S}^1, d)}{\mathcal{B}^1(\mathsf{S}^1, d)} \cong \{c\, d\theta / c \in I\!R\} \cong I\!R.$$

(1) ¡Ojo con la notación! $d\theta$ no es la diferencial de la función θ, puesto que θ es una función diferencial definida tan sólo localmente.

En los ejemplos anteriores hemos visto ya que los grupos de cohomología de de Rham son, en general, no triviales. Nuestro propósito inmediato es ver que bajo circunstancias especiales, esos grupos son triviales.

De hecho vamos a probar que

$$H^k(\mathbb{R}^n, d) = 0, \qquad \forall k > 0.$$

Observemos que puesto que $\mathbb{R}^n$ es trivialmente difeomorfo a $B_0^n(1)$, la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ de centro en el origen y de radio unidad, probaremos, en su lugar lo que se conoce como el Teorema de Poincaré, esto es, que

$$H^k(B_0^n(1), d) = 0, \qquad \forall k > 0.$$

Para ello, utilizaremos el siguiente lema:

Lema 2.63 *Sea* M *una variedad diferenciable; para cada* $k \geq 1$, *consideremos*

$$\Omega^{k-1}(\mathsf{M}) \xrightarrow{d} \Omega^k(\mathsf{M}) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(\mathsf{M})$$

y supongamos que existan aplicaciones lineales

$$h_j \colon \Omega^{j+1}(\mathsf{M}) \to \Omega^j(\mathsf{M}), \quad j = k-1, k$$

tal que

$$h_k \circ d + d \circ h_{k-1} = 1_{\Omega^k(M)}.$$

Entonces

$$H^k(\mathsf{M}, d) = 0.$$

Demostración.- Debemos probar que toda k–forma diferencial cerrada es exacta. Sea, pues $\omega \in \Omega^k(\mathsf{M})$ con $d\omega = 0$. Entonces

$$\omega = (h_k \circ d + d \circ h_{k-1})\omega = h_k(d\omega) + d(h_{k-1}\omega) = d(h_{k-1}\omega),$$

por tanto, ω es una forma exacta. ◪

Proposición 2.64 (Teorema de Poincaré)

$$H^k(B_0^n(1), d) = 0, \quad \forall k > 0.$$

Demostración.- De acuerdo con el lema anterior nos bastará construir aplicaciones lineales h_{k-1}, h_k satisfaciendo las condiciones de dicho lema. Además puesto que estas aplicaciones han de ser lineales, nos bastará definir h_{k-1} sobre formas diferenciales $\omega = g\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, y análogamente para h_k.

Así, para un tal ω, definimos

$$h_{k-1}(\omega)(x) = \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) \mu$$

donde

$$\mu = x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - x^{i_2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_3} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \cdots + (-1)^{k-1} x^{i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

Es claro que

$$d\mu = k dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

La aplicación h_k se define de forma análoga reemplazando k por $k+1$.

Ahora, para $\omega = g\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(B_0^1(1))$ y $x \in B_0^n(1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
(d \circ h_{k-1})(\omega)(x) &= d\left(\Big(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt\Big)\mu\right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx)\, dt\right) dx^j \wedge \mu + \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx)\, dt\right) d\mu = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial}{\partial x^j}\big(g(tx)\big) dt\right) dx^j \wedge \mu + \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx)\, dt\right) d\mu = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) dt\right) dx^j \wedge \mu + k\left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx)\, dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
(h_k \circ d)(\omega)(x) &= h_k\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) dt\right) (x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - dx^j \wedge \mu).
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&(d \circ h_{k-1} + h_k \circ d)(\omega)(x) = \\
&= \left(k\left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt\right) + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k x^j \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) dt\right)\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\
&= \left(\int_0^1 \left(k t^{k-1} g(tx) + t^k \frac{d}{dt}\big(g(tx)\big)\right) dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\
&= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^k g(tx)\right) dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\
&= \left[t^k g(tx)\right]_0^1 dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = g(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \omega(x).
\end{aligned}$$

◪

Nota 2.65 Este resultado es válido en cualquier abierto U estrellado respecto a uno de sus puntos p, es decir, tal que el segmento de recta que une cualquiera de sus puntos con p está enteramente contenido en U. Por lo que podemos reenunciar el Lema de Poincaré de la siguiente forma:

Proposición 2.66 *Sea* $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto estrellado respecto a uno de sus puntos, entonces toda forma cerrada sobre* M *es exacta.*

3

Sistemas diferenciales
Teorema de Frobenius

3.1 Curvas integrales y campos de vectores

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una curva diferenciable en M (ver Nota 1.51) es una aplicación diferenciable $\gamma : I \subset I\!R \to \mathsf{M}$ de un intervalo abierto de $I\!R$ en M. Si $(I, 1_I)$ es la carta identidad en I y si $\frac{d}{dt}$ es el correspondiente campo de vectores básico en I, el vector tangente a γ en $t \in I$, denotado por $\dot{\gamma}(t)$, está definido por

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma_* \left(\frac{d}{dt}_{|t} \right).$$

Consideremos ahora $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, un campo de vectores diferenciable sobre M.

Definición 3.1 *Una* curva integral *del campo de vectores X es una curva diferenciable $\gamma :]a, b[\to \mathsf{M}$ tal que el vector tangente a γ en cada punto es el representante de X en ese punto; es decir,*

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}, \qquad \forall t \in \,]a, b[.$$

Supongamos que γ es una curva en M con dominio I. Elegimos una carta $\left(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\right)$ en M cuyo abierto coordenado intersecta a $\gamma(I)$. Entonces la i–ésima componente de $\dot{\gamma}$ relativamente a la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ es

$$dx^i(\dot{\gamma}) = dx^i \left(\gamma_*(\frac{d}{dt}) \right) = \left(\gamma_*(\frac{d}{dt}) \right)(x^i) = \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma),$$

con lo que

$$\dot{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si respecto a la carta (U, φ) el campo de vectores X se expresa por

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

entonces γ es una curva integral de X si y sólo si

$$\frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} = X^i \circ \gamma \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Por tanto, para hallar las curvas integrales de un campo de vectores X en un entorno coordenado U de la variedad M nos bastará resolver el sistema de ecuaciones diferenciables (3.1). Para la existencia de soluciones de tal sistema nos bastará utilizar los teoremas clásicos de la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Ejemplo 3.2 Consideremos el campo de vectores en $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la carta identidad $(\mathbb{R}^2, 1_{\mathbb{R}^2})$ de funciones coordenadas (x^1, x^2), por

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Una curva $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva integral de X si y sólo si

$$\frac{d(x^1 \circ \gamma)}{dt} = x^1 \circ \gamma \qquad \frac{d(x^2 \circ \gamma)}{dt} = x^2 \circ \gamma.$$

Se sigue que las componentes de la aplicación que define la curva son

$$\gamma^1(t) = ae^t, \qquad \gamma^2(t) = be^t.$$

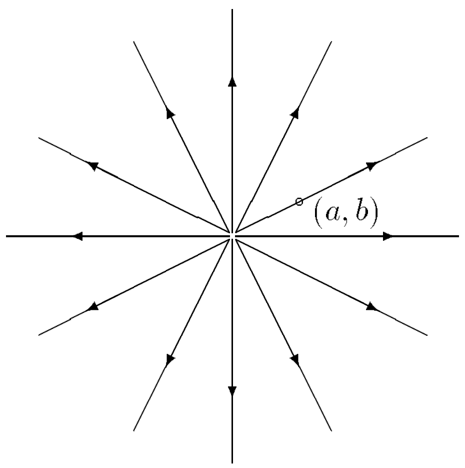


Fig. 3.1:

Por consiguiente, existe una curva integral con dominio $\mathbb{R}$

$$\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \longmapsto (ae^t, be^t)$$

partiendo de un punto dado (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

Nótese que la curva integral partiendo de (0,0) es constante, esto es debido a que el campo de vectores X es nulo en $(0, 0)$. A tal punto se le llama punto crítico del campo de vectores.

Ya que existe una curva integral con dominio $\mathbb{R}$ partiendo de cualquier punto, este campo de vectores se dice que es completo.

Ejemplo 3.3 Consideremos el campo de vectores en $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la carta identidad $(\mathbb{R}^2, 1_{\mathbb{R}^2})$ de funciones coordenadas (x^1, x^2) por

$$X = e^{-x^1} \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Una curva $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ es una curva integral de X si y sólo si

$$\frac{d\gamma^1}{dt} = e^{-\gamma^1} \qquad \frac{d\gamma^2}{dt} = 0.$$

Se sigue que existe una curva integral

$$\gamma(t) = (ln\,(t + e^a), b),$$

pasando por un punto (a, b) de $\mathbb{R}^2$, cuyo dominio es el intervalo abierto $]-e^a, \infty[$ de $\mathbb{R}$.

Este campo de vectores no tiene puntos críticos y es no completo.

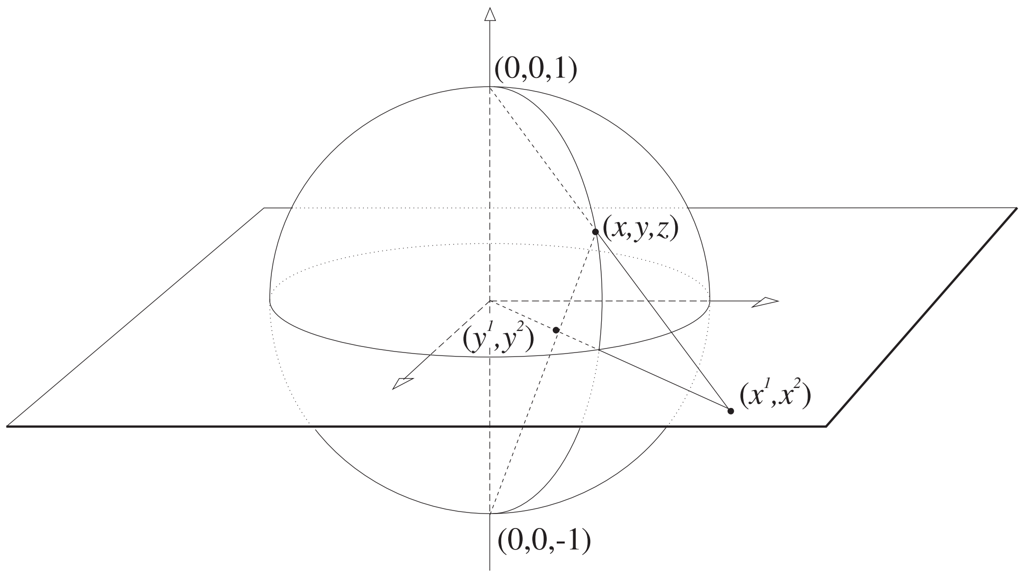


Fig. 3.2: Proyección estereográfica

Ejemplo 3.4 Supongamos que en la esfera unidad S^2, (U, φ) y (V, ϕ) son las cartas con dominios $U = \mathsf{S}^2 - \{(0,0,1)\}$ y $V = \mathsf{S}^2 - \{(0,0,-1)\}$ del atlas estereográfico en S^2. Los homeomorfismos coordenados están definidos (ver Fig. 3.2) por

$$\begin{array}{cc} \varphi\colon U \to \mathbb{R}^2 & \phi\colon V \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (x^1, x^2) & (x,y,z) \longmapsto (y^1, y^2). \end{array}$$

Consideremos el campo de vectores en S^2, definido por los campos de vectores

$$(x^1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + (x^1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$(-y^1 - y^2)\frac{\partial}{\partial y^1} + (y^1 - y^2)\frac{\partial}{\partial y^2}$$

en U y V respectivamente, los cuales coinciden en $U \cap V$, y juntos definen un campo de vectores X en S^2, con los puntos $(0,0,\pm 1)$ críticos. Todo esto surge del hecho de que se verifica

$$\frac{x^1}{y^1} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^1} = -\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{(y^2)^2 - (y^1)^2}{\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^2} = \frac{\partial x^2}{\partial y^1} = \frac{-2y^1 y^2}{\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right)^2}.$$

Las curvas integrales están definidas por las ecuaciones

$$\frac{d\gamma^1}{dt} = \gamma^1 - \gamma^2, \qquad \frac{d\gamma^2}{dt} = \gamma^1 + \gamma^2,$$

cuya solución es

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(a\, cos(t+b)e^t, a\, sen(t+b)e^t),$$

donde los números reales a y b están determinados unívocamnete por la condición de que $\gamma(0)$ sea un punto de $U \cap V$.

Ya que el dominio de cada curva integral es $I\!R$, el campo de vectores X es completo.

La representación gráfica de la proyección $\varphi \circ \gamma$ de una curva integral no constante γ desde el punto $(0,0,1)$ sobre el plano $z=0$ es una espiral.

3.2 Grupo unipamétrico de transformaciones

Definición 3.5 *Una* transformación *de una variedad diferenciable* M *es un difeomorfismo de* M *en sí mismo.*

Definición 3.6 *Un* grupo uniparamétrico de transformaciones *de* M *es una aplicación diferenciable*

$$\phi \colon I\!R \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$$

verificando:

1) $\forall t \in I\!R$*, la aplicación* $\phi_t \colon \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ *dada por* $\phi_t(x) = \phi(t,x)$*, es una transformación de* M*.*

2) $\forall x \in \mathsf{M}$*, la aplicación diferenciable* $\phi_x \colon I\!R \to \mathsf{M}$ *dada por* $\phi_x(t) = \phi(t,x)$*, verifica* $\phi_x(0) = x$*.*

3) $\forall s,t \in I\!R$ *se verifica* $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$*.*

Procedemos, a continuación, a asociar a cada campo de vectores X sobre una variedad diferenciable M, un grupo uniparamétrico de transformaciones ϕ. Para lo cual dado un punto $x \in \mathsf{M}$ y un número real t suficientemente próximo al cero, definimos

$$\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$$

poniendo $\phi(t,x) = \gamma(t)$, donde γ es una curva integral de X pasando por $x \in \mathsf{M}$, $\gamma(0) = x$.

Por la dependencia de las soluciones de una ecuación diferencial de las condiciones iniciales, según los teoremas relativos a esta teoría, se llega a demostrar que las aplicaciones ϕ verifican las condiciones necesarias para definir un grupo uniparamétrico.

Recíprocamente, dado un grupo uniparamétrico $\phi : \mathbb{R} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ de transformaciones de M, definimos un campo de vectores sobre M, tomando como representante, en un punto $x \in \mathsf{M}$, el vector tangente a la curva en M que pasa por x: $\gamma = \phi_x : \mathbb{R} \to \mathsf{M}$; $\phi_x(t) = \phi(t,x)$.

Más precisamente:

Proposición 3.7 *Todo grupo uniparamétrico ϕ de transformaciones de M define un campo de vectores diferenciable $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$.*

Demostración.- Sea $X : \mathsf{M} \to T(\mathsf{M})$ campo de vectores dado por $X_x \in T_x(\mathsf{M})$, vector determinado por

$$X_x(f) = \frac{d(f \circ \phi_x)}{dt}_{|0}, \qquad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M}).$$

◪

El campo de vectores X es tal que sus curvas integrales son precisamente las curvas ϕ_x para todo $x \in \mathsf{M}$. Se dice entonces que el campo de vectores X es el generador del grupo uniparamétrico ϕ o que éste es generado por X.

A partir de la definición del campo de vectores X, vamos a obtener otra expresión de dicho campo.

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ \phi_x)}{dt}_{|0} &= \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\big((f \circ \phi_x)(t) - (f \circ \phi_x)(0)\big) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\big(f(\phi(t,x)) - f(x)\big) = \\
&= \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\big((f \circ \phi_t)(x) - f(x)\big) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\big((\phi_t^*(f))(x) - f(x)\big).
\end{aligned}$$

Luego

$$X_x(f) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\left((\phi_t^*(f))(x) - f(x)\right).$$

Probemos ahora el resultado recíproco (local) del anterior:

Proposición 3.8 *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$. Para cada punto $x \in \mathsf{M}$, existen un abierto U de x, un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ y una única aplicación diferenciable*

$$\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \to \mathsf{M}$$

tal que

1. *$\forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\phi_t\colon U \to \mathsf{M}$, dada por $\phi_t(x) = \phi(t,x)$, es un difeomorfismo de U sobre su imagen $U_t = \phi_t(U)$.*
2. *$\forall s,t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, tal que $s+t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ y $\phi_s(U) \subset U$, se tiene*

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}.$$

3. *El grupo uniparamétrico local $\{\phi_t\}$ induce sobre U el campo de vectores X dado.*

Demostración.- Vamos a demostrar primeramente la existencia y unicidad de ϕ. Todo punto $x \in \mathsf{M}$ está contenido en un abierto coordenado W y tiene coordenadas locales $(x^1,\dots,x^n)$. Si $X^1,\dots,X^n$ son las componentes de X e $(y^1,\dots,y^n)$ son las coordenadas locales del punto $\phi_x(t)$, se debe tener:

$$\frac{dy^i}{dt} = X^i(y^1,\dots,y^n) \tag{3.2}$$

$$y^i(0;x^1,\dots,x^n) = x^i. \tag{3.3}$$

Estas ecuaciones expresan que las funciones $y^1,\dots,y^n$ de $t,x^1,\dots,x^n$ son solución del sistema diferencial (3.2) tomando para $t=0$ los valores $(x^1,\dots,x^n)$.

Se sabe que el sistema diferencial (3.2) admite bajo las condiciones de regularidad clásicas concernientes a las funciones X^i, para t suficientemente pequeño, una solución local diferenciable y sólo una, que depende diferenciablemente de las condiciones iniciales $x^1,\dots,x^n$. Más exactamente, existe un número $\delta > 0$, un entorno abierto V de x contenido en W y una única aplicación diferenciable

$$\phi\colon I_\delta \times V \to \mathsf{M}$$

tal que $\phi(0,x) = x$, para todo $x \in V$. La unicidad de esta aplicación debe entenderse en el sentido siguiente: si $\psi :]-\delta',\delta'[\times V' \to \mathsf{M}$ es otra solución, entonces ϕ y ψ coinciden sobre la intersección $(I_\delta \times V) \cap (I_{\delta'} \times V')$.

1.- Se tiene

$$det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(0,x)\right) = 1.$$

La matriz jacobiana de la transformación es regular en un entorno de x. Se puede pues elegir ε y U para que ϕ_t sea un difeomorfismo de U en $\phi_t(U)$.

2.- ϕ_t es un grupo local de un parámetro. En efecto, la aplicación

$$t \longmapsto \phi(t,\phi(s,x))$$

es la solución del sistema diferencial (3.2) que se reduce para $t=0$ a $\phi(s,x)$. Como el segundo término de (3.2) no depende de t, la aplicación

$$t \longmapsto \phi(s+t,x)$$

es entonces una solución que se reduce para $t = 0$ a $\phi(s, x)$. En virtud de la unicidad, se deduce que si s, t son suficientemente pequeños para que $\phi(s, x) \in U$ si $x \in U$, se tiene

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s + t, x),$$

es decir

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}.$$

Finalmente de que $\phi(0, x) = x$, se sigue que ϕ_0 es la transformación identidad; luego ϕ_t admite una transformación inversa $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

3.- ϕ_t induce sobre U el campo de vectores X dado, pues para todo $x \in U$:

$$\frac{dy^i}{dt}(0, x) = X^i(x).$$

◪

De esta proposición se deduce que todo campo de vectores genera un grupo local uniparamétrico en M, pero en general el grupo ϕ así obtenido no puede prolongarse a todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.9 *Se denomina* soporte *de un campo de vectores X a la clausura del conjunto de puntos de M en los cuales X no es nulo.*

Proposición 3.10 *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ con soporte compacto, entonces X genera un grupo uniparamétrico global de transformaciones de M.*

Demostración.- Designemos por K el soporte de X; al ser M Hausdorff y K compacto, existe un recubrimiento finito de K por compactos K_α contenido en un abierto U_α del tipo de la proposición anterior; es decir

$$K = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha \qquad K_\alpha \subset U_\alpha \qquad A \text{ conjunto finito.}$$

Sea para cada $\alpha \in A$

$$\phi_\alpha :]-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha[\times U_\alpha \to \mathsf{M}$$

el grupo local uniparamétrico correspondiente.

Tomando $\varepsilon = min\{\varepsilon_\alpha / \alpha \in A\}$, definimos la aplicación

$$\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathsf{M} \to \mathsf{M} \qquad \phi(t, x) = \begin{cases} \phi_\alpha(t, x) & \text{si} \quad x \in K_\alpha \\ x & \text{si} \quad x \in \mathsf{M} - K \end{cases}$$

ϕ es una solución del sistema diferencial (3.2), diferenciable y ϕ_t es una transformación de M, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Además para $s, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $s + t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$.

Nos falta probar que se puede definir ϕ_t para cualquier $t \geq \varepsilon$ ó $t \leq -\varepsilon$. En efecto, si $t \geq \varepsilon$ ponemos $t = k\frac{\varepsilon}{2} + r$ con $\|r\| < \frac{\varepsilon}{2}$, y definimos

$$\phi_t = \phi_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ \overset{k)}{\cdots} \circ \phi_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ \phi_r = \phi_{\frac{\varepsilon}{2}}^k \circ \phi_r.$$

Si $t \leq -\varepsilon$, procedemos de forma análoga usando $-\frac{\varepsilon}{2}$. ◪

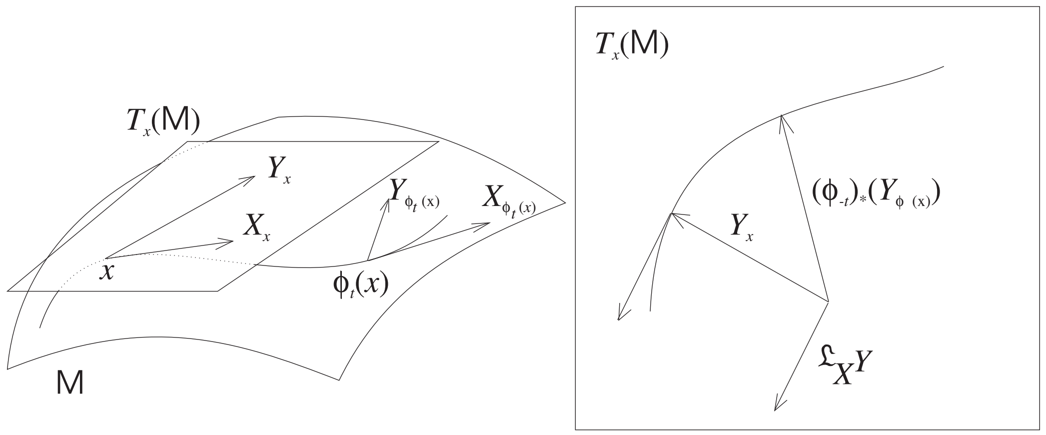


Fig. 3.3: Derivada de Lie

Corolario 3.11 *Si* M *es una variedad compacta todo* $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ *genera un grupo uniparamétrico de transformaciones de* M*. Es decir,* X *es un campo de vectores completo.*

Demostración.- Basta observar que el soporte de X es un cerrado en un compacto, luego es compacto. ◪

3.3 Derivada de Lie

Si $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $\{\phi_t\}_t$ es su grupo uniparamétrico asociado y $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$,

$$\begin{aligned} X_x(f) &= \left((\phi_x)_*\left(\frac{d}{dt}_{|0}\right)\right)(f) = \frac{d}{dt}_{|0}(f \circ \phi_x) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((f\circ\phi_x)(t) - (f\circ\phi_x)(0)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\phi_t^*(f))(x) - f(x)\right). \end{aligned}$$

Definición 3.12 *Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$*, la* derivada de Lie *de* Y *respecto a* X *es el campo de vectores dado por*

$$(\mathfrak{L}_X Y)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\phi_{-t})_*(Y_{\phi_t(x)}) - Y_x\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((Y_x - (\phi_t)_*(Y_{\phi_{-t}(x)})\big) =$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0}\big((\phi_{-t})_*(Y_{\phi_t(x)})\big).$$

Proposición 3.13 *Sean* $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$*, se tiene* $\mathfrak{L}_X Y = [X, Y]$.

Para su demostración necesitamos los siguientes lemas:

Lema 3.14 *Si $f\colon I_\varepsilon \times \mathsf{M} \to I\!\!R$ es una función diferenciable, con $I_\varepsilon =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset I\!\!R$ y $f\big((0,x)\big) = 0$, $\forall x \in \mathsf{M}$. Entonces, existe una función diferenciable $g\colon I_\varepsilon \times \mathsf{M} \to I\!\!R$, tal que $\forall t \in I\!\!R$ y $\forall x \in \mathsf{M}$*

$$f\big((t,x)\big) = t\, g\big((t,x)\big)$$

$$g\big((0,x)\big) = \frac{\partial f}{\partial t}_{|(0,x)}.$$

Demostración.- Pongamos $g\big((t,x)\big) = \frac{f((t,x))}{t}$.

$$g\big((0,x)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((t,x)\big)}{t} = \frac{\partial f\big((t,x)\big)}{\partial t}_{|t=0}.$$

◪

Lema 3.15 *Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, ϕ_t su grupo uniparamétrico y $f\colon \mathsf{M} \to I\!\!R$ una función diferenciable. Existe entonces una aplicación diferenciable $g\colon I_\varepsilon \times \mathsf{M} \to I\!\!R$ tal que, si ponemos $g_t(x) = g(t,x)$, se tiene:*

$$f \circ \phi_t = f + t g_t, \qquad g_0 = Xf.$$

Demostración.- Consideremos la función $\bar f\colon I_\varepsilon \times \mathsf{M} \to I\!\!R$, definida por $\bar f\big((t,x)\big) = f(\phi_t(x)) - f(x)$. En virtud del Lema 3.14, existe una función diferenciable $g\colon I_\varepsilon \times \mathsf{M} \to I\!\!R$ tal que

1) $\bar f\big((t,x)\big) = (f\circ\phi_t)(x) - f(x) = tg\big((t,x)\big)$ es decir, $f \circ \phi_t = f + tg_t$.

2) $$g\big((0,x)\big) = g_0(x) = \frac{\partial \bar f}{\partial t}_{|(0,x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\bar f\big((t,x)\big) - \bar f\big((0,x)\big)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big(\phi_t(x)\big) - f(x) - \Big(f\big(\phi_0(x)\big) - f(x)\Big)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\big(\phi_t(x)\big) - f(x)}{t} = X_x(f).$$

◪

Demostración de la Proposición.- Si $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_X Y)_x f &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_x - \big((\phi_t)_* Y\big)_x\Big)\right)(f) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y_x f - \big((\phi_t)_* Y\big)_x f\right) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_x f - Y_{\phi_t^{-1}(x)}(f\circ\phi_t)\Big) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_x f - Y_{\phi_t^{-1}(x)}(f+tg_t)\Big) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_x f - Y_{\phi_t^{-1}(x)}f - t(Y_{\phi_t^{-1}(x)}g_t)\Big) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_x f - Y_{\phi_t^{-1}(x)}f\Big) - \lim_{t\to 0} Y_{\phi_t^{-1}(x)}g_t = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y_x f - ((Yf)\circ\phi_{-t})(x)\right) - Y_x g_0 = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{-t}\big(Y_x f - ((Yf)\circ\phi_t)(x)\big) - Y_x g_0 = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\big(\phi_t^*(Yf)\big)_x - (Yf)_x\right) - Y_x g_0 = \\
&= X_x(Yf) - Y_x(Xf).
\end{aligned}
$$

◪

Interpretación geométrica del producto corchete

Proposición 3.16 *Sean $F:\mathsf{M}\to\mathsf{M}$ una transformación de M y $X\in\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ un campo de vectores que genera un grupo uniparamétrico (local) de transformaciones $\{\phi_t\}$, entonces el campo de vectores F_*X genera el grupo uniparamétrico (local) $\{F\circ\phi_t\circ F^{-1}\}$.*

Demostración.-

$$
\begin{aligned}
(F_*X)_x(f) &= X_{F^{-1}(x)}(f\circ F) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Big((\phi_t^*(f\circ F)\Big)(F^{-1}(x)) - (f\circ F)(F^{-1}(x))\right) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((f\circ F\circ\phi_t\circ F^{-1})(x) - f(x)\right) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Big((F\circ\phi_t\circ F^{-1})^*(f)\Big)(x) - f(x)\right).
\end{aligned}
$$

◪

Corolario 3.17 *Sean $F:\mathsf{M}\to\mathsf{M}$ una transformación de M y $X\in\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ un* *campo de vectores diferenciable, entonces X es invariante por F si y sólo si $F \circ \phi_t = \phi_t \circ F$.*

Proposición 3.18 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, generando los grupos locales uniparamétricos $\{\phi_t\}, \{\psi_t\}$ respectivamente. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} \textit{1)} & \phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t \\ \textit{2)} & \quad [X, Y] = 0 \end{array}$$

Demostración.- Si $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ entonces, por el corolario anterior, $(\phi_s)_* Y = Y$; y, por tanto, $\mathfrak{L}_X Y = [X, Y] = 0$.

Veamos ahora que la afirmación 2) implica la 1):

$$0 = (\phi_s)_*[X, Y] = [(\phi_s)_* X, (\phi_s)_* Y] = [X, (\phi_s)_* Y] = \mathfrak{L}_X ((\phi_s)_* Y) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big((\phi_t)_* \big((\phi_s)_* Y \big) - (\phi_s)_* Y \Big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\phi_{s+t})_* Y - (\phi_s)_* Y \right) = \frac{d(\phi_t)_* Y}{dt}_{|t=s},$$

luego, $(\phi_t)_* Y = (\phi_0)_* Y = Y$ y, por el corolario anterior, resulta $\psi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_s$. ◪

Para obtener la interpretación geométrica buscada basta observar que lo que $[X, Y]$ difiere de cero mide lo que $\psi_{-s} \circ \phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t$ difiere de la identidad en M. Así, recordando que para un punto $x \in \mathsf{M}$, arbitrario, $\phi_t(x)$ y $\psi_s(x)$ definen las curvas integrales de X e Y por esos puntos respectivamente y la variación de t a partir de cero describe dichas curvas (ver Fig. 3.4):

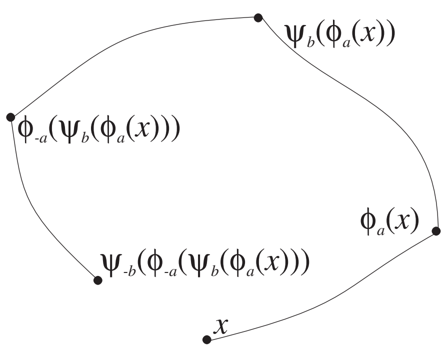


Fig. 3.4:

Trazamos la curva $\phi_t(x)$ para $0 \leq t \leq a$; por $\phi_a(x)$ trazamos la curva $\psi_s(\phi_a))$ para $0 \leq s \leq b$; por $\psi_t(\phi_a(x))$ trazamos la curva $\phi_t(\psi_b(\phi_a)))$ para $-a \leq t \leq 0$; por $\phi_{-a}(\psi_b(\phi_a(x)))$ trazamos la curva $\psi_s(\phi_{-a}(\psi_b(\phi_a(x))))$ para $-b \leq s \leq 0$. El corchete $[X, Y]$ mide lo que le falta al cuadrilátero curvilíneo así obtenido sobre la variedad para llegar a cerrarse de nuevo en el punto x de partida.

Pasamos ahora a definir la derivada de Lie de un campo de tensores y en particular de formas diferenciales. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ y supongamos, para simplificar, que genera un grupo uniparamétrico de transformaciones global ϕ_t sobre M (en caso de que el campo X no sea completo es necesario hacer las restricciones oportunas en los conjuntos de definición de las transformaciones ϕ_t).

Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos el automorfismo $\widetilde{\phi}_t$ del álgebra tensorial $\mathfrak{T}(\mathsf{M})$ (ver Proposición 2.48) que induce ϕ_t; es decir:

$$\widetilde{\phi}_t \colon \bigotimes\nolimits_s^r T_{\phi_t^{-1}(x)}(\mathsf{M}) \to \bigotimes\nolimits_s^r T_x(\mathsf{M})$$

definida por

$$\widetilde{\phi}_t(K) = (\phi_t)_*(v_1) \otimes \cdots \otimes (\phi_t)_*(v_r) \otimes (\phi_t^{-1})^*(\theta^1) \otimes \cdots \otimes (\phi_t^{-1})^*(\theta^s)$$

si
$$K = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s \in \bigotimes{}_s^r T_{\phi_t^{-1}(x)}(\mathsf{M}).$$

Para $K \in \mathfrak{T}(\mathsf{M})$, ponemos

$$(\mathfrak{L}_X\, K)_x = \lim_{t\mapsto 0} \frac{1}{t}(K_x - (\widetilde{\phi}_t K)_x).$$

Proposición 3.19 *La derivada de Lie de campos de tensores sobre una variedad diferenciable* M*, respecto a un campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ *satisface a las siguientes propiedades:*

1. *Es* $I\!R$*–lineal.*
2. $\mathfrak{L}_X\,(S \otimes T) = (\mathfrak{L}_X\, S) \otimes T + S \otimes \mathfrak{L}_X\, T, \quad \forall S, T \in \mathfrak{T}(\mathsf{M}).$
3. $\mathfrak{L}_X$ *conserva el tipo tensorial:* $\mathfrak{L}_X\,(\mathfrak{T}_s^r(\mathsf{M})) \subset \mathfrak{T}_s^r(\mathsf{M})$.
4. $\mathfrak{L}_X$ *conmuta con toda contración.*
5. $\mathfrak{L}_X\, f = Xf \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$.
6. $\mathfrak{L}_X\, Y = [X, Y] \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$.

Por verificar las propiedades 1), 2), 3) y 4) se dice que la derivada de Lie es una derivación sobre el ágebra tensorial $\mathfrak{T}(\mathsf{M})$.

Demostración.- 1) Por la propia definición y las propiedades del lim, es inmediato que $\mathfrak{L}_X$ es $I\!R$–lineal.

2) Si S, T son dos campos de tensores arbitrarios

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_X\,(S \otimes T) &= \lim_{t\mapsto 0} \frac{1}{t}\left(S \otimes T - \widetilde{\phi}_t(S \otimes T)\right) = \lim_{t\mapsto 0} \frac{1}{t}\left(S \otimes T - (\widetilde{\phi}_t S) \otimes (\widetilde{\phi}_t T)\right) = \\
&= \lim_{t\mapsto 0} \frac{1}{t}\left(S \otimes T - (\widetilde{\phi}_t S) \otimes T\right) + \lim_{t\mapsto 0} \frac{1}{t}\left((\widetilde{\phi}_t S) \otimes T - (\widetilde{\phi}_t S) \otimes (\widetilde{\phi}_t T)\right) = \\
&= \left(\lim_{t\mapsto 0} \frac{1}{t}\left(S - \widetilde{\phi}_t S\right)\right) \otimes T + \lim_{t\mapsto 0}\left((\widetilde{\phi}_t S) \otimes \frac{1}{t}(T - \widetilde{\phi}_t T)\right) = \\
&= (\mathfrak{L}_X\, S) \otimes T + S \otimes (\mathfrak{L}_X\, T).
\end{aligned}$$

3) y 4) Ya que $\widetilde{\phi}_t$ conserva el tipo tensorial y conmuta con la contracción (Proposición 2.48), también $\mathfrak{L}_X$ tiene tales propiedades.

Las propiedades 5) y 6) ya han sido establecidas anteriormente. ◪

Para el caso particular de considerar solamente tensores covariantes antisimétricos, es decir, formas diferenciables, tenemos la siguiente definición de derivada de Lie:

Definición 3.20 *Para* $\omega \in \Omega(\mathsf{M})$ *y* $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$

$$(\mathfrak{L}_X\,\omega)_x = \lim_{t\mapsto 0}\frac{1}{t}\left(\omega_x - \phi^*_{-t}(\omega_{\phi_{-t}(x)})\right) = \lim_{t\mapsto 0}\frac{1}{t}\left(\phi^*_t(\omega_{\phi_t(x)}) - \omega_x\right).$$

Proposición 3.21 *La derivada del Lie* $\mathfrak{L}_X$ *de formas diferenciales sobre una variedad* M*, respecto a un campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$*, verifica las siguientes propiedades, para* $\forall\alpha,\beta \in \Omega(\mathsf{M})$*,* $\forall\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$*:*

1) *Conserva el grado de las formas:* $\mathfrak{L}_X\,(\Omega^k(\mathsf{M})) \subset \Omega^k(\mathsf{M})$.
2) $\mathfrak{L}_X$ *es* $\mathbb{R}$*–lineal:*
$\mathfrak{L}_X\,(\alpha+\beta) = \mathfrak{L}_X\,\alpha + \mathfrak{L}_X\,\beta \qquad \mathfrak{L}_X\,(\lambda\alpha) = \lambda\mathfrak{L}_X\,\alpha.$
3) $\mathfrak{L}_X\,(\alpha\wedge\beta) = (\mathfrak{L}_X\,\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(\mathfrak{L}_X\,\beta)$.
4) $\mathfrak{L}_X$ *conmuta con la diferencial exterior:* $\mathfrak{L}_X\circ d = d\circ\mathfrak{L}_X$.
5) $\mathfrak{L}_X\,f = Xf$.
6) $\mathfrak{L}_X\,(df) = d(Xf)$.

Por verificar las tres primeras propiedades se dice que $\mathfrak{L}_X$ es una derivación de grado 0 sobre el álgebra $\Omega(\mathsf{M})$.

Demostración.- Ya que casi todas estas propiedades ya están demostradas para tensores en general, sólo estableceremos la propiedad 4). Usando 2) y 3), nos bastará demostrar que $\mathfrak{L}_X\circ d = d\circ\mathfrak{L}_X$ sobre funciones y diferenciales de funciones.

$$(\mathfrak{L}_X\circ d)(f) = \mathfrak{L}_X\,(df) = \lim_{t\mapsto 0}\frac{1}{t}\left(\phi^*_t((df)_{\phi_t(x)}) - (df)_x\right) =$$

$$= \lim_{t\mapsto 0}\frac{1}{t}\left((d(\phi^*_t f))_x - (df)_x\right) = d\Big(\lim_{t\mapsto 0}\frac{1}{t}\left((\phi^*_t f)_x - f(x)\right)\Big) = d(\mathfrak{L}_X\,f).$$

$(\mathfrak{L}_X\circ d)(df) = \mathfrak{L}_X\,(d^2 f) = 0.$ $(d\circ\mathfrak{L}_X)(df) = (d\circ\mathfrak{L}_X\circ d)(f) = (d^2\circ\mathfrak{L}_X)(f) = 0.$

◪

3.4 Sistemas diferenciables. Variedades integrales

El concepto de campos de vectores en una variedad diferenciable puede ser usado para dar un tratamiento libre de coordenadas de ciertas ecuaciones diferenciables en derivadas parciales lineales de primer orden el cual es útil para cuestiones locales en $\mathbb{R}^n$ e indispensable en muchas cuestiones globales. Comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 3.22 Sea

$$F_\alpha(x^1,x^2,x^3;y^1,y^2;p^k_\ell) = 0, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,6$$

un sistema de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conteniendo dos funciones incógnitas y^1 e y^2 de tres variables x^1, x^2, x^3 y sus primeras derivadas $p_\ell^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell}$. Por simplicación supondremos que estas ecuaciones pueden ser resueltas respecto a p_ℓ^k y escribir equivalentemente

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} = G_\ell^k(x; y), \quad k = 1, 2;\ \ell = 1, 2, 3.$$

en algún entorno U de un punto $(a; b) = (a^1, a^2, a^3, b^1, b^2)$. Una **solución** consta de funciones $y^k = f^k(x^1, x^2, x^3)$, $k = 1, 2$, que sastisface al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f^k}{\partial x^\ell} = G_\ell^k\big(x; f^1(x), f^2(x)\big)$$

en un entorno $x = a$ y para el cual $f(a) = b$. Estas vienen a ser las condiciones iniciales. Esto es equivalente a definir una subvariedad tridimensional de $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ dada por

$$x = (x^1, x^2, x^3) \longmapsto \big(x^1, x^2, x^3, f^1(x), f^2(x)\big)$$

cuyo plano tangente en un punto $(x; y)$ está generado por tres campos de vectores X_1, X_2, X_3, con componentes dadas por

$$X_1 = \big(1, 0, 0, G_1^1(x; y), G_1^2(x; y)\big),$$
$$X_2 = \big(0, 1, 0, G_2^1(x; y), G_2^2(x; y)\big),$$
$$X_3 = \big(0, 0, 1, G_3^1(x; y), G_3^2(x; y)\big).$$

Una tal “superficie” da una solución; la condición inicial añade el requerimiento de pasar por (a, b).

Tal solución puede no existir: las ecuaciones deben satisfacer ciertas condiciones necesarias relativas a las funciones G_l^k las cuales reflejan el hecho que si existe una solución, entonces se puede intercambiar el orden de derivación de f^1 y f^2. Estas condiciones pueden ser escritas mediante relaciones entre X_i y $[X_i, X_j]$, $i, j = 1, 2, 3$.

Los campos de vectores X_1, X_2, X_3, están determinados por un sistema y definen en cada punto q de U un subespacio tridimensional $\mathcal{E}_q \subset T_q(\mathbb{R}^5)$, siempre que ellos sean independientes, lo cual supondremos. Así un sistema de ecuaciones del tipo que estamos considerando determina en algún dominio de $\mathbb{R}^5$ tres campos de vectores linealmente independientes X_1, X_2, X_3 y una solución es una subvariedad tridimensional cuyo espacio tangente en cada uno de sus puntos q está generado por X_1, X_2, X_3.

Dos sistemas de ecuaciones diferenciales serán equivalentes si ellos determinan en cada punto q de sus dominios el mismo subespacio tridimensional $\mathcal{E}_q$ de $T_q(\mathbb{R}^5)$ en cuyo caso tales sistemas tendrían la misma solución.

Un sistema de ecuaciones es completamente integrable si existe una única variedad solución a través de cada punto de algún dominio de $\mathbb{R}^5$; esto es, si el dominio, salvo difeomorfismo, es semejante a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^5$ representado como unión de “superficies”disjuntas, tales superficies son obtenidas dejando dos coordenadas fijas y tomando las otras tres como variables. De todo esto surgen las siguientes definiciones.

Definición 3.23 *Sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* n *y* r *un entero tal que* $r \leq n$. *Un* sistema diferencial (ó distribución) r–*dimensional en* M *es una ley que a cada punto* $x \in \mathsf{M}$ *asigna un subespacio* r–*dimensional* $\mathcal{E}_x$ *del espacio tangente* $T_x(\mathsf{M})$

$$\mathcal{E} : x \longmapsto \mathcal{E}_x \subset T_x(\mathsf{M}).$$

Diremos que una distribución $\mathcal{E}$ *es* diferenciable *si la siguiente condición se satisface: Existe un entorno* U *de* x *y* r–*campos de vectores* $X_1, \ldots, X_r$ *definidos y diferenciables en* U, *tal que para todo* $y \in U$ *los vectores* $X_1(y), \ldots, X_r(y)$ *forman una base de* $\mathcal{E}_y$.

El conjunto $\{X_1, \ldots, X_r\}$ *se dice que es una* base local *de la distribución alrededor del punto* x.

Un campo de vectores X *en* M *se dice que pertenece a la distribución* $\mathcal{E}$ $(X \in \mathcal{E})$ *si para todo* $x \in \mathsf{M}$, $X_x \in \mathcal{E}_x$.

Se dice que una distribución $\mathcal{E}$ *es* involutiva *si existe una base local* $\{X_1. \ldots, X_r\}$ *de la distribución en un entorno de cada punto tal que*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k \qquad 1 \leq i, j \leq r.$$

donde las c_{ij}^k *son funciones diferenciables en dicho entorno.*

Una variedad integral *de una distribución diferenciable* $\mathcal{E}$ *en* M *es una subvariedad* (N, ψ) *de* M *tal que* $\forall y \in \mathsf{N}, \quad \psi_*(T_y(\mathsf{N})) \subseteq \mathcal{E}_{\psi(y)}$.

Ejemplo 3.24 Sea $\mathsf{M} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ y el sistema diferencial $\mathcal{E}$ generado por los campos de vectores $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, r$, entonces $\mathcal{E}_x$ es el subespacio de dimensión r que consta de todos los vectores paralelos a $\mathbb{R}^r$ en el punto $x \in \mathsf{M}$. Veremos que este ejemplo aparentemente especial es típico de distribuciones involutivas.

Definición 3.25 *Se dice que una distribución diferenciable* $\mathcal{E}$ *es* completamente integrable *si* $forall x \in \mathsf{M}$ *existe una carta local* $\left(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\right)$, $x \in U$ *tal que los* r–*campos de vectores* $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, r$ *constituyen una base local en* U *de* $\mathcal{E}$. *Se dice entonces que* (U, φ) *es un sistema coordenado* adaptado *a la distribución.*

Nótese que en este caso existe una variedad integral r–dimensional N pasando por cada punto $y \in U$, tal que $T_y(\mathsf{N}) = \mathcal{E}_y$, esto es, el espacio tangente a N es exactamente

$\mathcal{E}$. En efecto, si $(a^1, \ldots, a^n)$ son las coordenadas de y, entonces la variedad integral pasando por y es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen

$$x^{r+1} = a^{r+1}, \ldots, x^n = a^n,$$

esto es $\mathsf{N} = \varphi^{-1}\big(\{\xi \in \varphi(U)/\xi^j = a^j,\ j = r+1, \ldots, n\}\big)$, es una placa de U. De hecho, en este caso la distribución es involutiva pues

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Podemos concluir que:

Proposición 3.26 *Toda distribución completamente integrable es involutiva.* ◪

Ahora bien, no todas las distribuciones son involutivas, por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ la distribución

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

no es involutiva, ya que $[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial x}$, que no es combinación de X_1 y X_2. Esto significa que X_1, X_2, no pueden ser tangentes a una superficie $z = f(x, y)$.

Una distribución $\mathcal{E}$ de dimensión 1 es un campo de rectas, esto es, de subespacios unidimensionales. Una base local está dada por un campo de vectores no nulo X que pertenece a $\mathcal{E}$ en cada punto y; de hecho, una curva integral de X es una variedad integral. Sabemos por el teorema de existencia (ver pag. 94), que tal variedad, pasando por un punto arbitrario dado, existe y es única. De hecho, la proposición que vamos a establecer a continuación demuestra que tal distribución es completamente integrable. Ella es también involutiva ya que $[X, X] = 0$.

Proposición 3.27 *Toda distribucion diferenciable $\mathcal{E}$ de dimensión 1 sobre una variedad diferenciable M es completamente integrable.*

Esta proposición es consecuencia inmediata del siguiente lema:

Lema 3.28 *Sea X un campo de vectores definido y diferenciable en un entorno abierto de un punto $x_0 \in \mathsf{M}$, y tal que $X_{x_0} \neq 0$. Entonces existe un sistema coordenado cúbico centrado en x_0, $\big(U, \varphi \equiv (y^1, \ldots, y^n)\big)$ en el que X está definido y coincide con $\frac{\partial}{\partial y^1}$.*

Demostración.- Podemos encontrar $\big(U_1, \varphi_1 \equiv (z^1, \ldots, z^n)\big)$, un sistema coordenado cúbico de lado ε centrado en x_0, es decir $\varphi_1(U_1) = C_0^n(\varepsilon)$ y $\varphi_1(x_0) = 0$, en el que X está definido, es diferenciable y además $X_{x_0} z^1 \neq 0$.

Si $x \in U_1$ se tiene $X_x z^i = F^i\big(z^1(x), \ldots, z^n(x)\big)$, $1 \leq i \leq n$, donde las $F^i : C_0^n(\varepsilon) \to \mathbb{R}$ son aplicaciones diferenciables, definidas por

$$F^i = X z^i \circ \varphi_1^{-1}.$$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\xi^i}{dt} = F^i(\xi^1, \ldots, \xi^n) \quad (1 = 1, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Haciendo uso del teorema de existencia para sistemas de ecuaciones diferenciales, existe una aplicación diferenciable $H\colon C_0^n(\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $0 < \delta < \varepsilon$ tal que:

1) $\forall \xi \in C_0^n(\delta),\ H(\xi) \in C_0^n(\varepsilon)$.

2) Las ecuaciones

$$\xi^i = H^i(t, \xi^2, \ldots, \xi^n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

expresan una solución del sistema (3.4), con las condiciones iniciales

$$H^1(0, \xi^2, \ldots . \xi^n) = 0 \qquad H^i(0, \xi^2, \ldots, \xi^n) = \xi^i \ \ (i \geq 2).$$

Probemos que el jacobiano $J(H)$ de H es no nulo en $0 \in \mathbb{R}^n$. En efecto, los términos de la matriz jacobiana de H en 0 son

$$\frac{\partial H^1}{\partial r^1}_{|0} = \frac{\partial \xi^1}{\partial t}_{|0} = F^1(0, \ldots, 0) = X_{x_0} z^1 \neq 0.$$

$$\frac{\partial H^i}{\partial r^j}_{|0} = \delta^i_j.$$

Luego $J(H)_0 = X_{x_0} z^1 \neq 0$.

Así $H : C_0^n(\delta) \to \mathbb{R}^n$ define un difeomorfismo en un entorno W del origen: $H : W \subset C_0^n(\delta) \to H(W) \subset C_0^n(\varepsilon)$. Se sigue que existe un sistema coordenado $\big(U, \varphi \equiv (y^1, \ldots, y^n)\big)$ alrededor de x_0, siendo $U = \varphi_1^{-1}\big(H(W)\big)$ y $\varphi = H^{-1} \circ \varphi_{1|U}$. Y se tiene:

$$X_x z^i = F^i\big(\varphi_1(x)\big) = F^i\big(H(\varphi(x)\big) = \frac{\partial H^i}{\partial r^1}_{|\varphi(x)} = \frac{\partial}{\partial y^1}_{|x} (H^i \circ \varphi) = \frac{\partial}{\partial y^1}_{|x} (z^i).$$

Se tiene, en consecuencia:

$$X = \frac{\partial}{\partial y^1} \quad \text{en } U.$$

◪

3.5 Teorema de Frobenius

Pasamos ahora a demostrar la integrabilidad de un sistema diferencial involutivo arbitrario.

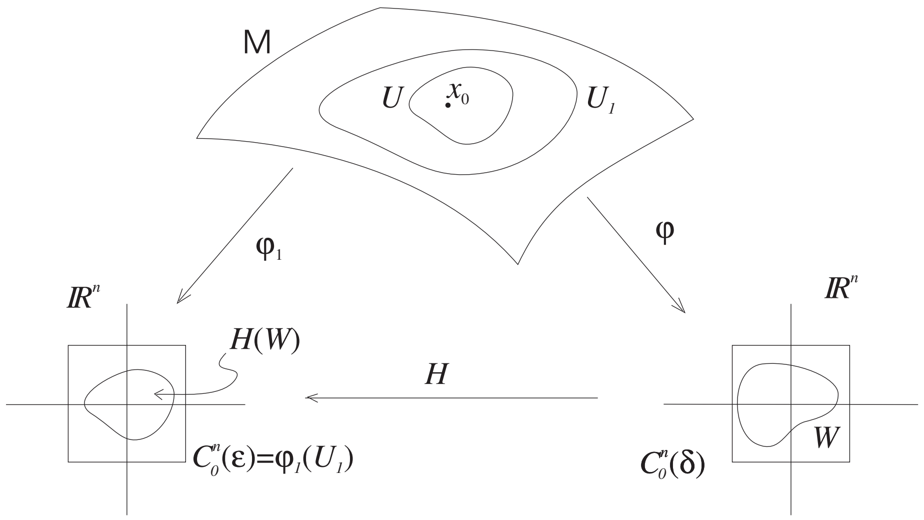


Fig. 3.5: Sistema de coordenadas adaptado a un campo de vectores

Teorema 3.29 (Frobenius) *Sea $\mathcal{E}$ una distribución r–dimensional e involutiva en una variedad diferenciable M de dimensión n. Para cualquier punto $x_0 \in \mathsf{M}$, existe un sistema coordenado $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ cúbico de lado ε y centrado en el origen, alrededor de x_0, tal que la placa de U definida por las ecuaciones:*

$$x^{r+h} = \lambda^{r+h} \quad |\lambda^{r+h}| < \varepsilon \quad (1 \leq h \leq n-r)$$

es una variedad integral de $\mathcal{E}$.

Y si (N, ψ) es una variedad integral conexa de $\mathcal{E}$ tal que $\psi(\mathsf{N}) \subset U$, entonces $\psi(\mathsf{N})$ está en una de estas placas.

Demostración.- Sea $\{X_1, \dots, X_r\}$ una base local de x_0. Tenemos $(X_1)_{x_0} \neq 0$, y podemos aplicar el lema anterior a X_1:

Existe un sistema coordenado $\big(U_1, \varphi_1 \equiv (y^1, \dots, y^n)\big)$ al rededor de x_0, cúbico y centrado en el origen, es decir, $\varphi_1(x_0) = 0$ y $\varphi_1(U_1) = C_0^n(\delta)$, tal que para todo $x \in U_1$ se tiene $\frac{\partial}{\partial y^1}_{|x} = (X_1)_x$.

Para $r = 1$ la placa de U_1 que está definida por las ecuaciones

$$y^2 = \lambda^2, \; \dots \; , y^n = \lambda^n$$

es una variedad integral N_1 de $\mathcal{E}$ ya que $\mathcal{E}_x = \{\widetilde{(X_1)_{|x}}\} = \{\widetilde{\frac{\partial}{\partial y^1}_{|x}}\} = T_x(\mathsf{N}_1)$, con lo que se prueba el Teorema para el caso $r = 1$.

Para probar el Teorema en el caso general procedemos por inducción en r. Supongamos que $r > 1$ y que el Teorema se verifica para distribuciones de dimensión $r - 1$.

Consideremos el conjunto de los campos de vectores definidos en U_1:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_i &= X_i - X_i(y^1)X_1, \qquad 2 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Se tiene que $Y_i y^1 = X_i y^1 - (X_i y^1)(X_1 y^1) = X_i y^1 - (X_i y^1)(\frac{\partial}{\partial y^1} y^1) = 0,\ i \geq 2.$

Los campos de vectores $Y_1, \ldots, Y_r$ son independientes, ya que en las ecuaciones de transformación

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -X_2 y^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -X_r y^1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix},$$

el determinante de la matriz es no nulo.

Con lo que $(Y_1)_x, \ldots, (Y_r)_x$ generan $\mathcal{E}_x$, $\forall x \in U_1$. Además como las funciones $X_i y^1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $2 \leq i \leq r$, son diferenciables, se sigue que los campos Y_i son diferenciables en U_1.

Sea S la placa de U_1 definida por la ecuación

$$y^1 = 0$$

y sea $Z_i = Y_{i|S}$, $2 \leq i \leq r$ (o lo que es igual $i_*(Z_i) = Y_i$, $i : S \hookrightarrow \mathsf{M}$); es claro que los Z_i son campos de vectores en S, pues $Z_i y^1 = 0$, $2 \leq i \leq r$; esto es, $Z_i(x) \in T_x(S)$, $\forall x \in S$. Por tanto, $\{Z_2, \ldots, Z_r\}$ generan una distribución en S de dimensión $r - 1$.

El espacio $\tilde{\mathcal{E}}_x$ generado por los vectores $Z_2(x), \ldots, Z_r(x)$, $x \in S$, es la intersección de $\mathcal{E}_x$ con el espacio tangente a S en x. Así la distribución $\tilde{\mathcal{E}} : x \longmapsto \tilde{\mathcal{E}}_x$ es diferenciable en S. Probemos que es involutiva:

Los Z_j verifican $i_*(Z_j) = Y_j$; por consiguiente los correspondientes corchetes también verifican $i_*([Z_i, Z_j]) = [Y_i, Y_j]$, $2 \leq i, j \leq r$. Pero $[Y_i, Y_j]$, $2 \leq i, j \leq r$, no tienen componentes en la dirección de Y_1, ya que, por hipótesis,

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k Y_k,$$

y al aplicar a y^1.

$$\left.\begin{array}{r} [Y_i, Y_j](y^1) = Y_i(Y_j y^1) - Y_j(Y_i y^1) = 0 \\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k Y_k\right)(y^1) = c_{ij}^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow c_{ij}^1 = 0, \quad i, j \geq 2,$$

con lo que

$$i_*([Z_i, Z_j]) = [Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{r} c_{ij}^k Y_k = \sum_{k=2}^{r} c_{ij}^k i_*(Z_k) = i_* \left(\sum_{k=2}^{r} (c_{ij}^k \circ i) Z_k \right),$$

y al ser i_* inyectiva, resulta

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^{r} c_{ij|S}^{k} Z_k.$$

Con lo que queda probado que la distribución $\tilde{\mathcal{E}}$ en S es involutiva.

Ya que $\tilde{\mathcal{E}}$ es de dimensión $r-1$ podemos aplicar la hipótesis de inducción:

Podemos encontrar un sistema de coordenadas $\varphi_2 \equiv (z^2, \ldots, z^n)$ alrededor de x_0 en S, tal que la placa definida por las ecuaciones

$$z^i = 0, \qquad r+1 \leq i \leq n$$

es precisamente la variedad integral de la distribución $\tilde{\mathcal{E}}$ generada por $\{\frac{\partial}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^r}\}$ en este entorno y que pasa por x_0.

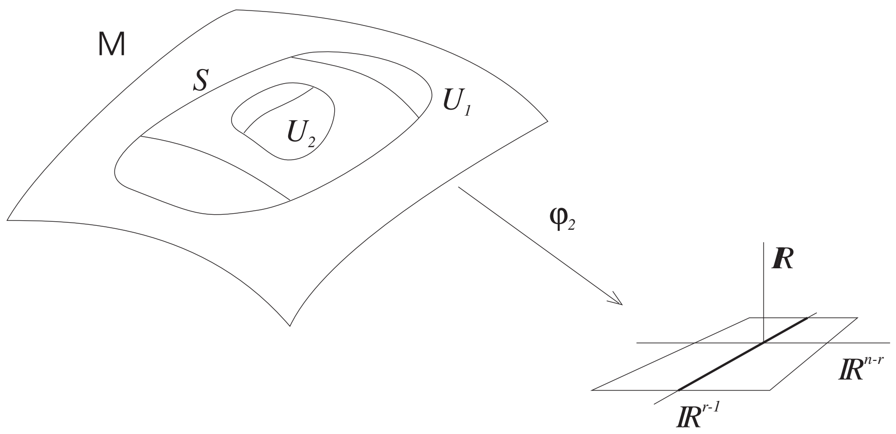


Fig. 3.6:

Consideremos las funciones

$$\begin{array}{rcll} x^1 & = & y^1 & \\ x^j & = & z^j \circ \pi & \qquad (2 \leq j \leq n), \end{array}$$

donde $\pi \colon U_1 \to S$ es la proyección natural del sistema de coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$, esto es:

$$x^j(x) = (z^j \circ \pi)\Big(\varphi_1^{-1}(y^1(x), \ldots, y^n(x))\Big) = z^j\Big(\varphi_1^{-1}(0, y^2(x), \ldots, y^n(x))\Big),$$

que están definidas en un entorno de $x_0 \in U_1$ y son independientes, ya que

$$\left|\frac{\partial x^j}{\partial y^i}_{|x_0}\right|_{1\leq i,j\leq n} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \left(\frac{\partial z^j}{\partial y^i}_{|x_0}\right)_{2\leq i,j\leq n} & \\ 0 & & & \end{array}\right| = \left|\frac{\partial z^j}{\partial y^i}_{|x_0}\right|_{2\leq i,j\leq n} \neq 0,$$

y además

$$\begin{aligned} x^1(x_0) &= y^1(x_0) = 0 \\ x^i(x_0) &= (z^i \circ \pi)\Big(\varphi_1^{-1}\big(y^1(x_0), \dots, y^n(x_0)\big)\Big) = z^i\big(\varphi_1^{-1}(0,0,\dots,0)\big) = z^i(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Así, existe un sistema de coordenadas $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$, $U \subset U_1$, cúbico centrado en x_0.

Ahora, con objeto de probar que los r campos de vectores $Y_1, \dots, Y_r$ es combinación lineal de los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}$, bastará probar que $Y_i x^{r+j} = 0$, para todo $i = 2, \dots, r$ y todo $j = 1, 2, \dots, n-r$, puesto que $Y_i x^{r+j}$ nos da las componentes de Y_i respecto de la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$.

Para ello, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{r+j}) = Y_1(Y_i x^{r+j}).$$

Y, teniendo en cuenta que $Y_1 x^{r+j} = \frac{\partial}{\partial x^1}(x^{r+j}) = 0$, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{r+j}) = Y_1(Y_i x^{r+j}) - Y_i(Y_1 x^{r+j}) = [Y_1, Y_i] x^{r+j}.$$

Es decir

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i x^{r+j}) = \sum_{k=2}^{r} c_{1i}^k (Y_k x^{r+j}).$$

Fijada una placa en U de la forma $x^2 = \lambda^2, \dots, x^n = \lambda^n$. Sobre ella, $Y_i(x^{r+j})$ es una función de x^1 solamente; así, tenemos un sistema de $r-1$ ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con las condiciones iniciales

$$(Y_i x^{r+j})\big(\varphi^{-1}(0, \lambda^2, \dots, \lambda^n)\big) = Z_i(z^{r+j})$$

que da la componente de Z_i en la dirección de $\frac{\partial}{\partial z^{r+j}}$; pero en $S \cap U$, $\{Z_2, \dots, Z_r\}$ forman una base tal que se escriben solamente en combinación de $\frac{\partial}{\partial z^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^r}$, luego $Z_i z^{r+j} = 0$.

Así, $Y_i x^{r+j}$ es idénticamente nula, en virtud de la unicidad de la solución.

Por tanto, los r campos de vectores $Y_1, \dots, Y_r$ se expresan en combinación lineal de los r campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}$ de la referencia natural $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{1 \le i \le n}$, asociada a las coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$. Con lo que $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}\}$ constituye una base local de $\mathcal{E}$ en x_0 y así la subvariedad definida por las ecuaciones

$$x^k = 0 \qquad k > r$$

es una variedad integral de $\mathcal{E}$.

Finalmente, supongamos que (N, ψ) es una variedad integral conexa de $\mathcal{E}$, tal que $\psi(\mathsf{N}) \subset U$. Sea $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proyección en las $n-r$ últimas coordenadas. Entonces todo vector en $\mathcal{E}$ es anulado por $(\pi \circ \varphi)_*$. Así, $(\pi \circ \varphi \circ \psi)_*(y) = 0$, $\forall y \in \mathsf{N}$.

Luego $\pi \circ \varphi \circ \psi$ es una aplicación constante ya que N es conexa. Y $\psi(\mathsf{N})$ está contenida en la placa dada, ya que $\pi \circ \varphi \circ \psi = cte$, implica que

$$(\pi \circ \varphi \circ \psi)(x) = (\pi \circ \varphi)(\psi(x)) = \big(0, \ldots, 0, x^{r+1}(\psi(x)), \ldots, x^n(\psi(x))\big)$$

o sea, $\forall y \in \psi(\mathsf{N})$, se tiene que

$$x^{r+j}(y) = cte, \qquad 1 \leq j \leq n - r.$$

◪

3.6 Segunda forma del Teorema de Frobenius

Sea $\mathcal{E}$ un sistema diferenciable de dimensión r: $\mathcal{E} : x \longmapsto E_x$ sobre una variedad diferenciable M de dimensión n.

Consideremos el subespacio vectorial de $T_x^*(\mathsf{M})$ de dimensión $n - r$

$$E'_x = \{\omega_x \in T_x^*(\mathsf{M}) / \omega_x(X_x) = 0, \ \forall X_x \in E_x\},$$

denominado subespacio ortogonal a E_x.

La aplicación $\mathcal{E}' : x \longmapsto E'_x$ es diferenciable: Como la distribución $\mathcal{E}$ es diferenciable, existen en un entorno de cada punto campos de vectores diferenciables $X_1, \ldots, X_r$ tales que sus representantes forman una base de los subespacios E_x; completémosla [(1)] para formar una base de $T_x(\mathsf{M})$, $\{X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n\}$. Consideremos la base de 1–formas duales $\{\omega^1, \ldots, \omega^r, \omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\}$, así las $n - r$ 1–formas $\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n$ son diferenciables y constituyen una base local para la distribución $\mathcal{E}'$.

Recíprocamente, una aplicación diferenciable $\mathcal{E}' : x \longmapsto E'_x$, siendo E'_x un subespacio vectorial de dimensión $n - r$ de $T_x^*(\mathsf{M})$, define una distribución diferenciable $\mathcal{E} : x \longmapsto E_x$ de dimensión r.

Teorema 3.30 *Un sistema diferencial $\mathcal{E}$ de dimensión r en una variedad diferenciable de dimensión n, dado por un sistema diferencial $\mathcal{E}' : x \longmapsto E'_x$, siendo E'_x un subespacio vectorial de dimensión $n - r$ de $T_x^*(\mathsf{M})$, es completamente integrable, si y sólo si existe una base local $\{\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\}$ de $\mathcal{E}'$ y para todo ω de $\mathcal{E}'$, existen 1–formas diferenciables $\theta^{r+1}, \cdots, \theta^n$ tales que*

---

(1) Podría hacerse expresando los campos dados en función de campos de vectores básicos relativos a unas coordenadas locales y completar en el punto x con vectores independientes. Definir funciones diferenciables (ver Lema 2.44) en un entorno de x que tomen en x los valores de los coeficientes de los vectores nuevos. Así el determinante de la transformación es diferenciable en x y es distinto de cero en x, luego será distinto de cero en todo un entorno de x. Tenemos así una base de campos de vectores diferenciables alrededor de x.

$$d\omega = \sum_{i=r+1}^{n} \theta^i \wedge \omega^i .$$

Demostración.- Completemos la base local $\{X_1, \ldots, X_r\}$ de la distribución complementaria $\mathcal{E}$ para formar una base local de campos de vectores diferenciables en un entorno abierto U; sea $\{\omega^1, \ldots, \omega^r, \omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\}$ su base dual de 1–formas diferenciables, de las cuales $\{\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\}$ forman una base local de la distribución $\mathcal{E}'$.

Se tiene

$$d\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_{jk} \omega^j \wedge \omega^k . \tag{3.5}$$

Si $\mathcal{E}$ es completamente integrable:

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{r} c^i_{jk} X_i , \qquad 1 \leq j, k \leq r,$$

donde c^i_{jk} son funciones diferenciables en U.

Aplicando a los dos miembros de (3.5) a (X_j, X_k), $j, k \leq r$, resulta:

$$2d\omega(X_j, X_k) = X_j \omega(X_k) - X_k \omega(X_j) - \omega([X_j, X_k]) = 0, \tag{3.6}$$

pues, como $\omega \in \mathcal{E}'$, se tiene $\omega(X_\ell) = 0$, para $\ell \leq r$.

$$\left(\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} a_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \right) (X_j, X_k) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} a_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta (X_j, X_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} a_{\alpha\beta} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon_\sigma \omega^\alpha (X_{\sigma(j)}) \omega^\beta (X_{\sigma(k)}) = \frac{1}{2} a_{jk} \tag{3.7}$$

De (3.6) y (3.7), se tiene: $a_{jk} = 0 \quad 1 \leq j, k \leq r$.

Por tanto

$$d\omega = \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq n \\ r+1 \leq \beta \leq n}} a_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = \sum_{\beta=r+1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\beta} \omega^\alpha \right) \wedge \omega^\beta = \sum_{\beta=r+1}^{n} \theta^\beta \wedge \omega^\beta .$$

Inversamente, supongamos que se tiene

$$dw = \sum_{s=r+1}^{n} \theta^s \wedge \omega^s .$$

Entonces, para $1 \leq j, k \leq r$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 2d\omega(X_j, X_k) = X_j\omega(X_k) - X_k\omega(X_j) - \omega([X_j, X_k]) = -\omega([X_j, X_k]) \\ \left(\displaystyle\sum_{s=r+1}^{n} \theta^s \wedge \omega^s\right)(X_j, X_k) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=r+1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2} \varepsilon_\sigma \theta^s(X_{\sigma(j)})\omega^s(X_{\sigma(k)}) = 0 \end{array}\right\}$$

de donde $\omega([X_j, X_k]) = 0$, y como $\omega \in \mathcal{E}'$, se sigue que $[X_j, X_k] \in \mathcal{E}$. Luego existen c^i_{jk} funciones diferenciables y $[X_j, X_k] = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} c^i_{jk} X_i$. Con lo que el sistema diferencial es completamente integrable. ◪

Definición 3.31 *Se define un sistema diferencial de dimensión r en una variedad diferenciable* M *de dimensión n, dando una (n-r)–forma descomponible no nula en ningún punto*

$$\Omega = \omega^{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

Con esta terminología se tiene inmediatamente la siguiente proposición de caracterización de integrabilidad de un sistema diferencial:

Proposición 3.32 *Para que un sistema diferencial $\mathcal{E}$ definido por la (n-r)–forma $\Omega = \omega^{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n$ sea completamente integrable es necesario y suficiente que una de las condiciones siguientes se verifique:*

$$\begin{array}{ll} 1) & d\Omega = \theta \wedge \Omega \\ 2) & d\Omega \wedge \omega^\alpha = 0, \quad \alpha = r+1, \ldots, n. \end{array}$$ ◪

Ejemplo 3.33 El sistema diferencial de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ definido por la 1–forma $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, es completamente integrable si sólo si $d\omega \wedge \omega = 0$; de donde se obtiene la condición de integrabilidad:

$$P(R_y - Q_z) + Q(P_z - R_x) + R(Q_x - P_y) = 0.$$

4 Integración en variedades diferenciables

4.1 Variedades de Riemann

Definición 4.1 *Un campo de tensores diferenciable g de tipo $(0,2)$ sobre una variedad diferenciable* M *es* simétrico *y* definido positivo *si en todo $x \in \mathsf{M}$:*

1) $g_x(u,v) = g_x(v,u), \quad \forall u,v \in T_x(\mathsf{M})$
2) $g_x(u,u) \geq 0, \ \forall u \in T_x(\mathsf{M}) \ \ y \ \ g_x(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Un campo de tensores diferenciable g de tipo $(0,2)$ sobre M*, simétrico y definido positivo se dice que es una* métrica riemanniana *sobre* M.

Una variedad diferenciable M *sobre la cual está definida una métrica riemanniana se dice que es una* variedad riemanniana o de Riemann*, y la denotaremos por* (M, g).

Ejemplo 4.2 $\mathbb{R}^n$ con el producto interior natural:

$$g_x(X_x, Y_x) = \langle X_x, Y_x \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i, \qquad \text{donde} \qquad X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

g es diferenciable, pues $g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_{ij}$.

Ejemplo 4.3 Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$. Si $i : \mathsf{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión; para X_p, Y_p vectores tangentes a M en p, definimos

$$g_p(X_p, Y_p) = \langle i_*(X_p), i_*(Y_p) \rangle = \langle X_p, Y_p \rangle,$$

esto es, definimos g tomándola como el producto interior euclídeo de X_p, Y_p como vectores de $\mathbb{R}^3$. A esta métrica se le conoce como la primera forma fundamental de la superficie.

4.2 Variedades de Riemann como espacios métricos

Sea (M, g) una variedad de Riemann y sea γ una curva diferenciable en M

$$\gamma\colon [a, b] \to \mathsf{M}$$

Definición 4.4 *La* longitud *de la curva γ está definida por el valor de la integral*

$$l = \int_a^b \big(g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\big)^{1/2} dt.$$

El integrando es una función continua al serlo g y γ. Además es fácil establecer que el valor de la integral no depende de la parametrización de la curva.

Enunciamos, a continuación, un resultado que relaciona la métrica en una variedad, dada por un tensor métrico, y la función distancia:

Teorema 4.5 *Una variedad de Riemann conexa es un espacio métrico con la métrica $d(x, y) =$ ínfimo de las longitudes de las curvas de clase C^1 a trozos que unen x con y.*

La topología de este espacio métrico y la topología de la variedad coinciden. ◪

4.3 Partición de la unidad

En este párrafo haremos uso de definiciones enunciadas en el párrafo .

Definición 4.6 *Una* partición de la unidad *diferenciable sobre M es una colección de funciones diferenciables $\{f_i\}_{i\in I}$ definidas sobre M con las siguientes propiedades:*

1. $f_i(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathsf{M}, \quad \forall i \in I.$
2. $\{sop(f_i)\}_{i\in I}$ *forman un recubrimiento localmente finito de* M.
3. $\displaystyle\sum_{i\in I} f_i(x) = 1, \quad \forall x \in \mathsf{M}.$

Nótese que en virtud de *2.* la suma está bien definida, ya que cada punto tiene un entorno en el que sólo un número finito de f_i son distintas de cero.

Definición 4.7 *Una partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$ se dice que está* subordinada *a un recubrimiento abierto $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de M si para cada $i \in I$, existe un A_α tal que $sop(f_i) \subset A_\alpha$.*

El lema que enunciamos a continuación, lo usaremos para demostrar la existencia de una partición de la unidad sobre una variedad.

Lema 4.8 *Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de una variedad paracompacta* M. *Existe un refinamiento localmente finito y numerable $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$ constituido por entornos coordenados relativos a homeomorfismos coordenados φ_i, con $\varphi_i(U_i) = C_0^n(r)$ y tal que $V_i = \varphi_i^{-1}\left(C_0^n(\frac{r}{2})\right)$ constituyen un recubrimiento $\mathcal{V}$ de* M. ◪

Teorema 4.9 *Sea* M *una variedad diferenciable paracompacta. Entonces, dado cualquier recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de* M, *existe una partición de la unidad diferenciable sobre* M, *$\{f_i\}_{i\in I}$, subordinada a un refinamiento $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$.*

Demostración.- Usando el lema anterior (Lema 4.8) y el Lema 2.44 podemos considerar funciones diferenciables $h_i\colon \mathsf{M} \to \mathbb{R}$, con valores comprendidos entre 0 y 1, tales que

$$h_i(x) = 1 \text{ si } x \in \overline{V_i} \qquad h_i(x) = 0 \text{ si } x \notin U_i \quad (i \in I)$$

con $sop(h_i) = \overline{\{x \in \mathsf{M}/h_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$.

Consideremos las funciones $f_i\colon \mathsf{M} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_i = \frac{h_i}{\displaystyle\sum_{j\in I} h_j}$$

las cuales están bien definidas y son diferenciables, pues el denominador sólo consta de un número finito de sumandos no nulos; y tienen las siguientes propiedades:

1. $f_i \geq 0$ sobre M, $\forall i \in I$.
2. $\{sop(f_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento localmente finito de M. $\overline{V_i} \subset \{sop(f_i)\} \subset U_i$.
3. $\displaystyle\sum_{i\in I} f_i(x) = 1, \quad \forall x \in \mathsf{M}$.

Tenemos pues que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una partición de la unidad subordinada al refinamiento $\{U_i\}_{i\in I}$. ◪

Aplicación a la existencia de métricas riemannianas

Teorema 4.10 *Si* M *es una variedad paracompacta admite una métrica riemanniana.*

Demostración.- Dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de M, siguiendo las notaciones anteriores; sea $\{f_i\}_{i\in I}$ la partición de la unidad subordinada al recubrimiento localmente finito y numerable $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, constituido por abiertos coordenados con homomorfismos coordenados φ_i; y sea además $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ el recubrimiento considerado en el Lema 4.8, y pongamos $\phi_i = \varphi_{i|V_i}$.

En cada V_i existe una métrica de Riemann definida por

$$g_x^i(u_x, v_x) = \langle(\phi_i)_*(u_x), (\phi_i)_*(v_x)\rangle \qquad u_x, v_x \in T_x(\mathsf{M}), \quad x \in V_i.$$

Podemos definir en un punto arbitrario $x \in \mathsf{M}$

$$g_x = \sum_{i\in I} f_i(x) g_x^i.$$

En el segundo miembro sólo hay un número finito de sumandos no nulos. Y se verifica:

$$g_x(u, v) = g_x(v, u), \qquad \forall u, v \in T_x(\mathsf{M}).$$

$$g_x(u, u) = \sum_{i\in I} f_i(x) g_x^i(u, u) \geq 0, \qquad \forall u \in T_x(\mathsf{M}).$$

$$g_x(u, u) = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \quad f_i(x) g_x^i(u, u) = 0 \Rightarrow \exists i^* \in I, g_x^{i^*}(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Además g es diferenciable. Luego g es una métrica riemanniana sobre M. ◪

4.4 Orientación de variedades

Antes de tratar la orientación de variedades, necesitamos recordar el concepto de orientación en espacios vectoriales.

Definición 4.11 *Sea E un espacio vectorial real de dimensión n se dice que dos bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ tienen la* misma orientación *si el determinate de la matriz cambio de base es positivo, es decir,*

$$\det(a_j^i) > 0$$

donde $f_j = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i \quad (j = 1, \ldots, n)$

Esto permite establecer una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases de E; existiendo únicamente dos clases de equivalencia.

Definición 4.12 *Un* espacio vectorial orientado *es un espacio vectorial junto con una clase de equivalencia de bases citadas arriba.*

Las bases de dicha clase se dice que están orientadas *o* positivamente orientadas.

Otra manera de expresar la orientación en un espacio vectorial n–dimensional es a través de n–formas no nulas:

Proposición 4.13 *Una n–forma $\omega \in \bigwedge^n E^* - \{0\}$ tiene el mismo signo (o signo opuesto) sobre dos bases si éstas tienen la misma (resp., opuesta) orientación.*

La elección de una $\omega \in \bigwedge^n E^* - \{0\}$ determina una orientación.

$\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^n E^* - \{0\}$ determinan la misma orientación si y sólo si $\omega_1 = \lambda\omega_2$, donde λ es un número real positivo.

Demostración.- Si $\{e_1 \ldots, e_n\}$ y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ son dos bases de E, y si $f_j = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i$, tenemos:

$$\begin{aligned}\omega(f_1, \ldots, f_n) &= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \\ &= \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}\Big)\omega(e_1, \ldots, e_n) = \det(a_j^i)\omega(e_1, \ldots, e_n).\end{aligned}$$

De esta relación surgen inmediatamente las afirmaciones de la proposición. ◪

Si E es un espacio vectorial euclídeo, esto es, E tiene un producto interior definido positivo. Entonces para orientar a E podemos elegir una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y sea ω la n–forma tal que $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es otra base ortonormal de E, tal que $f_j = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i$, entonces

$$\omega(f_1, \ldots, f_n) = \det(a_i^j)\omega(e_1, \ldots, e_n) = \pm 1,$$

según que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ tenga la misma u opuesta orientación que $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

En este caso la forma ω da una interpretación geométrica cuando $n = 2$ ó 3; $\omega(v_1, v_2)$ y $\omega(v_1, v_2, v_3)$ es el área y el volumen, respectivamente, del paralelogramo y del paralelepípedo, de los cuales los vectores dados son los lados o aristas partiendo del origen.

Para extender el concepto de orientación a una variedad M, trataremos de orientar cada espacio tangente $T_x(\mathsf{M})$, de tal forma que la elección de orientación en los espacios tangentes sea diferenciable.

Definición 4.14 *Sea M variedad diferenciable. Se dice que M es* orientable *si existe un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ para la estructura diferenciable sobre M tal que, para cartas arbitrarias $(U_\alpha, \varphi_\alpha \equiv (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ y $(U_\beta, \varphi_\beta \equiv (x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n)$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función diferenciable*

$$D_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}$$

determinada por $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = D_{\alpha\beta} dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$, *es positiva, es decir,* $D_{\alpha\beta}(x) > 0,\ \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Definición 4.15 *Una* orientación *en una variedad diferenciable* M *es una elección de un atlas* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *para la estructura diferenciable de* M *verificando las condiciones de la definición anterior y maximal con respecto a dicha condición.*

Una variedad orientada *es una variedad diferenciable en la que se ha elegido una orientación.*

Obsérvese que la función $D_{\alpha\beta}$ de la definición no es otra cosa que el determinante jacobiano de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, es decir

$$D_{\alpha\beta} = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^j}(x_\alpha^i)\right).$$

Ejemplo 4.16 El fibrado tangente $T(\mathsf{M})$ de cualquier variedad M es orientable. Pues para conjuntos de funciones coordenadas $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ y $(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n)$ en M alrededor de $x \in \mathsf{M}$

$$D_{\alpha\beta}(v) = \left[\det\left(\left.\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right|_x\right)\right]^2 \qquad v \in T_x(\mathsf{M}).$$

Proposición 4.17 *Sea* M *una variedad diferenciable, n–dimensional. Supongamos que existe* $\omega \in \Omega^n(\mathsf{M})$ *tal que* $\omega(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathsf{M}$. *Entonces* M *es orientable.*

Demostración.- Sea $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ un atlas maximal sobre M. En una carta $\big(U_\alpha, \varphi_\alpha \equiv ({x_\alpha}^1, \ldots, {x_\alpha}^n)\big)$ de $\mathfrak{A}$, con U_α conexo, se tiene

$$\omega = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$$

con $f_\alpha \colon U_\alpha \to I\!R$ función diferenciable.

Como $\omega \neq 0$, resulta $f_\alpha \neq 0$; y como U_α es conexo, $f_\alpha > 0$ ó $f_\alpha < 0$ sobre U_α.

Consideremos

$$\mathfrak{A}' = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)/f_\alpha > 0,\ \alpha \in A\big\}$$

Veamos que $\mathfrak{A}'$ da una orientación en M.

Claramente los abiertos de las cartas de $\mathfrak{A}'$ recubren M, pues si $x \in \mathsf{M}$ y $x \in U_\alpha$, con $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{A}$ tal que $f_\alpha < 0$; se obtiene una nueva carta $(V, \phi) \in \mathfrak{A}$ con $x \in V$ y $f_\phi > 0$, a partir de $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, cambiando de signo una de las funciones coordenadas de φ_α, por ejemplo

$$V = U_\alpha, \qquad \phi \equiv (x^1, \ldots, x^n) \equiv (-x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n).$$

Además, si $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathfrak{A}'$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces

$$dx^1_\beta \wedge \cdots \wedge dx^n_\beta = \frac{1}{f_\beta}\omega = \frac{f_\alpha}{f_\beta} dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha, \qquad \text{siendo } \frac{f_\alpha}{f_\beta} > 0.$$

Y, por último, $\mathfrak{A}'$ es maximal, al serlo $\mathfrak{A}$. ◪

Vamos a dar ahora un ejemplo de variedad orientable.

Proposición 4.18 *Sea* (M, F) *una subvariedad de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de dimensión* n. *Supongamos que* (M, F) *admite un campo de vectores normal no nulo; es decir, supongamos que existe una aplicación diferenciable*

$$V : \mathsf{M} \to T\mathbb{R}^{n+1}$$

con $V(x) \in T_{F(x)}(\mathbb{R}^{n+1})$, $V(x) \neq 0$ *y* $V(x)$ *es perpendicular a* $F_*(T_x(\mathsf{M}))$.

Entonces M *es orientable.*

Demostración.- Dado un campo de vectores normal V, consideremos la n–forma diferencial μ definida en los puntos de $F(\mathsf{M})$ por

$$\mu = V^1 dr^2 \wedge \cdots \wedge dr^{n+1} - V^2 dr^1 \wedge dr^3 \wedge \cdots \wedge dr^{n+1} + \cdots + (-1)^{n+1} V^{n+1} dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n.$$

Tomenos ahora la n–forma sobre M dada por $\omega = F^*\mu$. Demostremos que $\omega(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathsf{M}$.

Supongamos que $\omega(x) = 0$, para algún $x \in \mathsf{M}$. Entonces para todo $v_1, \ldots, v_n \in T_x(\mathsf{M})$

$$0 = \omega_x(v_1, \ldots, v_n) = (F^*\mu)_x(v_1, \ldots, v_n) = \mu_{F(x)}\left(F_*(v_1), \ldots, F_*(v_n)\right).$$

Ahora bien, cada vector $u \in T_{F(x)}(\mathbb{R}^{n+1})$ es de la forma

$$u = F_*(v) + cV(x), \ \text{ para algún } v \in T_x(\mathsf{M}) \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Así, para arbitrarios vectores $u_1, \ldots u_n \in T_{F(x)}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\begin{aligned}
&\mu_{F(x)}(u_1, \ldots, u_n) = \\
&= \mu_{F(x)}\left(F_*(v_1) + c_1V(x), \ldots, F_*(v_n) + c_nV(x)\right) = \\
&= \mu_{F(x)}\left(F_*(v_1), \ldots, F_*(v_n)\right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n c_j \mu_{F(x)}\left(F_*(v_1), \ldots, F_*(v_{j-1}), V(x), F_*(v_{j+1}), \ldots, F_*(v_n)\right) = \\
&= \mu_{F(x)}\left(F_*(v_1), \ldots, F_*(v_n)\right) + \\
&\quad + (n+1)\sum_{j=1}^n c_j (dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^{n+1})(V(x), F_*(v_1), \ldots, \overset{j)}{V(x)}, \ldots, F_*(v_n)).
\end{aligned}$$

Con lo que $\mu_{F(x)} = 0$, lo cual es absurdo. ◪

El próximo teorema caracteriza totalmente la orientabilidad de variedades paracompactas mediante n–formas no nulas:

Teorema 4.19 *Sea* M *una variedad paracompacta.* M *es orientable si y sólo si existe* $\omega \in \Omega^n(\mathsf{M})$, *tal que* $\omega_x \neq 0$, $\forall x \in \mathsf{M}$.

Demostración.- Consideremos un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M determinando una orientación en la variedad. Entonces $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de M y puesto que M es paracompacto, consideremos $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$ y $\{f_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad diferenciable subordinada a $\mathcal{V}$.

Puesto que, para cada $V_i \in \mathcal{V}$ existe un $\alpha \in A$ tal que $V_i \subset U_\alpha \in \mathcal{U}$, se tiene que el par $(V_i, \varphi_i = \varphi_{\alpha|V_i})$ es una carta del atlas determinado por $\mathcal{V}$.

Consideremos $(x_i^1, \dots, x_i^n)$ las funciones coordenadas de la carta (V_i, φ_i), entonces $\omega^i = dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$ es una n–forma diferenciable sobre V_i no nula. Definimos

$$\omega = \sum_{i \in I} f_i \omega^i$$

Es claro que ω está bien definida y $\omega \in \Omega^n(\mathsf{M})$. Vamos a probar ahora que $\omega \neq 0, \forall x \in \mathsf{M}$.

Para $x \in \mathsf{M}$ arbitrario, sea $(U_{\alpha^*}, \varphi_{\alpha^*})$ del atlas de orientación tomado al principio, con $x \in U_{\alpha^*}$ y con funciones coordenadas $(y_{\alpha^*}^1, \dots, y_{\alpha^*}^n)$. Entonces para cada $V_i \in \mathcal{V}$, con $V_i \cap U_{\alpha^*} \neq \emptyset$,

$$\omega^i = dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n = a^i dy_{\alpha^*}^1 \wedge \cdots \wedge dy_{\alpha^*}^n \quad \text{sobre} \quad V_i \cap U_{\alpha^*}$$

y $a^i > 0$ sobre $V_i \cap U_{\alpha^*}$, puesto que (V_i, φ_i) y $(U_{\alpha^*}, \varphi_{\alpha^*})$ pertenecen al atlas de orientación de M. Así

$$\omega_{|U_{\alpha^*}} = \sum_{i \in I} (f_i \omega^i)_{|U_{\alpha^*}} = \left(\sum_{i \in I} f_i a^i \right) dy_{\alpha^*}^1 \wedge \cdots \wedge dy_{\alpha^*}^n .$$

Puesto que $\sum_{i \in I} f_i = 1$, existe $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0}(x) > 0$ y puesto que $a^{i_0}(x) \neq 0$ y cada $f_i a^i \geq 0$, resulta

$$\left(\sum_{i \in i} f_i a^i \right)(x) \neq 0 \Rightarrow \omega(x) \neq 0.$$

La otra implicación está establecida en la Proposición 4.17. ◪

Variedades de Riemann orientadas

Una variedad riemanniana M tiene la propiedad especial que el espacio tangente $T_x(\mathsf{M})$ en cada punto $x \in \mathsf{M}$ tiene un producto interior. Aplicando lo expuesto anteriormente relativo a n–formas sobre espacios vectoriales euclídeos de dimensión n tenemos:

Proposición 4.20 *Sea M una variedad riemanniana orientable con métrica riemanniana g. Correspondiendo a una orientación de M existe una única n–forma ω que da la orientación y que toma el valor $+1$ sobre una referencia ortonormal orientada.*

Demostración.- Para cada punto $x \in \mathsf{M}$, ω_x está determinada requiriendo que sobre una base ortonormal orientada $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_x(\mathsf{M})$, se tenga

$$\omega_x(e_1, \dots, e_n) = +1.$$

Sea $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$, tratamos dar una expresión para las componentes de $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ sobre U en términos de $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, de las cuales se deducirá que ω es una n–forma diferenciable.

Escojamos en $x \in \mathsf{M}$, una base ortonormal orientada $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_x(\mathsf{M})$; entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x} = \sum_{k=1}^n a_i^k e_k \qquad (i = 1, \dots, n) \text{ siendo } (a_j^i) = A \text{ la matriz cambio de base.}$$

Luego

$$g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \langle \sum_{k=1}^n a_i^k e_k, \sum_{\ell=1}^n a_j^\ell e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^n a_i^k a_j^k \qquad (1 \le i, j \le n)$$

resulta por tanto que $g_{ij}(x) = {}^tAA$, es decir, $\det A = \big(\det\big(g_{ij}(x)\big)\big)^{1/2}$.

Por otra parte,

$$\omega_x\left(\frac{\partial}{\partial x^1}_{|x}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}_{|x}\right) = \det(a_i^k)\omega(e_1, \dots, e_n) = \det(a_i^k).$$

Por lo que las componentes de ω en coordenadas locales son

$$\omega_x\left(\frac{\partial}{\partial x^1}_{|x}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}_{|x}\right) = \det(g_{ij}(x))^{1/2}.$$

Así la componente de ω en U es la raiz cuadrada de funciones positivas diferenciables, luego es diferenciable en U. Ya que (U, φ) es arbitrario, ω es una n–forma diferenciable sobre M, teniendo como expresión local

$$\omega_x = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\; dx^1_{|x} \wedge \cdots \wedge dx^n_{|x}.$$

◪

Definición 4.21 *Esta n–forma ω se llama* elemento de volumen *de la variedad riemanniana orientada.*

Si $\mathsf{M} = \mathbb{R}^n$ con coordenadas cartesianas y métrica usuales, entonces el elemento de volumen es

$$\omega = dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n.$$

4.5 Integración en $\mathbb{R}^n$

Hacemos aquí un pequeño repaso de ciertos conceptos y resultados relativos a integración en $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.22 *Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene* contenido (de Jordan) nulo , *$c(A) = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de cubos $C_1, \ldots, C_r$ que recubren a A y la suma de sus volumenes es menor que ε, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} vol\, C_i < \varepsilon$.*

Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida (de Lebesgue) nula, *$m(A) = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto numerable de cubos recubriendo a A y $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} vol\, C_i < \varepsilon$.*

Nota 4.23 Evidentemente, $c(A) = 0$ implica $m(A) = 0$ y, si A es compacto, el recíproco tambíen se tiene.

Definición 4.24 *Un subconjunto acotado $D \subset \mathbb{R}^n$ se llama* dominio de integración *si su borde $\partial D = \overline{D} - \overset{\circ}{D}$ tiene contenido nulo: $c(\partial D) = 0$.*

Una función $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice es casi continua *si el conjunto de puntos en los que deja de ser continua tiene contenido nulo.*

Ejemplos de dominios de integración: Cubos y bolas en $\mathbb{R}^n$. Conjuntos limitados por curvas y superficies diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Se tiene el siguiente resultado relativo a integración en $\mathbb{R}^n$:

Teorema 4.25 *Sea D un dominio de integración en $\mathbb{R}^n$ y f una función real sobre D. Supongamos que f está acotada y es casi continua sobre D. Entonces existe la integral de Riemann*

$$\int_D f\, dr^1 \cdots dr^n.$$

◪

Propiedades básicas de la integral de Riemann

Sean D, D_1, D_2 dominios de integración en $I\!R^n$; no tiene dificultad demostrar que $\overline{D}$ (la clausura de D), $\overset{\circ}{D}$ (el interior de D), $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ y $D_1 - D_2$ son dominios de integración.

Sean además f y h funciones reales acotadas y casi continuas sobre $I\!R^n$ y λ, μ números reales. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

1) Si $c(D) = 0 \;\Rightarrow\; \int_D f\, dr^1 \cdots dr^n = 0.$

2) $\int_{D_1 \cup D_2} f\, dr^1 \cdots dr^n = \int_{D_1} f\, dr^1 \cdots dr^n + \int_{D_2} f\, dr^1 \cdots dr^n - \int_{D_1 \cap D_2} f\, dr^1 \cdots dr^n.$

3) $\int_D (\lambda f + \mu h) dr^1 \cdots dr^n = \lambda \int_D f\, dr^1 \cdots dr^n + \mu \int_D h\, dr^1 \cdots dr^n.$

4) Si $f \geq 0$ sobre D y $c(D) \neq 0 \;\Rightarrow\; \int_D f\, dr^1 \cdots dr^n \geq 0$ y $\left(\int_D f\, dr^1 \cdots dr^n = 0 \Leftrightarrow f = 0\right).$

Definición 4.26 *La* función característica χ_A *de un subconjunto A de un espacio X está definida por*

$$\begin{array}{ll} \chi_A(x) = 1 & x \in A \\ \chi_A(x) = 0 & x \in X - A. \end{array}$$

χ_A es acotada y discontinua en ∂A. Si D es un dominio de integración, tenemos $c(\partial D) = 0$, y por consiguiente χ_D es integrable.

Si D' es un dominio de integración, que contiene a D, entonces

$$\int_{D'} \chi_D\, f\, dr^1 \cdots dr^n = \int_D f\, dr^1 \cdots dr^n.$$

Así, si $f : I\!R^n \to I\!R$ está acotada, tiene soporte compacto y es casi continua, entonces definimos

$$\int_{I\!R^n} f\, dr^1 \cdots dr^n = \int_D f\, dr^1 \cdots dr^n,$$

usando un dominio de integración D tal que $sop(f) \subset D$.

El siguiente teorema justifica el usual cálculo de integrales múltiples reemplazándolos por simples integraciones de funciones de una variable (integrales iteradas).

Teorema 4.27 *Si $D = \{x \in I\!R^n / a^i \leq x^i \leq b^i,\;\; i = 1, \ldots, n\}$ y f es una función continua sobre el dominio de integración D, entonces*

$$\int_D f\,dx^1\cdots dx^n = \int_{a^n}^{b^n}\cdots\int_{a^2}^{b^2}\left(\int_{a^1}^{b^1} f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\right)dx^2\cdots dx^n.$$ ◪

Necesitamos otro teorema relativo al cambio de variable o variables de integración. En el caso de funciones de una sola variable éste es la estándard e indispensable técnica de sustitución, que nos permite escribir

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(h(x))\frac{dy}{dx}dx,$$

donde $y = h(x)$, $a \leq x \leq b$, con $c = h(a)$ y $d = h(b)$, h diferenciable con continuidad y $f\colon I\!R \to I\!R$ continua.

Consideremos $h\colon U \to V$ un difeomorfismo de $U \subset I\!R^n$ y $V \subset I\!R^n$ y denotemos por $J(h)$ su determinante jacobiano. Una función f sobre V determina una función $f \circ h$ sobre U y tenemos la siguiente relación entre sus integrales:

Teorema 4.28 (Cambio de variable) *Supongamos que $D \subset U$ y $h(D) \subset V$ son dominios de integración y que f es integrable en $h(D)$. Entonces $f \circ h$ es integrable sobre D y*

$$\int_{h(D)} f(y)dy^1\cdots dy^n = \int_D f(h(x))\|J(h)\|dx^1\cdots dx^n.$$ ◪

Antes de extender estas ideas a variedades diferenciables, necesitamos conocer qué le ocurre a los dominios de integración al transformarlos mediante un difeomorfismo:

Proposición 4.29 *Sea A un subconjunto relativamente compacto ($\overline{A}$ es compacto) de $I\!R^n$ tal que $c(A) = 0$ (contenido nulo) y sea $f : A \to I\!R^m$, $n \leq m$ una aplicación diferenciable con continuidad (C^1). Entonces $c(F(A)) = 0$.* ◪

Usaremos este hecho para extender la noción de contenido nulo y medida nula a subconjuntos de una variedad diferenciable.

4.6 Integración sobre variedades diferenciables

Definición 4.30 *Un subconjunto relativamente compacto A (su clausura es un conjunto compacto) de una variedad diferenciable n–dimensional* M, *se dice* *que tiene* contenido nulo, $c(A)=0$, *si es unión finita de subconjuntos,* $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ *cada uno de los cuales queda en un entorno coordenado* (U_i,φ_i) *tal que* $c(\varphi_i(A_i))=0$ *en* $\mathbb{R}^n$, $i=1,\ldots,r$.

Un subconjunto $B\subset \mathsf{M}$ *se dice que tiene* medida nula, $m(B)=0$, *si* B *es la unión de una colección numerable de subconjuntos* $B=\cup_{i=1}^{\infty}B_i$, *tal que cada* B_i *tiene contenido nulo,* $c(B_i)=0$.

Como consecuencia de esta definición y de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.31 *Sea* $F\colon \mathsf{M}\to\mathsf{N}$ *una aplicación diferenciable entre variedades con* $dim\,\mathsf{M}\le dim\,\mathsf{N}$.

Si $A\subset\mathsf{M}$ *es relativamente compacto y* $c(A)=0$, *entonces* $c(F(A))=0$.

Si $B\subset\mathsf{M}$ *tal que* $m(B)=0$, *entonces* $m(F(B))=0$. ◪

Definición 4.32 *Un subconjunto* $D\subset\mathsf{M}$ *es un* dominio de integración *si* D *es relativamente compacto y el borde* $\partial D=\overline{D}-\mathring{D}$ *de* D *tiene contenido nulo* $c(\partial D)=0$.

Teorema 4.33 *Si* D *es un dominio de integración en* M, *también lo son su clausura y su interior.*

La unión finita e intersección de dominios de integración son dominios de integración.

La imagen de un dominio de integración mediante un difeomorfismo es un dominio de integración.

Demostración.- Todas estas propiedades son una consecuencia inmediata de las últimas definiciones y de los correspondientes resultados para subconjuntos de contenido nulo y dominios de integración en $\mathbb{R}^n$.

Para la última afirmación es preciso observar que un difeomorfismo envía puntos del borde en puntos del borde. ◪

Supongamos ahora que M es una variedad orientable de dimensión n, y sea $\omega\in\Omega^n(\mathsf{M})$ una n–forma no nula que determina la orientación.

Definición 4.34 *Una función* $f\colon\mathsf{M}\to\mathbb{R}$ *es* integrable *si es acotada, tiene soporte compacto y es casi continua.*

Una n*–forma* α *sobre* M *se dice que es* integrable *si* $\alpha=f\omega$, *con* f *integrable.*

Notemos que la definición de n–formas integrables no depende de la n–forma ω particular que da la orientación de M; pues si ω' es otra n–forma que da la misma orientación que ω, resulta que $\omega' = h\omega$ con h función diferenciable y positiva. Por tanto

$$\alpha = f\omega = \frac{f}{h}\omega'.$$

Si f tiene soporte compacto, es acotada y es casi continua, entonces lo mismo verifica f/h.

Denotemos por $\Omega^n_I(\mathsf{M})$ el conjunto de las n–formas integrables.

Teorema 4.35 *Sea una variedad diferenciable, orientable, paracompacta y de dimensión n. Existe entonces una única aplicación*

$$\int : \Omega^n_I(\mathsf{M}) \to \mathbb{R}$$

verificando las siguientes condiciones:

1. *$\mathbb{R}$–lineal, es decir*

$$\int (\alpha+\beta) = \int \alpha + \int \beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^n_I(\mathsf{M})$$

$$\int \lambda\alpha = \lambda \int \alpha \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall \alpha \in \Omega^n_I(\mathsf{M}).$$

2. *Si el soporte de α está contenido en un abierto coordenado U de una carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ tal que*

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n > 0$$

(es decir de orientación positiva), y admite en U la representación local

$$\alpha = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

entonces

$$\int \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} (a \circ \varphi^{-1}) dr^1 \cdots dr^n,$$

donde el segundo miembro es la integral de $a \circ \varphi^{-1}$ (cuyo soporte es un compacto de $\mathbb{R}^n$) en el sentido de Riemann, y $r^1, \dots, r^n$ son las funciones coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$.

Demostración.- Por ser la variedad M orientable y paracompacta, podemos considerar sobre ella un atlas de orientación $\{(U_i, \varphi_i \equiv (x^1_i, \dots, x^n_i)\}_{i\in I}$ localmente finito tal que $\varphi_i(U_i) = C^n_0(r)$, y subordinado al recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$.

Así, si $\alpha \in \Omega^n_I(\mathsf{M})$, para cada $i \in I$, $f_i\alpha \in \Omega^n_I(\mathsf{M})$ y tiene su soporte compacto contenido en el abierto coordenado U_i, y si en él $f_i\alpha = a dx^1_i \wedge \cdots \wedge dx^n_i$, definimos

$$\int f_i\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} (a \circ \varphi_i^{-1}) dr^1 \cdots dr^n.$$

Ahora, como $K = sop(\alpha)$ es compacto, la suma $\sum_{i\in I} f_i\alpha$ sólo tiene un número finito de sumandos no nulos, puesto que K estará recubierto por un número finito de los soportes de los f_i, y podemos poner, por definición

$$\int \alpha = \sum_{i\in I} \int f_i\alpha.$$

Es claro que la aplicación así definida es la única que satisface las condiciones del teorema.

Pero veamos ahora que está bien definida:

1) Para definir $\int f_i\alpha$ hemos utilizado la carta local (U_i, φ_i) veamos que si el soporte de $f_i\alpha$ está contenido en la intersección $U_i \cap U_j$, con (U_j, φ_j) otra carta local del atlas tomado, el valor de $\int f_i\alpha$ es independiente de la carta considerada. En efecto, en $U_i \cap U_j$ se tiene

$$f_i\alpha = a dx^1_i \wedge \cdots \wedge dx^n_i = b dx^1_j \wedge \cdots \wedge dx^n_j \quad \text{y} \quad b = \det\left(\frac{\partial x^\ell_i}{\partial x^k_j}\right) a.$$

Utilizando el Teorema 4.28 de la página 128, tenemos para $x \in U_i \cap U_j$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (b \circ \varphi_j^{-1})_{|\varphi_j(x)} ds^1 \cdots ds^n = \int_{C^n_0(r)} (b \circ \varphi_j^{-1})_{|\varphi_j(x)} ds^1 \cdots ds^n$$

$$\int_{C^n_0(r)} (b \circ \varphi_j^{-1})(s^1, \ldots, s^n) ds^1 \cdots ds^n =$$

$$= \int_{C^n_0(r)} (b \circ \varphi_j^{-1})((\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(r^1, \ldots, r^n)) \det\left(\frac{\partial x^k_j}{\partial x^l_i}\right)_{\varphi_i^{-1}(r^1,\ldots,r^n)} dr^1 \cdots dr^n =$$

$$= \int_{C^n_0(r)} \left(\left(a\ \det\left(\frac{\partial x^\ell_i}{\partial x^k_j}\right)\right) \circ \varphi_j^{-1}\right) ((\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(r^1, \ldots, r^n))$$

$$\det\left(\frac{\partial x^k_j}{\partial x^\ell_i}\right) \left(\varphi_i^{-1}(r^1 \ldots . r^n)\right) dr^1 \cdots dr^n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} a\left(\varphi_i^{-1}(r^1, \ldots, r^n)\right) dr^1 \cdots dr^n.$$

2) El valor de $\int \alpha$ es independiente de la partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$ elegida. En efecto, si $\{h_j\}_{j\in J}$ es otra partición de la unidad subordinada a otro

recubrimiento localmente finito y de orientación $\{V_j\}_{j\in J}$ de M, los abiertos $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ constituyen un nuevo recubrimiento localmente finito para el cual las funciones $\{f_i h_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ constituyen una partición de la unidad subordinada. Así, se tiene

$$\sum_i \int f_i\alpha = \sum_i \left(\sum_j \int h_j f_i \alpha \right) \qquad \sum_j \int h_j\alpha = \sum_j \left(\sum_i \int f_i h_j \alpha \right),$$

luego $\int \alpha$ está bien definida. ◪

Enunciamos ahora otras propiedades de la integral sobre M, que dejamos como ejercicio:

Proposición 4.36 *1. Si denotamos por* $-$M *la misma variedad* M, *pero con orientación opuesta, tenemos*

$$\int_{-} \alpha = -\int \alpha.$$

2. Si ω *es una* n*–forma no nula que da la orientación de* M *y si* $\alpha = f\omega$ *con* $f \geq 0$ *y continua, entonces* $\int \alpha \geq 0$*. Y* $\int f\omega = 0$ *si y sólo si* $f = 0$*.*

3. Si $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ *es un difeomorfismo y* $\alpha \in \Omega^n_I(\mathsf{N})$*, entonces*

$$\int F^*\alpha = \pm \int \alpha$$

donde el signo depende de que F *conserve o no la orientación.* ◪

4.7 Integración en variedades de Riemann

Sea (M, g) una variedad de Riemann y ω el elemento de volumen (Definición 4.21).

Definición 4.37 *Si* D *es un dominio de integración sobre* M *y* χ_D *es la función característica de* D*, definimos el* volumen *de* D*, que denotamos por* $vol\, D$*, por*

$$vol\, D = \int \chi_D\, \omega.$$

Definición 4.38 *Si f es una función integrable sobre* M, *definimos la* integral de f *sobre D, denotada por $\int_D f$, por*

$$\int_D f = \int f\chi_D\,\omega.$$

Cuando M es compacta: $vol\,\mathsf{M} = \int\ \omega$ y $\int\ f = \int\ f\omega$.

Recordemos que en coordenadas locales $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$, la matriz de componentes g_{ij} sobre U del tensor métrico, vienen dadas por

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

y la expresión local del elemento de volumen es

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Ejemplo 4.39 Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$ con métrica riemanniana inducida por el producto interior euclídeo en $\mathbb{R}^3$, y sea (U, φ) una carta local con funciones coordenadas (u, v). Sea $\vec{\mathbf{x}} = \varphi^{-1}\colon W = \varphi(U) \to \mathsf{M}$, la representación paramétrica local de la superficie que tiene por imagen U, o en cartesianas:

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v).$$

Los campos de vectores básicos asociados a esta carta son:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}$$

y entonces

$$g_{11} = g(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$g_{12} = g(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = g_{21},$$

$$g_{22} = g(\vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

El elemento de volumen es

$$(\varphi^{-1})^*\omega = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,dudv.$$

Si D es un dominio de integración sobre M tal que $D \subset U$, y f una función integrable sobre D, entonces

$$\int_D f = \int_D f\omega = \int_{\varphi(D)} (f \circ \varphi^{-1})\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dudv = \int_{\varphi(D)} f(u,v)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dudv.$$

Ejemplo 4.40 Supongamos, como caso particular del ejemplo anterior, que φ es difeomorfismo proyección de un abierto U de M sobre un subconjunto abierto de W del plano XY, que identificamos con el plano paramétrico.

En este caso $\vec{\mathbf{x}}\colon W \to U$ esta dada por $\vec{\mathbf{x}}(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

Los campos de vectores básicos asociados a esta carta son:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z}$$

y

$$g_{11} = 1 + f_x^2 \qquad g_{12} = f_x f_y \qquad g_{22} = 1 + f_y^2,$$

con lo que

$$\vec{\mathbf{x}}^* \omega = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, dx dy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx dy.$$

Si $D \subset U$ es un dominio de integración y $A \subset W$ su proyección en el plano XY, entonces para una función integrable h sobre M, tenemos:

$$\int_D h = \int_A h(x,y) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx dy.$$

Cuando $h \equiv 1$, el valor de la integral es el área de D ($= vol\ D$).

4.8 Variedades con borde

Definición 4.41 *Una* variedad con borde *es un espacio* M *Hausdorff con una base numerable de conjuntos abiertos y una estructura diferenciable* $\mathfrak{A}$ *en el siguiente sentido:* $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *consta de una familia de subconjuntos abiertos* U_α *de* M *cada uno con un homeomorfismo* φ_α *sobre un subconjunto abierto de* $\mathbb{H}^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n / \xi^n \geq 0\}$ *(con la topología inducida) tal que*

1. $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathsf{M}$.
2. $\forall \alpha, \beta \in A$, *tal que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *y* $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *son difeomorfismos de* $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *y* $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, *abiertos de* $\mathbb{H}^n$.
3. $\mathfrak{A}$ *es maximal respecto a las propiedades 1. y 2.*

Proposición 4.42 *Si* (U, φ) *es una carta de una variedad con borde* M *y si* $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n / \xi^n = 0\}$, *entonces esto se verifica para cualquier homeomorfismo coordenado* ϕ *de una carta* (V, ϕ), *tal que* $x \in V$.

Demostración.- Esto se sigue (aplicando el teorema de la función inversa) de que $\varphi(U)-\partial\mathbb{H}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y entonces $\phi\circ\varphi^{-1}$ debe aplicar $\varphi(U)\cap\phi(V)-\partial\mathbb{H}^n$ difeomórficamente en un abierto de $\mathbb{R}^n$, pero no subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$, que contiene puntos del borde, esto es, de $\partial\mathbb{H}^n$. ◪

Este resultado nos permite dar la siguiente definición:

Definición 4.43 *El conjunto de puntos x de M para los cuales existe un homeomorfismo verificando $\varphi(x)\in\partial\mathbb{H}^n$, se denomina* borde *de M, y se denota por $\partial\mathsf{M}$*

$$\partial\mathsf{M}=\{x\in\mathsf{M}\,/\,\exists(U,\varphi)\ \text{carta local}, x\in U\ \text{y}\ \varphi(x)\in\partial\mathbb{H}^n\}.$$

Proposición 4.44 *Si M es una variedad diferenciable de dimensión n con borde $\partial\mathsf{M}$, entonces la estructura diferenciable de M determina una estructura diferenciable de dimensión $n-1$ sobre $\partial\mathsf{M}$. La inclusión $i:\partial\mathsf{M}\hookrightarrow\mathsf{M}$ es un embebimiento.*

Demostración.- La estructura diferenciable $\tilde{\mathfrak{A}}$ sobre $\partial\mathsf{M}$ está determinada por las cartas $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$, donde $\tilde{U}=U\cap\partial\mathsf{M}$ y $\tilde{\varphi}=\pi\circ\varphi_{|U\cap\partial}$ para toda carta (U,φ) de M que contiene puntos de $\partial\mathsf{M}$. (π, proyección sobre las primeras $n-1$ componentes). Además, $i:\partial\mathsf{M}\hookrightarrow\mathsf{M}$ es diferenciable y la aplicación i_* es inyectiva. ◪

Proposición 4.45 *Sea M una variedad orientada y supongamos que el borde $\partial\mathsf{M}$ no es vacio. Entonces $\partial\mathsf{M}$ es orientable y la orientación de M determina una orientación de $\partial\mathsf{M}$.*

Demostración.- Sea $x\in\partial\mathsf{M}$ y supongamos que (U,φ) y (V,ϕ) son dos cartas del atlas de orientación tal que $x\in U\cap V$. Denotamos, como anteriormente, por $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ y $(\tilde{V},\tilde{\phi})$ las correspondientes cartas del atlas que da la estructura diferenciable en $\partial\mathsf{M}$.

Se tiene el difeomorfismo

$$\phi\circ\varphi^{-1}\equiv(f^1,\dots,f^n)\colon\varphi(U\cap V)\to\phi(U\cap V)$$
$$(\xi^1,\dots,\xi^{n-1},0)\longmapsto(f^1(\xi^1,\dots,\xi^{n-1},0),\dots,f^{n-1}(\xi^1,\dots,\xi^{n-1},0),0)$$

y por tanto

$$\frac{\partial f^n}{\partial\xi^i}_{|\varphi(y)}=0\qquad(i=1,\dots,n-1),\qquad\quad y\in U\cap\partial\mathsf{M}.$$

Se sigue que la matriz jacobiana del cambio de base tiene la forma

$$J(\phi\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap\partial M)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial\xi^1} & \dots & \frac{\partial f^{n-1}}{\partial\xi^1} & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f^1}{\partial\xi^{n-1}} & \dots & \frac{\partial f^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}} & 0\\ \frac{\partial f^1}{\partial\xi^n} & \dots & \frac{\partial f^{n-1}}{\partial\xi^n} & \frac{\partial f^n}{\partial\xi^n}\end{pmatrix}_{\varphi(y)},$$

con lo que, para $y \in U \cap \partial\mathsf{M}$,

$$\det\left(J(\phi\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(y)}\right) = \frac{\partial f^n}{\partial \xi^n}_{|(\xi^1,\ldots,\xi^n,0)} \det\left(J(\tilde{\phi}\circ\tilde{\varphi}^{-1})_{|\varphi(y)}\right).$$

Pero como la función

$$\xi^n \longmapsto f^n(\xi^1,\ldots,\xi^{n-1},\xi^n)$$

tiene valores positivos para $\xi^n \geq 0$, y nula sólo para $\xi^n = 0$, su derivada

$$\frac{\partial f^n}{\partial \xi^n}(\xi^1,\ldots,\xi^{n-1},0) \geq 0.$$

Se deduce que $\det\left(J(\tilde{\phi}\circ\tilde{\varphi}^{-1})_{|\varphi(y)}\right) > 0$. Luego $\partial\mathsf{M}$ es orientable. ◪

4.9 Teorema de Stokes

Definición 4.46 *Un* dominio regular *D sobre una variedad M es un subconjunto cerrado de M con interior no vacio, tal que si $x \in \partial D = \overline{D} - \mathring{D}$, entonces x está en un entorno coordenado cúbico correspondiente a una carta $\left(U, \varphi \equiv (x^1,\ldots,x^n)\right)$ con*

$$\varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(U) = C_0^n(\varepsilon), \qquad \varphi(U\cap D) = \{\xi \in C_0^n(\varepsilon)/\xi^n \geq 0\}.$$

De la definición se deducen de forma inmediata las siguientes afirmaciones:

a) Los puntos $y \in \partial D \cap U$, verifican $x^n(y) = 0$.

b) Si D es acotado, entonces es un dominio de integración.

c) D con la topología y estructura diferenciable inducida por M es una variedad con borde.

Definición 4.47 *En un dominio regular D de una variedad diferenciable orientable M, se denomina* orientación inducida *en ∂D a la orientación de la variedad ∂D para la cual, en cada carta coordenada,*

$$(-1)^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} > 0.$$

Teorema 4.48 (Stokes) *Sea M una variedad diferenciable, paracompacta, orientable y de dimensión n. Y sea α una $(n-1)$–forma diferencial de clase (al menos) C^1 y con soporte compacto.*

Entonces, para todo dominio regular D, se tiene

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} i^*\alpha$$

donde $i : \partial D \hookrightarrow \mathsf{M}$ es la inclusión natural

Demostración.- La exigencia de ser α diferenciable y con soporte compacto es para garantizar su integrabilidad.

Consideremos sobre M un atlas de orientación $\{(U_k,\varphi_k)\}_{k\in A}$ localmente finito y $\{f_k\}_{k\in A}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $\{U_k\}_{k\in A}$. Se tiene así que $\{(i^{-1}(U_k),\varphi_k\circ i)\}_{k\in A}=\{(U_k\cap\partial D,\varphi_{k|U\cap\partial D}\}_{k\in A}=\{(\tilde{U}_k,\tilde{\varphi}_k\}_{k\in A}$ es un atlas de orientación locamente finito sobre ∂D y $\{i^*f_k\}_{k\in A}=\{f_k\circ i\}_{k\in A}$ es una partición de la unidad subordinada a él. Entonces

$$\int_{\partial D} i^*\alpha=\sum_{k\in A}\int_{\partial D}(i^*f_k)(i^*\alpha)=\sum_{k\in A}\int_{\partial D} i^*(f_k\alpha).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_D d\alpha &= \int \chi_D\,(d\alpha)=\sum_{k\in A}\int f_k(\chi_D\, d\alpha)=\sum_{k\in A}\int \chi_D\,(f_k d\alpha)=\\
&= \int \chi_D\left(\sum_{k\in A}(f_k d\alpha)\right)=\int \chi_D\left(\sum_{k\in A}(d(f_k\alpha)-df_k\wedge\alpha)\right)=\\
&= \int \chi_D\left(\sum_{k\in A} d(f_k\alpha)\right)-\int \chi_D\left(\sum_{k\in A}(df_k\wedge\alpha)\right)=\\
&= \sum_{k\in A}\int \chi_D\, d(f_k\alpha)-\int \chi_D\left(d(\sum_{k\in A} f_k)\right)\wedge\alpha=\sum_{k\in A}\int_D d(f_k\alpha).
\end{aligned}$$

Por ser $d(\sum_{k\in A} f_k)=0$, como consecuencia de $\sum_{k\in A} f_k=1$. En resumen:

$$\int_{\partial D}\alpha=\sum_{k\in A}\int_{\partial D} i^*(f_k\alpha)\qquad \int_D d\alpha=\sum_{k\in A}\int_D d(f_k\alpha).$$

Luego, para probar el teorema nos bastará con establecer que

$$\int_{\partial D} i^*(f_k\alpha)=\int_D d(f_k\alpha),\qquad \forall k\in A.$$

Pero $f_k\alpha$ es una forma diferencial cuyo soporte está contenido en un abierto coordenado U_k, luego el teorema se reduce a ser probado para *una (n-1)-forma diferencial $\overline{\alpha}$ con soporte compacto contenido en un abierto coordenado U de la variedad* M.

Sea $\varphi=(x^1,\ldots,x^n)$ las funciones coordenadas en U, y supogamos que es homeomorfo a un paralelepípedo en $I\!R^n$:

$$\varphi(U)=P=\{(r^1,\ldots,r^n)\in I\!R^n/-\lambda^i<r^i<\lambda^i;\quad i=1,\ldots,n\}.$$

Sea la representación local de $\overline{\alpha}$ en U:

$$\overline{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

donde las a_j son funciones diferenciables con soporte contenido en U y $a_j \circ \varphi^{-1}$ tiene soporte en el interior de P.

Por otra parte

$$d\overline{\alpha} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Existen entonces dos posibilidades:

1º $\underline{U \cap \partial D = \emptyset}$

En este caso, puesto que $\overline{\alpha}_{|\partial D} = 0$, es claro que

$$\int_{\partial D} i^* \overline{\alpha} = 0.$$

Por otra parte, $U \cap \partial D = \emptyset$ implica que, o bien $U \subset \mathsf{M} - \overline{D}$ ó $U \subset \overset{\circ}{D}$.

Si $U \subset \mathsf{M} - \overline{D}$, entonces, por ser $\chi_D = 0$ sobre U:

$$\int_D d\overline{\alpha} = \int \chi_D \, d\overline{\alpha} = 0.$$

Si $U \subset \overset{\circ}{D}$, entonces $\chi_D = 1$, luego

$$\int_D d\overline{\alpha} = \int_P \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j} \right) dr^1 \cdots dr^n.$$

Pero para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene

$$\int_P \frac{\partial (a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j} dr^1 \cdots dr^n = \tag{4.1}$$

$$= \int_{-\lambda^n}^{\lambda^n} \cdots \int_{-\lambda^1}^{\lambda^1} \big((a_j \circ \varphi^{-j})(r^1, \ldots, \lambda^j, \ldots, r^n) \\ -(a_j \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, -\lambda^j, \ldots, r^n) \big) dr^1 \cdots \widehat{dr^j} \cdots dr^n = 0,$$

por verificarse que $sop(a_j \circ \varphi^{-1}) \subset \overset{\circ}{P}$ y, por tanto

$$(a_j \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, \lambda^j, \ldots, r^n) - (a_j \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, -\lambda^j, \ldots, r^n) = 0.$$

2º $\underline{U \cap \partial D \neq \emptyset}$

Es claro que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ∂D está formado por los puntos tales que $x^n = 0$ y consideremos entonces el paralelepípedo

$$P_0 = \{(r^1, \ldots, r^n)/ -\lambda^j < r^j < \lambda^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad 0 \leq r^n \ < \lambda^n\}.$$

Entonces, $\chi_D(x) = 1, \quad \forall x \in U$ con $x^n(x) \geq 0$.

$(\varphi^{-1})^*\overline{\alpha}$ tiene soporte contenido en la unión del interior de P_0 con la cara A_n^0 definida por $r^n = 0$.

Se tiene

$$\int_{\partial D} i^*\overline{\alpha} = \int_{\partial P_0} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}(a_j \circ \varphi^{-1}) dr^1 \cdots \widehat{dr^j} \cdots dr^n =$$

$$= (-1)^{n-1} \int_{A_n^0} (a_n \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, r^{n-1}, 0) dr^1 \cdots dr^{n-1},$$

esto es así en virtud de aplicar a $\bar{\alpha}$ la correspondiente inclusión $i : (x^1, \ldots, x^{n-1}) \hookrightarrow (x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)$, en coordenadas locales, y observando que $i^*(dx^n) = 0$.

Por otra parte,

$$\int_D d\overline{\alpha} = \int_{P_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j} dr^1 \ldots dr^n,$$

pero como en caso anterior (4.1)

$$\int_{P_0} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j} dr^1 \cdots dr^n = 0 \qquad \text{para} \quad j = 1, 2 \ldots, n-1.$$

Pero

$$\int_{P_0} \frac{\partial(a_n \circ \varphi^{-1})}{\partial r^n} dr^1 \ldots dr^n = \int_{A_n^0} -(a_n \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, r^{n-1}, 0) dr^1 \ldots dr^{n-1}.$$

Luego también en este caso, incluyendo el signo $(-1)^n$ en la orientación de ∂D, se tiene

$$\int_{\partial D} i^*\overline{\alpha} = \int_D d\overline{\alpha}.$$

◪

4.10 Teorema de Green y Teorema de la divergencia

Consideremos ahora algunos ejemplos en los que D es un dominio regular de $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. En estos casos el Teorema de Stokes corresponde a teoremas clásicos del cálculo conocidos con varios nombres.

A. Teorema de Green

Sea D un dominio regular acotado de $\mathbb{R}^2$, esto es la clausura de un subconjunto abierto del plano acotado por una curva simple cerrada diferenciable; por ejemplo, D puede ser un disco o un anillo. Entonces ∂D es la unión de estas curvas (en el caso del disco es una circunferencia y un par de circunferencias en el anillo).

Una 1–forma sobre D se escribe en función de sus coordenadas cartesianas por

$$\alpha = Pdx + Qdy.$$

Podemos suponer que P y Q son las restricciones a D de funciones diferenciables sobre algún abierto que contiene a D.

Tenemos

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

y por el Teorema de Stokes

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

El término de la izquierda es una integral de Riemann ordinaria en un dominio de integración D de $\mathbb{R}^2$. El otro término es una integral sobre una variedad unidimensional y su valor es el de la usual integral de linea a lo largo de una curva (o curvas $\mathcal{C}_i$) orientada de tal forma que al recorrer la curva la región quede a la izquierda.

Así la igualdad puede ser escrita

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} Pdx + Qdy,$$

que se conoce como el teorema de Green.

B. Teorema de la divergencia

Sea D un dominio regular de $\mathbb{R}^3$, esto es, la clausura de un conjunto abierto acotado por una superficie diferenciable cerrada.

Consideremos la 2–forma

$$\alpha = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

donde P, Q, R son funciones diferenciables sobre un abierto de $\mathbb{R}^3$ conteniendo a D.

Tenemos

$$d\alpha = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

El Teorema de Stokes afirma que

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial D} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy.$$

Que es la integral de Riemann sobre un dominio y al integral de superficie sobre su borde, respectivamente. Obteniéndose así el conocido teorema de la divergencia, el cual clásicamente tiene la siguiente formulación:

Si $N = (N^1, N^2, N^3)$ es el campo de vectores normal y unitario sobre ∂D que apunta hacia afuera, V el campo de vectores de componentes (P, Q, R), $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ el elemento de volumen en $D \subset \mathbb{R}^3$ y $\tilde{\omega} = N^1 dy \wedge dz + N^2 dz \wedge dx + N^3 dx \wedge dy$ el elemento de área en ∂D, entonces

$$\int_D (div\, V)\,\omega = \int_{\partial D} \langle V, N\rangle \tilde{\omega}.$$

Es decir, la divergencia total de V sobre D es igual al flujo de V a través de ∂D.

C. Teorema de Stokes del cálculo

Consideremos D un trozo de superficie embebida en $\mathbb{R}^3$ y acotada por una curva simple diferenciable.

Ya que dx, dy, dz pueden ser consideradas, por restricción, como 1–formas sobre D o sobre ∂D, toda 1–forma α sobre D puede escribirse como

$$\alpha = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

donde P, Q, R son funciones diferenciables sobre D.

En este caso el Teorema de Stokes afirma que

$$\int_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

La integral de la izquierda es una integral de superficie y la de la derecha una integral de línea. Obteniéndose así el usual Teorema de Stokes del cálculo superior.

4.11 Aplicación a los grupos cohomología de De Rham

Proposición 4.49 *Sea* M *una variedad orientable y compacta de dimención* n *con* $\partial \mathsf{M} = \emptyset$. *Entonces*

$$H^n(\mathsf{M}) \neq \{0\}.$$

Demostración.- Sea ω el elemento de volumen, entonces

$$\int \omega > 0.$$

Supongamos que $\omega = d\alpha$ para algún $(n-1)$–forma α. Entonces por el teorema de Stokes

$$\int \omega = \int d\alpha = \int_{\partial} \alpha = 0.$$

Lo cual es absurdo. Luego ω determina una clase no nula en $H^n(\mathsf{M})$. ◪

5 Diferentes enfoques de conexiones lineales

En este tema expondremos varias vias para introducir el concepto de conexión lineal, sobre una variedad diferenciable M, así como primeras propiedades deducidas de tales definiciones.

Si X e Y son campos de vectores sobre una variedad M, vamos a definir un nuevo campo de vectores $\nabla_X Y$ sobre M, cuyo valor en cada punto x es el vector variación de Y en la dirección de X_x.

Para mejor comprender este concepto, repasemos el concepto de derivada covariante natural en $\mathbb{R}^n$.

Un campo de vectores Y en $\mathbb{R}^n$ puede ser interpretado como una aplicación $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable; así si v es un vector en p de $\mathbb{R}^n$ e Y es un campo de vectores (diferenciable) en p, está bien definido el vector

$$(D_v Y)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{Y(p+tv) - Y(p)}{t}$$

que, si Y se expresa en función de los campos de vectores básicos en $\mathbb{R}^n$, correspondientes a las coordenadas cartesianas globales $(r^1, \ldots, r^n)$, por $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial r^i}$, se puede poner

$$(D_v Y)(p) = \sum_{i=1}^n v(Y^i) \frac{\partial}{\partial r^i},$$

donde $v(Y^i)$ expresa la derivada direccional de la función Y^i en la dirección de v.

Si ahora consideramos X e Y campos de vectores diferenciables en p,

$$\left(D_X Y\right)(p) = D_{X_p} Y$$

define un campo de vectores $D_X Y$ en $\mathbb{R}^n$, que denominaremos derivada covariante de Y en la dirección de X.

Ejemplo 5.1 Tomemos en $\mathbb{R}^3$ los campos de vectores $X = (A, B, C)$, $Y = (xy^2 + 4z, y^2 - x, x + z^3)$, entonces

$$D_X Y = \left(X(xy^2 + 4z),\ X(y^2 - x),\ X(x + z^3)\right) =$$

$$= \big(y^2 A(x,y,z) + 2xyB(x,y,z) + 4C(x,y,z),$$
$$- A(x,y,z) + 2yB(x,y,z), \quad A(x,y,z) + 3z^2C(x,y,z)\big).$$

Propiedades de la derivada covariante o conexión natural en $\mathbb{R}^n$:

Sean X, Y, Z, W campos vectoriales (diferenciables) en $\mathbb{R}^n$, y sea f una función diferenciable real, entonces se tienen las siguientes propiedades:

$$D_X(Y+Z) = D_XY + D_XZ \qquad D_{fX}Y = f\,D_XY$$
$$D_{X+W}Y = D_XY + D_WY \qquad D_X(fY) = (Xf)Y + f\,D_XY$$

Todas estas propiedades se deducen directamente de la definición de D, entendida como derivada direccional de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n$.

Es importante reseñar que D_XY puede ser calculado una vez conocido Y a lo largo de una curva α que fija el vector X_p en p; es decir, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$.

En efecto, sea $Y_{\alpha(t)} = \big(Y^1(\alpha(t)), \dots, Y^n(\alpha(t))\big)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(D_XY\right)(p) &= D_{X_p}Y = \big(X_p(Y^1), \dots, X_p(Y^n)\big) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}_{|0}\,\frac{\partial Y^1}{\partial r^i}_{|\alpha(0)}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}_{|0}\,\frac{\partial Y^n}{\partial r^i}_{|\alpha(0)}\right) = \\
&= \left(\frac{d(Y^1\circ\alpha)}{dt}(0), \dots, \frac{d(Y^n\circ\alpha)}{dt}(0)\right).
\end{aligned}$$

Para la generalización de la definición de derivada covariante o conexión a una variedad diferenciable M, exigiremos la existencia de un operador ∇ que asigna a campos de vectores X, Y un campo de vectores ∇_XY, que satisfaga a las cuatro propiedades precedentes, enunciadas para la conexión natural en $\mathbb{R}^n$. Esto es, si designamos por $\mathfrak{X}(\mathsf{M})$ el módulo de los campos de vectores diferenciables sobre M, damos la siguiente definición:

Definición 5.2 *Una* conexión lineal ∇ *en* M *es una aplicación*
$\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $\quad (X,Y) \mapsto \nabla_XY$, *verificando*

$$A_1.- \ \nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ \qquad A_3.- \ \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$$
$$A_2.- \ \nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ \qquad A_4.- \ \nabla_XfY = (Xf)Y + f\nabla_XY$$

donde $f, g \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ (funciones diferenciables). ∇_XY se lee derivada covariante *de Y con respecto a X.*

Ejemplo 5.3 Obsérvese que puede existir más de una conexión lineal sobre una variedad diferenciable. Y como ejemplos de existencia de conexiones lineales sobre variedades tenemos:

1) La conexión natural D en $\mathbb{R}^n$. Ver página 143.

2) La conexión ∇ sobre una superficie M de $\mathbb{R}^3$, definida a partir de la conexión natural y el producto interior en $\mathbb{R}^3$, considerando el campo de vectores normal unitario $\mathbf{N}$ sobre M y definiendo

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, \mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$$

es decir, el campo de vectores $\nabla_X Y$ está definido descomponiendo $D_X Y$ en sus únicas componentes tangente y normal relativas al plano tangente a M. ∇ satisface las propiedades que caracterizan a una conexión lineal sobre M; así el producto escalar y la conexión natural de $\mathbb{R}^3$ inducen una conexión en la supercifie M.

3) Si $\left(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\right)$ es una carta local en una variedad diferenciable M; sobre el abierto U, con la estructura de variedad inducida, se puede definir una conexión lineal, poniendo, para X, Y campos de vectores sobre U $\left(Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

4) Si en una variedad M, n–dimensional, existen n campos de vectores linealmente independientes $X_1, \dots, X_n$ (los vectores $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$, linealmente independientes para todo $x \in \mathsf{M}$, dícese entonces que la variedad es paralelizable), podemos definir en M una conexión lineal poniendo, para campos de vectores X e Y $\left(Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i X_i\right)$,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} X(Y^i) X_i.$$

5) Toda variedad diferenciable paracompacta admite una conexión lineal.

En efecto, sea $\{V_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto localmente finito de M, y supongamos que $\{f_\alpha\}_\alpha$ es una partición de la unidad subordinada a tal recubrimiento; es decir, las funciones f_α son funciones reales diferenciables con valores comprendidos entre 0 y 1, tales que *sop* $f_\alpha \subset V_\alpha$ (la clausura de los puntos donde f_α no se anula está contenida en V_α) y $\sum_\alpha f_\alpha = 1$. Si ∇^α es la conexión lineal en la carta $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$, como en 3), ponemos

$$\nabla = \sum_\alpha f_\alpha \nabla^\alpha,$$

entonces, al tener esta suma sentido, ∇ es una conexión lineal en M.

5.1 Enfoque axiomático

El enfoque de conexiones que sigue es debido a Koszul. La definición que vamos a dar está justificada al comienzo de este tema y corresponde a la Definición 5.2.

Una **conexión lineal** sobre M es una aplicación
$\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $\quad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, verificando

$$\begin{array}{ll}
1) & \nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\
2) & \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\
3) & \nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y \\
4) & \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y
\end{array}$$

donde $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ (función diferenciable).

Si $(x^1, \ldots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en un entorno coordenado U, y $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ son los campos de vectores coordenados, definimos las funciones Γ_{ij}^k sobre U (que llamaremos coeficientes de la conexión) por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (1 \le i,j \le n). \tag{5.1}$$

Si D es la conexión natural sobre $\mathbb{R}^n$ (ver página 143) y si $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$D_X Y - D_Y X = [X,Y].$$

Pero esto no es cierto en general. Si ∇ es una conexión lineal sobre M, definimos las siguiente aplicación

$$T\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \qquad (X,Y) \mapsto T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Se ve fácilmente, usando las propiedades de ∇ y del corchete de campos de vectores, que T es $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–lineal y, por tanto, define un campo de tensores de tipo (1,2), sobre M, al que se le denomina tensor **torsión**.

Respecto a un sistema coordenado $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$ las componentes del campo de tensores torsión vienen dadas por las funciones

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Se deduce que ∇ tiene torsión nula si y sólo si sus coeficientes, relativos a un sistema coordenado, son simétricos respecto de sus subíndices. Es por lo que se suele decir a veces que una conexión **sin torsión** (con tensor torsión nulo) es **simétrica**. Aunque es preferible decir conexión sin torsión, ya que cuando los coeficientes de una connexión con torsión nula se expresan con respecto a una referencia arbitraria (distinta de la formada por los campos de vectores coordenados), entonces los coeficientes no son simétricos en general.

Si consideramos de nuevo la conexión natural D sobre $\mathbb{R}^n$ y si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se verifica

$$D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) = D_{[X,Y]}Z.$$

Pero, esto tampoco es cierto en general, por lo que si ∇ es una conexión lineal sobre M, definimos la siguiente aplicación, denominada **curvatura**:

$$R \colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$$

$$(Z, X, Y) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Se trata de una aplicación $\mathfrak{F}(\mathsf{M})$–lineal, por lo que define un campo de tensores de tipo (1,3).

Respecto a un sistema coordenado $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ las componentes del campo tensorial R son

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n R^i_{jk\ell}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

siendo

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} + \sum_{h=1}^n \left(\Gamma^h_{\ell j}\Gamma^i_{kh} - \Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{\ell h}\right).$$

Para problemas locales relativos a conexiones, se pueden transformar sus propiedades a ciertas propiedades de formas diferenciales:

Sean ∇ una conexión lineal sobre una variedad diferenciable M n–dimensional, U conjunto abierto (pudiendo ser un abierto coordenado) de M y $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base de campos de vectores diferenciables sobre U. Consideremos el conjunto $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ de 1–formas diferenciables sobre U, que constituyen la base dual de $\{E_1, \dots, E_n\}$ en cada punto de U.

Se denominan **formas de conexión** a las n^2 1–formas θ^i_j sobre U asociadas a ∇ y a la base $\{E_1, \dots, E_n\}$ en cada punto de U por

$$\nabla_X E_j = \sum_{i=1}^n \theta^i_j(X)E_i. \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

Las θ^i_j son lineales, por la propiedad 1) de la conexión ∇, y son diferenciables, ya que si $X \in \mathfrak{X}(U)$, se tiene $\nabla_X E_j \in \mathfrak{X}(U)$ y así $\theta^i_j(X) = \theta^i(\nabla_X E_j) \in \mathfrak{F}(U)$.

Las 1–formas de conexión θ^i_j están relacionadas con los coeficientes de la conexión respecto a la base $\{E_1, \dots, E_n\}$ por $\theta^i_k(E_j) = \Gamma^i_{jk}$.

Los campos de tensores torsión y curvatura pueden también expresarse a través de formas diferenciales asociadas a una base de campos de vectores $\{E_1, \dots, E_n\}$

sobre un abierto U: Definimos las 2–formas Θ y Ω (denominadas respectivamente forma torsión y forma curvatura) sobre U, si $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$, por

$$T(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\Theta^i(X,Y)E_i.$$

$$R(X,Y)E_j=\sum_{i=1}^{n}\Omega^i_j(X,Y)E_i.$$

Las formas diferenciales $\theta^i,\theta^i_j,\Theta^i,\Omega^i_j$, están relacionadas por las ecuaciones de estructura de Cartan, que son equivalentes a la definición de los tensores torsión y curvatura. Dichas ecuaciones son (Ejercicios 149 y 150):

$$d\theta^i=\sum_{j=1}^{n}\theta^j\wedge\theta^i_j+\Theta^i. \qquad (1^{\text{a}}\ \text{ecuación de estructura})$$

$$d\theta^i_j=\sum_{k=1}^{n}\theta^k_j\wedge\theta^i_k+\Omega^i_j. \qquad (2^{\text{a}}\ \text{ecuación de estructura})$$

5.2 Enfoque tensorial o clásico

Derivada covariante de campos de vectores

Pasamos a generalizar el concepto de derivadas parciales en espacios euclídeos, a cualquier espacio con coordenadas arbitrarias.

En una variedad M, consideremos un campo de vectores diferenciable X, que respecto a un sistema de coordenadas $(U,(x^1,\dots,x^n))$ se expresa por [(1)] $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$; pues bien, las funciones diferenciables que resultan al hallar las derivadas parciales de las componentes del campo X respecto de cada una de las coordenadas en cada sistema coordenado, no constituyen, en general, las componentes de un tensor de tipo (1,1). En efecto, si $(U,(x^1,\dots,x^n))$ es otro sistema coordenado, con puntos

[(1)] Suprimiremos el símbolo del sumatorio, adoptando el convenio de Einstein, según el cual, índices en factores distintos de un mismo sumando colocados uno arriba y otro abajo, indica sumatorio en todo el rango del índice.

comunes con el anterior, y respecto al cual $X = \overline{X}^i \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^i}$ se sigue, teniendo en cuenta la ley de transformación relativa a este cambio de coordenadas

$$\overline{X}^i = X^j \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}, \tag{5.2}$$

que las derivadas parciales se transforman según la relación:

$$\frac{\partial \overline{X}^i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(X^\ell \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\ell}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial X^\ell}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\ell}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} + X^\ell \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^\ell}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j}. \tag{5.3}$$

Luego las funciones $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$, no son las componentes de un tensor pues no cumplen la ley relativa al cambio de coordenadas (ver pág. 69).

Esto mismo ocurre para cualquier campo tensorial: sus derivadas ordinarias no son en general, las componentes de un tensor. Se presenta por tanto el problema de ver si es posible generalizar la operación de derivación parcial de manera que, aplicada a tensores, dé como resultado nuevos tensores. A esta nueva operación le llamaremos derivación covariante.

La condición que impondremos, de antemano, a esta derivación covariante es que respecto del producto de tensores se comporte como derivada ordinaria.

Comenzaremos con un campo de vectores X. De su ley de transformación relativa al cambio de coordenadas (5.2), se deduce que las derivadas parciales se transforman según (5.3), que no es la ley de transformación de tensores.

Se trata de ver si es posible añadir algo lo más sencillo posible, a las derivadas ordinarias $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$, para que el resultado sea un tensor.

El término que se agregue puede depender de las coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ del punto donde está aplicado el vector y del vector mismo, es decir de sus componentes X^i. Por simplicidad, ensayamos el caso en que dicho término a añadir dependa linealmente de las componentes del vector; es decir, el caso en que el término a agregar a las derivadas parciales $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$, sea de la forma $\Gamma^i_{jk}X^k$, donde Γ^i_{jk} sean funciones diferenciables en U.

La suma obtenida será:

$$X^i_{;j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}X^k. \tag{5.4}$$

Las n^3 funciones Γ^i_{jk} pueden ser arbitarias, con tal que $X^i_{;j}$ sean las componentes de un tensor (en el cual el índice j será covariante; de aquí el nombre de derivada covariante). Para ello, su ley de transformación debe ser

$$\overline{X}^\alpha_{;\beta} = X^i_{;j}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \qquad \text{o} \qquad X^k_{;i} = \overline{X}^\gamma_{;\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}$$

de donde,

$$\frac{\partial X^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}X^j=\left(\frac{\partial \overline{X}^\gamma}{\partial \overline{x}^\alpha}+\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{X}^\beta\right)\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}$$

y usando (5.2) y (5.3), resulta

$$\frac{\partial \overline{X}^\beta}{\partial \overline{x}^\delta}\frac{\partial \overline{x}^\delta}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\beta}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^\delta\partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\delta}{\partial x^i}\overline{X}^\beta+\Gamma^k_{ij}\overline{X}^\beta\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}=\frac{\partial \overline{X}^\gamma}{\partial \overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}+\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{X}^\beta\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \Rightarrow$$

$$\left(\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}-\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^\delta\partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\delta}{\partial x^i}\right)\overline{X}^\beta=0.$$

Expresión que tiene que ser nula para cualquier campo de vectores X (es decir, las funciones Γ^k_{ij} a obtener deben servir para cualquier campo de vectores), luego tenemos las n ecuaciones

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^\delta\partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\delta}{\partial x^i}\qquad(\beta=1,\ldots,n).$$

De estas ecuaciones, podemos despejar las funciones $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$, como soluciones de este sistema lineal, cuyos coeficientes forman una matriz de determinante no nulo (el jacobiano de la transformación de coordenadas), obteniéndose:

$$\boxed{\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^\alpha\partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k}.}\qquad(5.5)$$

Por consiguiente, si se tienen n^3 funciones Γ^k_{ij} que, mediante un cambio de coordenadas, se transforman según (5.5), las expresiones de $X^i_{;j}$, dadas por (5.4), son las componentes de un campo de tensores de tipo (1,1), cualquiera que sea el campo de vectores X.

Dar una **conexión** en M consiste en dar n^3 funciones Γ^k_{ij} verificando (5.5), a las que se les denomina **coeficientes de la conexión**.

Al tensor de componentes $X^i_{;j}=\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}X^k$ dadas por (5.4), se le llama **derivada covariante** del campo de vectores X.

Utilizando ahora el principio relativo al comportamiento de la derivada covariante respecto al producto, podemos ver cómo es la derivada covariante de cualquier campo de tensores, con la misma conexión Γ^k_{ij} obtenida con un campo de vectores.

Comencemos viendo, dado que las derivadas parciales de una función sí son las componentes de un tensor, que las derivadas covariantes de una función coinciden con las derivadas parciales. En efecto:

Sea f una función y X un campo de vectores arbitrario, el producto fX es un campo de vectores, y su derivada covariante será

$$(fX^i)_{;j}=\frac{\partial(fX^i)}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}fX^k=\frac{\partial f}{\partial x^j}X^i+f\frac{\partial X^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}fX^k\ .$$

Pero, según el postulado admitido sobre la derivada covariante de un producto, se tiene

$$(fX^i)_{;j} = f_{;j}X^i + fX^i_{;j} = f_{;j}X^i + f\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + f\Gamma^i_{jk}X^k,$$

que comparada con la anterior, y puesto que X es arbitrario, resulta:

$$f_{;j} = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Tratemos ahora de hallar la derivada covariante de un campo de covectores o tensor de tipo (0,1); es decir, de una 1–forma. Se tiene la siguiente expresión para su derivada covariante:

Si ω es una 1–forma, su derivada covariante es el tensor de tipo (0,2) de componentes

$$\omega_{j;k} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \Gamma^i_{kj}\omega_i\ . \tag{5.6}$$

En efecto, para un campo de vectores arbitrario X consideremos la función definida en cada sistema coordenado por $f = X^i\omega_i$, es fácil ver que esta función está bien definida en todo M. Su derivada covariante coincide con las derivadas ordinarias:

$$(X^i\omega_i)_{;k} = \frac{\partial(X^i\omega_i)}{\partial x^k}.$$

Desarrollando los dos miembros de esta igualdad resulta, teniendo en cuenta el principio relativo a la derivada covariante del producto:

$$X^i_{;k}\omega_i + X^i\omega_{i;k} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\omega_i + X^i\frac{\partial \omega_i}{\partial x^k}.$$

Y según la expresión (5.4) de la derivada covariante de un campo de vectores, tenemos

$$\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj}X^j\right)\omega_i + X^i\omega_{i;k} - \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\omega_i - X^i\frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} = 0.$$

Es decir,

$$\left(\Gamma^i_{kj}\omega_i + \omega_{j;k} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k}\right)X^j = 0$$

y, como X es arbitrario, resulta:

$$\omega_{j;k} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \Gamma^i_{kj}\omega_i.$$

El procedimiento que hemos utilizado para hallar la derivada covariante de una 1–forma, sirve para obtener la derivada covariante de cualquier tensor K. Basta multiplicar sus componentes por componentes de campos de vectores y 1–formas en número conveniente para obtener una función, y aplicar luego el hecho de que para funciones, la derivada parcial ordinaria y la derivada covariante coinciden.

Así, si K es un tensor de tipo (p,q), tomemos q campos de vectores $X_1,\ldots,X_q$, p 1–formas $\theta^1,\ldots,\theta^p$ y la función:

$$K^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} X^{j_1}_1 \cdots X^{j_q}_q \theta^1_{i_1} \cdots \theta^p_{i_p}.$$

De donde, hallando la derivada covariante (utilizando el postulado de la derivada de un producto) y la derivada ordinaria, e igualando las relaciones obtenidas, dada la arbitrariedad de los campos y 1–formas tomados, resultará:

$$K^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q;k} = \frac{\partial K^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^k} + \Gamma^{i_\alpha}_{k\ell} K^{i_1\cdots i_{\alpha-1}\ell i_{\alpha+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} - \Gamma^h_{kj_\beta} K^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{\beta-1}hj_{\beta+1}\cdots j_q}. \tag{5.7}$$

Podemos ahora relacionar el concepto de conexión dado aquí con el enfoque axiomático dado en el párrafo anterior:

La fórmula (5.1) define los coeficientes de la conexión Γ^k_{ij}, los cuales están sujetos a la ley de transformación (5.5).

Recíprocamente, dado un sistema de componentes Γ^k_{ij} para cada sistema coordenado $(U,(x^1,\ldots,x^n))$ en M que están sujetos a la ley de transformación (5.5), la fórmula (5.1), junto con las propiedades formales del comportamiento de la derivada covariante respecto al producto, permite definir $(\nabla_U)_X Y$ para todo campo de vectores en un entorno coordenado U. Para campos de vectores X e Y en M, definimos el campo de vectores $\nabla_X Y$ sobre M poniendo

$$\left(\nabla_X Y\right)(x) = \Big((\nabla_U)_{X_U}\, Y_U\Big)(x)$$

donde X_U e Y_U son las restricciones de X e Y al entorno U conteniendo a x; el término de la derecha es independiente de la elección del entorno coordenado U que contiene a x, como fácilmente se verifica, en virtud de (5.5).

Tensores torsión y curvatura

De las relaciones (5.5) que expresan los coeficientes de una conexión sobre una variedad M, respecto a diferentes sistemas coordenados, resulta que dichos coeficientes Γ^i_{jk} <u>no</u> son las componentes de un tensor de tipo (1,2); sin embargo, sí es un tensor el que tiene por componentes:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}. \tag{5.8}$$

El tensor así obtenido se denomina **tensor torsión**.

Otro tensor muy importante en una variedad con una conexión, se obtiene buscando las condiciones para que las derivadas covariantes segundas sean independientes del orden de derivación.

Consideremos, por ejemplo, el campo de vectores X y el campo de tensores de tipo (1,1) cuyas componentes son las derivadas covariantes de X, es decir, $X^i_{;k}$. Las derivadas covariantes de éste serán, según (5.7)

$$X^i_{;k\ell} = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} X^j\right)_{;\ell} =$$

$$= \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k \partial x^\ell} + \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} X^j + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial X^j}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{\ell h}\left(\frac{\partial X^h}{\partial x^k} + \Gamma^h_{kj} X^j\right) - \Gamma^h_{\ell k}\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^h} + \Gamma^i_{hj} X^j\right).$$

Análogamente, invirtiendo el orden de derivación, resulta

$$X^i_{;\ell k} = \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^\ell \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} X^j + \Gamma^i_{\ell j} \frac{\partial X^j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh}\left(\frac{\partial X^h}{\partial x^\ell} + \Gamma^h_{\ell j} X^j\right) - \Gamma^h_{k\ell}\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^h} + \Gamma^i_{hj} X^j\right).$$

Restando, miembro a miembro, resulta

$$X^i_{;k\ell} - X^i_{;\ell k} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} + \Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{\ell h} - \Gamma^h_{\ell j}\Gamma^i_{kh}\right) X^j + T^h_{k\ell} X^i_{;h}.$$

Poniendo

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} + \Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{\ell h} - \Gamma^h_{\ell j}\Gamma^i_{kh}, \tag{5.9}$$

nos queda

$$X^i_{;k\ell} - X^i_{;\ell k} = R^i_{jk\ell} X^j + T^h_{k\ell} X^i_{;h}. \tag{5.10}$$

Lo que nos permite afirmar que las n^4 funciones $R^i_{jk\ell}$ son componentes de un campo de tensores, ya que en (5.10) tanto el primer miembro como $T^h_{k\ell} X^i_{;h}$ son componentes de tensores para cualquier campo de vectores X.

Al tensor de tipo (1,3) de componentes $R^i_{jk\ell}$ se le denomina **tensor curvatura**.

Si en vez de un campo de vectores X se parte de un campo de tensores arbitrario, al hallar las derivadas covariantes cruzadas se obtiene una expresión del tipo (5.10). Luego, podemos afirmar:

"En general, no se puede invertir el orden en la derivada covariante".

"Para que las derivadas covariantes segundas de cualquier campo de tensores sean independientes del orden de derivación es necesario y suficiente que los tensores de curvatura y de torsión sean nulos".

Conexión de Riemann

A partir del producto euclídeo en $\mathbb{R}^3$, usando el isomorfismo $T_p(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$, podemos realizar las operaciones básicas, como calcular la longitud de un vector tangente o los ángulos entre vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$.

La teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$, ciñéndonos a su forma clásica inspirada en los trabajos de Gauss, quién en 1827 expuso la geometría intrínseca de una superficie en $\mathbb{R}^3$ (es decir, la geometría observada por un habitante de ella), sólo depende del producto escalar de vectores tangentes a la superficie.

Hacia 1854, Riemann generaliza estos casos especiales e introduce la geometría sobre una variedad arbitraria n–dimensional, para lo que es necesario definir un producto interior en cada espacio tangente.

Bajo el impulso de la teoría de la relatividad general de Einstein (1915), una mayor generalización se hace necesaria: la condición de definido positivo del producto interior se debilita a solamente exigir no degenerado. Para ello definimos un **tensor métrico** g sobre una variedad M, como un campo de tensores de tipo (0,2) sobre M, simétrico, no degenerado y de índice constante. En otras palabras, g es una asignación diferenciable que a cada punto $x \in \mathsf{M}$ le asocia un producto escalar g_x en el espacio tangente $T_x(\mathsf{M})$ y el índice de g_x es el mismo para todo $x \in \mathsf{M}$. Una variedad semi–riemanniana, a la que llamaremos simplemente **espacio de Riemann**, es una variedad provista de un tensor métrico g. Como caso particular tenemos que, si el índice $\nu = 0$, se trata de una variedad de Riemann: cada g_x es un producto interior (definido positivo) sobre $T_x(\mathsf{M})$, y si $\nu = 1$ y $2 \leq n = dim\ \mathsf{M}$, M es una variedad de Lorentz.

Para definir una derivada covariante se necesita una conexión. Se trata de ver ahora si del tensor métrico g de un espacio riemanniano, se puede obtener una conexión que permita la operación de derivación covariante y a partir de ella, obtener un tensor curvatura.

Vamos a demostrar que tal conexión se puede obtener y que además se pueden exigir las siguientes condiciones:

1) Que la conexión sea simétrica; es decir, que su tensor torsión $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ sea nulo.

2) Que la derivada covariante del tensor métrico g, $g_{ij;k}$, obtenida mediante la conexión buscada, sea nula.

Para ello supongamos 2) y de (5.7), expresión que da la derivada covariante de un tensor arbitrario, resulta:

$$0 = g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{ki} g_{hj} - \Gamma^h_{kj} g_{ih},$$

de donde obtenemos por permutación circular

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^h_{ki} g_{hj} + \Gamma^h_{kj} g_{ih} \qquad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma^h_{ij} g_{hk} + \Gamma^h_{ik} g_{jh} \qquad \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma^h_{jk} g_{hi} + \Gamma^h_{ji} g_{kh}.$$

Restando las dos últimas relaciones de la primera y teniendo en cuenta la condición impuesta 1), simetría de los coeficients de la conexión, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, resulta:

$$\Gamma^h_{ij} g_{kh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

de donde, dado que el tensor métrico g es no degenerado, podemos despejar los coeficientes Γ^i_{jk}, obteniéndose:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right), \tag{5.11}$$

donde los g^{ij} son los coeficientes de la matriz inversa de la formada con los g_{ij}.

Por lo que si existe una conexión que cumple las condiciones 1) y 2), ella debe estar dada por (5.11), a la que se le denomina conexión riemanniana. Sólo queda por probar que estas expresiones de los Γ^i_{jk} (denominados símbolos de Christoffel de segunda especie) son de hecho las componentes de una conexión. Para lo cual, después de una transformación de coordenadas debe comportarse de acuerdo con la ley dada por las fórmulas (5.5). Lo cual no tiene dificultad establecerlo, usando las correspondientes leyes de transformación para los coeficientes g_{ij} y g^{ij}.

Tensores deducidos del tensor curvatura por contracción

El tensor curvatura de un espacio de Riemann es, ver (5.9)

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} + \Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{\ell h} - \Gamma^h_{\ell j}\Gamma^i_{kh},$$

donde las componentes de la conexión Γ^i_{jk}, son ahora los símbolos de Christoffel de segunda especie.

Por contracción del último índice del tensor curvatura se obtiene el tensor

$$S_{ij} = R^h_{ijh}.$$

Por contracción del índice intermedio, resulta el mismo tensor salvo signo. Y, finalmente, por contración del primer índice, resulta

$$R^i_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x^j},$$

que se comprueba fácilmente que es nulo. Luego resulta que en un espacio de Riemann:

"Por contración de índices del tensor curvatura se puede obtener un sólo tensor no nulo el cual es simétrico y que le denominamos tensor de Ricci".

A partir del tensor de Ricci se puede construir la función, denominada curvatura escalar del espacio:

$$r = g^{ij} S_{ij}.$$

Otro tensor importante es el tensor gravitatorio de Einstein definido por

$$G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{2} r g_{ij},$$

el cual es simétrico y tiene la propiedad de tener la divergencia nula, o sea

$$G^{ij}_{;i} = 0$$

donde $G^{ij} = g^{ih} g^{kj} G_{kh}$.

La demostración de este hecho, fundamental en la teoría de la relatividad general de Einstein, se lleva a cabo utilizando la llamada identidad de Bianchi, relativa a las derivadas covariantes del tensor curvatura:

$$R^i_{jk\ell;h} + R^i_{j\ell h;k} + R^i_{jhk;\ell} = 0.$$

5.3 Conexiones definidas por caminos

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Los espacios vectoriales tangentes $T_x(\mathsf{M})$ y $T_y(\mathsf{M})$ en dos puntos x e y de M son isomorfos, ya que ambos son de dimensión n, pero no canónicamente isomorfos. Ahora bien, con el fin de obtener un isomorfimo determinado que relacione $T_x(\mathsf{M})$ con $T_y(\mathsf{M})$, es necesrio introducir una estructura adicional sobre la variedad, que llamaremos conexión. Ésta "conecta" los espacios tangentes en diferentes puntos de la variedad. Tal conexión será obtenida, por ejemplo, por una aplicación lineal no singular que lleve una base $\mathcal{E}_x$ de $T_x(\mathsf{M})$ sobre una base $\mathcal{E}_y$ de $T_y(\mathsf{M})$.

Sea τ una curva diferenciable sobre M que une los puntos x e y. Necesitamos definir un isomorfismo $\tau_{xy} \colon T_x(\mathsf{M}) \to T_y(\mathsf{M})$ que dependa sólo de los puntos x e y y de la curva τ que los une. Le exigimos además las condiciones siguientes:

1) Si z es un punto de τ entre x e y, entonces se requiere que $\tau_{xy} = \tau_{zy} \circ \tau_{xz}$.

2) τ_{yx} es el isomorfismo inveros de τ_{xy}: $\tau_{yx} = \tau_{xy}^{-1}$.

Supongamos que los puntos x e y están en un entorno coordenado U que contiene a la curva τ. Entonces τ puede ser representada por las ecuaciones

$$x^i = x^i(t) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

donde $\tau(0) = x$ y $\tau(1) = y$.

Tratamos de encontrar un isomorfismo $\tau_t : T_x(\mathsf{M}) \to T_{\tau(t)}(\mathsf{M})$. Fijadas unas bases, τ_t puede ser representado por una matriz no singular A_t y, si $v_0 \in T_x(\mathsf{M})$, podemos escribir

$$v_t = A_t v_0 \in T_{\tau(t)}(\mathsf{M}).$$

Supongamos ahora que los elementos de A_t, considerados como funciones de t son diferenciables; entonces, diferenciando la última ecuación, obtenemos

$$\dot{v}_t = \dot{A}_t v_0 = \left(\dot{A}_t A_t^{-1}\right) v_t,$$

y poniendo $-\omega_t$ en vez de la matriz $\left(\dot{A}_t A_t^{-1}\right)$, obtenemos

$$\dot{v}_t + \omega_t v_t = 0.$$

Supongamos ahora que ω depende sólo de $x(t)$ y de $\dot{x}(t)$. Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\dot{v} + \omega(x, \dot{x}) v = 0. \tag{5.12}$$

Ahora bien, un resultando estandar de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden asegura que existe una única solución con la condición inicial v_0 cuando $t = 0$.

Así dado un vector $v_0 \in T_x(\mathsf{M})$ da lugar a un campo de vectores a lo largo de τ.

Es necesario, no obstante, que el isomorfismo τ_t sea independiente de la parametrización particular de τ; es decir, la ecuación diferencial debe ser invariante respecto a un cambio de parámetro. De la forma de dicha ecuación, esto será posible si $\omega(x, \dot{x})$ es homogénea de grado 1 en $\dot{x}$.

Así vemos que un isomorfismo entre los espacios tangentes en puntos de la curva τ se obtiene asociando a cada punto de τ una matriz ω cuyos elementos son homogeneos de grado uno en $\dot{x}$.

Consideremos ahora el efecto que produce sobre la expresión local de ω un cambio de coordenadas $\overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$. Requerimos que la ecuación (5.12) sea invariante por un tal cambio.

Tenemos [(2)]

$$\dot{\overline{v}}^\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} v^i\right) = \frac{\partial^2 \overline{x}^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^j v^i + \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \dot{v}^i.$$

Entonces

$$-\overline{\omega}^\alpha_\beta \overline{v}^\beta = \frac{\partial^2 \overline{x}^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^j v^i - \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \omega^i_j v^j$$

o sea

$$\left(\overline{\omega}^\alpha_\beta \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \overline{x}^\alpha}{\partial x^k \partial x^j} \dot{x}^j - \omega^i_k \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\right) v^k = 0$$

De donde resulta

(2) En esta Sección, como hemos hecho en la anterior, omitiremos ocasionalmente los signos de sumatorio.

$$\boxed{\overline{\omega}^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}} = \omega^{i}_{j}\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial^{2}\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{j}\partial x^{i}}\dot{x}^{i}} \tag{5.13}$$

Luego, una conexión está definida a lo largo de una curva τ, relativa a un sistema cordenado $(x^1, \dots, x^n)$, por una matriz (ω^i_j). Las componentes de la matriz $(\overline{\omega}^{\alpha}_{\beta})$ que determina la misma conexión relativamente al sistema coordenado $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)$ están dadas por (5.13).

Consideraremos un caso particular, que es cuando ω es lineal en $\dot{x}$; se dice entonces que ω es una conexión lineal. Y que $\tau_t \colon T_{\alpha(0)}(\mathsf{M}) \to T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$ es el desplazamiento paralelo (o transporte paralelo) a lo largo de τ desde $\alpha(0)$ a $\alpha(t)$.

Si ponemos

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\dot{x}^k, \tag{5.14}$$

a las funciones Γ^i_{jk} se denominan coeficientes de la conexión. Y de la fórmula (5.13) se deduce que la ley de transformación de los coeficientes de la conexión respecto a un cambio de coordenadas es

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} = \Gamma^{i}_{jk}\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial^{2}\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}.$$

O bien

$$\boxed{\Gamma^{i}_{jk} = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} + \frac{\partial^{2}\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \overline{x}^{\alpha}}.} \tag{5.15}$$

Para relacionar este enfoque, para el caso particular de conexiones lineales, con el axiomático de Koszul, bastará establecer el siguiente resultado, en el que ∇ es la conexión en M con coeficientes Γ^i_{jk} cumpliendo (5.15):

"Sea Y un campo de vectores sobre una curva α en una variedad diferenciable n–dimensional M ($\alpha \colon [0,1] \to \mathsf{M}$) con $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = X_x$, entonces

$$\nabla_{X_x} Y = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}\big(Y(t)\big) - Y(0)\right),$$

donde $\tau_t \colon T_{\alpha(0)}(\mathsf{M}) \to T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$ es desplazamiento paralelo a lo largo de la curva α desde $\alpha(0)$ a $\alpha(t)$."

Para demostrar este resultado, supongamos que la curva α queda en un entorno $\big(U, (x^1, \dots, x^n)\big)$ y denotamos también por Y un campo de vectores sobre U extensión del campo de vectores Y dado sobre α. Entonces $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$.

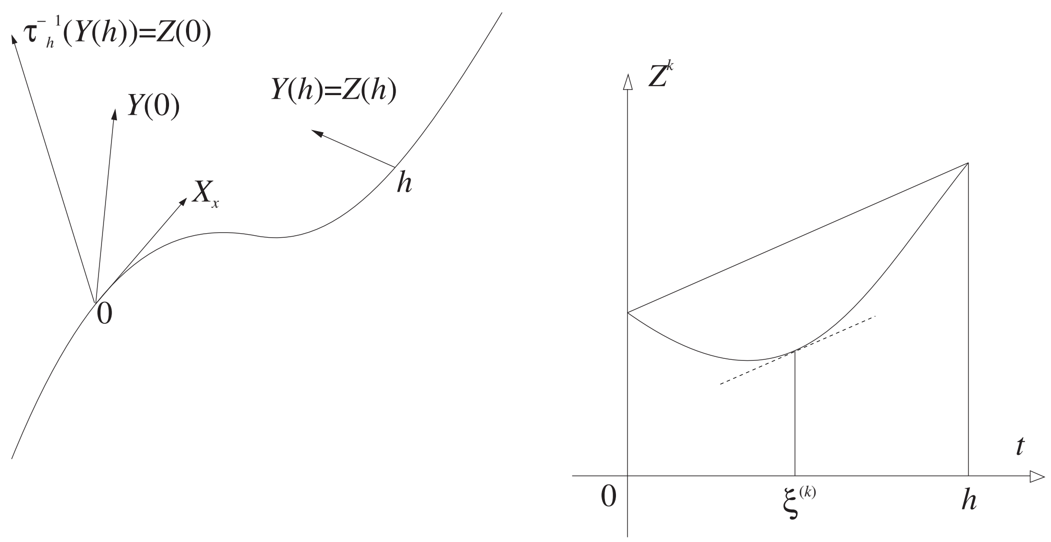


Fig. 5.1: Transporte paralelo

Fijando un h, sea Z el campo de vectores paralelo a lo largo de α, tal que $Z(0)=\tau_h^{-1}(Y_{\alpha(h)})$, se tiene entonces que $Z(h)=Y_{\alpha(h)}$. Ponemos

$$Z(t)=Z^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}_{|\alpha(t)}.$$

La caracterización de ser Z paralelo es, según (5.12) y teniendo en cuenta (5.14)

$$\frac{dZ^k(t)}{dt}+\Gamma_{ij}^k\big(\alpha(t)\big)Z^i(t)\frac{d\alpha^j}{dt}(t)=0,$$

verificando $Z^k(h)=Y^k\big(\alpha(h)\big)$ $(k=1,\dots,n)$.

Aplicando el teorema del valor medio, existirá para cada $k=1,\dots,n$, un $\xi^{(k)}\in\,]0,h[$, tal que

$$Z^k(h)-Z^k(0)=h\frac{dZ^k}{dt}(\xi^{(k)}).$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\tau_h^{-1}(Y_{\alpha(h)})-Y_{\alpha(0)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Z^k(0)-Y^k(0)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}_{|\alpha(0)},$$

resulta para cada componente

$$\frac{1}{h}\left(Z^k(0)-Y^k(0)\right)=\frac{1}{h}\left(Z^k(h)-h\frac{dZ^k}{dt}(\xi^{(k)})-Y^k(0)\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\Big(Y^k(h)-Y^k(0)\Big)-\frac{dZ^k}{dt}(\xi^{(k)})=$$

$$=\frac{1}{h}\left(Y^k(h)-Y^k(0)\right)+\Gamma_{ij}^k\big(\alpha(\xi^{(k)})\big)Z^i(\xi^{(k)})\frac{d\alpha^j}{dt}(\xi^{(k)}).$$

Cuando $h \to 0$ (que asocia diferentes Z para cada h) resulta:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{h}\left(\tau_h^{-1}(Y_{\alpha(h)}) - Y_{\alpha(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{dY^k(t)}{dt}(0) + \Gamma_{ij}^k(\alpha(0))Y^i(0)\frac{d\alpha^j}{dt}(0)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}_{|\alpha(0)} = \left(\nabla_{\alpha'}Y\right)(0).$$

Con lo queda probado el resultado enunciado.

5.4 Enfoque por fibrados

Distribución horizontal en $T(\mathsf{M})$

Si $T(\mathsf{M})$ es el espacio fibrado tangente sobre una variedad diferenciables M de dimensión n, cada espacio vectorial $T_x(\mathsf{M})$ (con la estructura diferenciable canónica) es una subvariedad regular n–dimensional de $T(\mathsf{M})$, al ser la proyección canónica $\pi\colon T(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ submersión.

Un vector tangente a $T(\mathsf{M})$ en un punto $v \in T(\mathsf{M})$ se dice que es vertical si es tangente a la subvariedad $T_{\pi(v)}(\mathsf{M})$.

Denotaremos por $\mathcal{V}_v$ el conjunto de vectores verticales en $v \in T(\mathsf{M})$. Existe una caracterización de vectores verticales a través de la aplicación π_*:

$$W \in \mathfrak{X}(T(\mathsf{M})) \text{ es vertical} \quad \Longleftrightarrow \pi_*(W) = 0.$$

Para todo $\lambda \in I\!R - \{0\}$, consideremos el difeomorfismo $\lambda\colon T(\mathsf{M}) \to T(\mathsf{M})$ definido por $\lambda(v) = \lambda v$. A la correspondiente aplicación inducida también la denotaremos por λ, esto es $\lambda\colon T_v(T(\mathsf{M})) \to T_{\lambda v}(T(\mathsf{M}))$.

Dada una conexión lineal ∇ sobre M, nos permitirá asignar a cada $v \in T_x(\mathsf{M})$ un subespacio vectorial H_v de $T_v(T(\mathsf{M}))$ de dimensión n, al cual llamaremos subespacio horizontal pues no va a contener vectores verticales salvo el vector nulo. Dichos subespacios deberán tener las siguientes propiedades:

1) $T_v(T(\mathsf{M})) = H_v \oplus \mathcal{V}_v$
2) $\lambda(H_v) = H_{\lambda v} \qquad (\lambda \in I\!R - \{0\})$

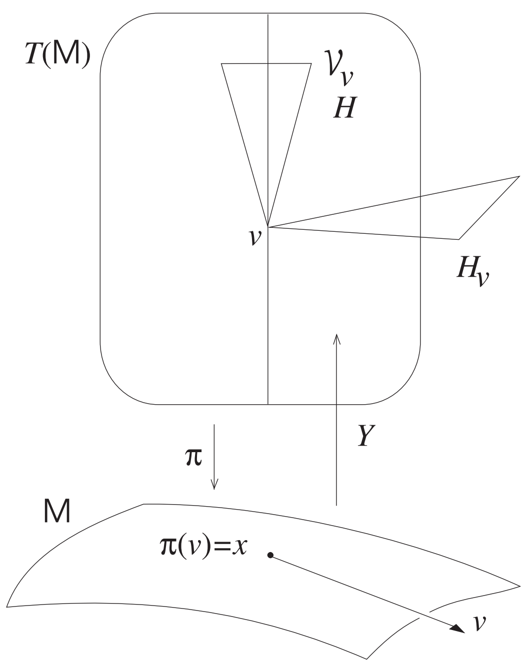


Fig. 5.2: Distribución horizontal en $T(\mathsf{M})$

3) $H : v \mapsto H_v$ es una distribución diferenciable.

Para definir H_v, procedemos de la siguiente forma: Escojamos un punto (vector en x) $v \in T(\mathsf{M})$ y supongamos que tenemos un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ tal que

$$Y_x = v \quad \text{y} \quad \nabla_u Y = 0, \qquad \forall u \in T_x(\mathsf{M}).$$

Recordemos que Y se interpreta como una aplicación $Y : \mathsf{M} \to T(\mathsf{M})$ diferenciable. Consideremos su aplicación inducida en x, $Y_* : T_x(\mathsf{M}) \to T_v(T(\mathsf{M}))$; ponemos:

$$H_v = Y_*(T_x(\mathsf{M})).$$

Demostremos que se trata de un subespacio vectorial de dimensión n de $T_v(T(\mathsf{M}))$, que es independiente de la elección del campo de vectores Y y que tiene las propiedades requeridas 1), 2) y 3).

Para ello, elegimos una carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ de M alrededor de $x \in \mathsf{M}$ y sea $\Big(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi} \equiv (\widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^{2n})\Big)$ la correspondiente carta inducida en $T(T(\mathsf{M}))$. Un campo de vectores Y sobre M, que en U se expresa por $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, satisface las condiciones requeridas si y sólo si

$$\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(x) + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x) Y^j(x) = 0, \qquad Y^k(x) = v^k \qquad (i, k = 1, \dots, n),$$

siendo Γ_{ij}^k los coeficientes de la conexión ∇ relativos a la carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ y $v = \sum_{k+1}^{n} v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ (es decir, $v^k = \widetilde{x}^{n+k}(v)$).

Es claro que podemos escoger un campo de vectores satisfaciendo estas condiciones. Entonces

$$Y_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}\right) = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}_{|v} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}_{|x} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^{n+k}}_{|v} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}_{|v} - \sum_{j,k=1}^{n} v^j \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^{n+k}}_{|v}.$$

Estos vectores (que no dependen de la elección de Y) forman una base para H_v, que es entonces un subespacio de dimensión n de $T_v(T(\mathsf{M}))$.

Los campos de vectores en $\pi^{-1}(U)$, definidos por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i} - \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ \pi) \widetilde{x}^{n+j} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^{n+k}}, \tag{5.16}$$

forman una base en cada punto de los subespacios H_v.

1) La aplicación inducida $\pi_* : T_v(T(\mathsf{M})) \to T_x(\mathsf{M})$ es suprayectiva, y verifica $\pi_*(H_v) = T_x(\mathsf{M})$; por tanto, como $\dim H_v = \dim T_x(\mathsf{M})$, es inyectiva sobre H_v; así, el único vector de H_v que tiene imagen nula por π_* es el nulo; por lo que $H_v \cap \mathcal{V}_v = \{0\}$. Y entonces $T_v(T(\mathsf{M})) = H_v \oplus \mathcal{V}_v$.

2) La aplicación $\lambda \colon T_v(T(\mathsf{M})) \to T_{\lambda v}(T\mathsf{M})$, verifica $\lambda(E_{i\,|v}) = E_{i\,|\lambda v}$. Luego

$$\lambda(H_v) = H_{\lambda v}.$$

3) La distribución $H : v \longmapsto H_v$ es diferenciable ya que está generada por los campos de vectores diferenciables E_i.

El subespacio H_v de $T_v(T(\mathsf{M}))$ así obtenido se dice que es **horizontal**. Un vector perteneciente al subespacio H_v se dice que es **horizontal**. Todo campo de vectores sobre $T(\mathsf{M})$ cuyos representantes son vectores horizontales se denomina **campo de vectores horizontal**. A la distribución H se le denomina **distribución horizontal** sobre $T(\mathsf{M})$ o bien se dice que H es una **conexión** en el fibrado tangente $T(\mathsf{M})$.

Se tiene el siguiente resultado fácil de probar que relaciona la integrabilidad de la distribución horizontal con la curvatura de la conexión que la determina:

"Sea ∇ es una conexión lineal sobre una variedad M y $E_1, \dots, E_n$ los campos de vectores sobre una carta inducida en $T(\mathsf{M})$ definidos por (5.16) más arriba. Entonces si ∇ tiene curvatura nula se verifica que

$$[E_i, E_j] = 0. \qquad (i, j = 1, \dots, n)$$

(Es decir, la distribución horizontal es integrable).”

Conexión en M determinada por una distribución horizontal en $T(\mathsf{M})$

Veamos ahora el recíproco de la construcción anterior; es decir, si tenemos una conexión en $T(\mathsf{M})$ dada por un distribución H, verificando:

$$\begin{array}{ll} 1) & T_v(T(\mathsf{M})) = H_v \oplus \mathcal{V}_v \\ 2) & \lambda(H_v) = H_{\lambda v}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 3) & H : v \mapsto H_v \text{ es diferenciable,} \end{array}$$

entonces podemos dar una conexión en M (según la definición de Koszul); es decir, dar una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ verificando, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ y $\forall f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$:

$$\begin{array}{ll} 1) & \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ 2) & \nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ 3) & \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \\ 4) & \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y. \end{array}$$

Dada una conexión H sobre $T(\mathsf{M})$, usaremos la descomposición en suma directa $T_v(T(\mathsf{M})) = H_v \oplus \mathcal{V}_v$, para definir la componente horizontal $\mathsf{h}Z$ y la componente vertical $\mathsf{v}Z$ de un vector $Z \in T_v(T(\mathsf{M}))$.

Identificando el tangente al espacio vectorial $T_x(\mathsf{M})$ en v con el propio $T_x(\mathsf{M})$, es decir,

$$\mathcal{V}_v = T_v(T_x(\mathsf{M})) \equiv T_x(\mathsf{M}),$$

$\mathsf{v}Z$ será considerado un elemento de $T_x(\mathsf{M})$.

La condición (2) para H es equivalente a la ecuación $\lambda(\mathsf{h}Z) = \mathsf{h}(\lambda(Z))$ o a $\lambda(\mathsf{v}Z) = \mathsf{v}(\lambda(Z))$. Esta última, de acuerdo con la identificación hecha, viene a ser

$$\mathsf{v}(\lambda(Z)) = \lambda \cdot \mathsf{v}Z \tag{5.17}$$

Consideremos ahora un campo de vectores sobre M, $Y : \mathsf{M} \to T(\mathsf{M})$, y un vector $X_x \in T_x(\mathsf{M})$. Definimos

$$\nabla_{X_x} Y = \mathsf{v}(Y_*(X_x)) \in T_x(\mathsf{M})$$

Es claro que ∇ verifica las tres primeras propiedades de conexión. Para establecer la última, sea $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, entonces

$$(fY)_*(X_x) = f(x)(Y_*(X_x)) + X_x(f)Y_x, \tag{5.18}$$

donde $Y_x \in T_x(\mathsf{M})$ lo identificamos con el tangente a $T_x(\mathsf{M})$ en $f(x)Y_x$, es decir, $Y_x \in T_{f(x)Y_x}(T_x(\mathsf{M}))$. Para probar esta fórmula aplicamos la regla del producto para las derivadas: Si $\alpha\colon I \to \mathsf{M}$ es una curva tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = X_x$, entonces

$$(fY)_*(X_x) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(fY)(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\big(f(\alpha(t))Y(\alpha(t))\big) = X_x(f)Y_x + f(x)\big(Y_*(X_x)\big).$$

Si tomamos ahora la componente vertical en ambos miembros de (5.18) y usando (5.17), resulta

$$\mathsf{v}\big((fY)_*(X_x)\big) = \mathsf{v}\,(f(x)(Y_*(X_x))) + X_x(f)Y_x.$$

$$\nabla_{X_x}(fY) = f(x)\nabla_{X_x}Y + X_x(f)Y_x.$$

Así ∇ es una conexión en M (según Koszul).

Esta conexión ∇ en M determinada por la distribución $H : v \mapsto H_v$ en $\mathrm{T}(\mathsf{M})$, da lugar a esta misma distribución si emprendemos la construcción recíproca. En efecto, si designamos por $H'_v \subset T_v(T(\mathsf{M}))$ los espacios horizontales determinandos por la conexión ∇ recién obtenida, resulta que $H'_v = Y_*(T_x(\mathsf{M}))$, siendo $Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, tal que

$$Y_x = v \qquad \text{y} \qquad \nabla_u Y = 0, \quad \forall u \in T_x(\mathsf{M}).$$

Pero $\nabla_u Y = \mathsf{v}Y_*(u) = 0$, $\forall u \in T_x(\mathsf{M})$ implica que $Y_*(u) \in H_v$, $\forall u \in T_x(\mathsf{M})$. Luego $H'_v = Y_*(T_x(\mathsf{M})) = H_v$.

Distribución horizontal en $L(\mathsf{M})$

Si M es una variedad diferenciable n–dimensional, consideremos el conjunto

$$L(\mathsf{M}) = \big\{p \equiv (x; e_1, \ldots, e_n)/x \in \mathsf{M} \text{ y } \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ es una base de } T_x(\mathsf{M})\big\},$$

y sea $\pi\colon L(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ la aplicación proyección, definida por $\pi(x; e_1, \ldots, e_n) = x$.

Si $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^n)\big)$ es un sistema coordenado sobre M, sea el sistema coordenado en $L(\mathsf{M})$ $\big(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi} \equiv (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n, \widetilde{x}^1_1, \ldots, \widetilde{x}^n_n)\big)$, donde ponemos $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ y $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^{n+n^2}$ homomorfismo coordenado con funciones coordenadas definidas para $p \equiv (x; e_1, \ldots, e_n) \in \widetilde{U}$ por

$$\widetilde{x}^i(p) = (x^i \circ \pi)(p) = x^i(x) \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}^i_j(p)\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

No tiene dificultad probar que si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)/\alpha \in A\}$ es un atlas para la estructura diferenciable de M, entonces $\{(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)/\alpha \in A\}$ permite definir una estructura de variedad diferenciable sobre $L(\mathsf{M})$. A la que llamaremos **fibrado de referencias lineales sobre** M.

Consideremos ahora las siguientes aplicaciones:

1) Si $GL(n, I\!R)$ es el grupo lineal general, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi : L(\mathsf{M}) \times GL(n, I\!R) & \longrightarrow & L(\mathsf{M}) \\ (p \equiv (x; v_1, \ldots, v_n), a) & \longmapsto & \phi(p,a) = pa = (x; \sum_{i=1}^{n} a_1^i v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_n^i v_i). \end{array}$$

es diferenciable, e induce sendas aplicaciones diferencianbles

$$\begin{array}{cc} \phi_a : L(\mathsf{M}) \to L(\mathsf{M}), & R_a \equiv \phi_p : GL(n, I\!R) \to L(\mathsf{M}) \\ p \mapsto pa & a \mapsto pa \end{array}$$

La aplicación R_a, aquí definida se denominada **traslación a la derecha**.

2) Sea ahora, para cada abierto coordenado U de M, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} s_U : U & \longrightarrow & L(\mathsf{M}) \\ x & \longmapsto & s_U(x) = (x; \frac{\partial}{\partial x^1}_{|x}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}_{|x}). \end{array}$$

También s_U es diferenciable y $\pi \circ s_U = 1_U$ (identidad en U). A s_U le denominamos **sección local canónica** o **campo de referencias básico**, ya que s_U asigna a cada punto del entorno coordenado U la referencia en ese punto determinada por los campos de vectores básicos.

3) Finalmente si U es un abierto coordenado de M, consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} h : U \times GL(n, I\!R) & \longrightarrow & \widetilde{U} = \pi^{-1}(U) \\ (x, a) & \longmapsto & h(x, a) = s_U(x)a. \end{array}$$

h_U es un difeomorfismo, el cual permite asignar coordenadas a los elementos de $\pi^{-1}(U)$. Así la referencia canónica tiene las coordenadas de (x, e), e matriz identidad en $GL(n, I\!R)$.

El conjunto de todas las referencias lineales en un punto $x \in \mathsf{M}$, $\pi^{-1}(x) = L_x$, es una subvariedad regular de $L(\mathsf{M})$ de dimension n^2, a la que denominamos fibra sobre x, y es difeomorfa a $GL(n, I\!R)$ a través de la aplicación

$$\begin{array}{rcl} h_x : GL(n, I\!R) & \longrightarrow & \pi^{-1}(x) = L_x \\ a & \longmapsto & s_U(x)a. \end{array}$$

Un campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(L(\mathsf{M}))$ que queda tangente a cada $L_{\pi(p)}$ ($Z_p \in T_p(L_{\pi(p)})$), es decir, tal que $\pi_*(Z_p) = 0$, se dice que es **vertical**. Denotaremos por $\mathcal{V}_p$ el conjunto de vectores verticales en $p \in L(\mathsf{M})$.

Sea ∇ una conexión sobre M, vamos ahora a definir a partir de ella una distribución $H : p \mapsto H_p$ en el fibrado de referencias lineales $L(\mathsf{M})$, verificando las siguientes propiedades:

1) $T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$
2) $(R_a)_*(H_p) = H_{pa}$
3) $H : p \longmapsto H_p$ es una distribución diferenciable.

Para definir H_p procedemos de la siguiente forma: Escojamos un punto (referencia en x) $p \in L(\mathsf{M})$, $p \equiv (x; v_1, \dots, v_n)$ y supongamos que tenemos un campo de referencias (una sección) $s\colon \mathsf{M} \to L(\mathsf{M})$, $s \equiv (Y_1, \dots, Y_n)$, $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ son campos de vectores diferenciables que forman una base del espacio tangente a M en cada punto, tal que

$$s(x) = p \qquad \text{y} \qquad \nabla_u s = 0, \qquad \forall u \in T_x(\mathsf{M})$$

donde $\nabla_u s$ denota $(\nabla_u Y_1, \dots, \nabla_u Y_n)$. Es claro que podemos escoger un campo de referencias satisfaciendo estas condiciones. Ponemos

$$H_p = s_*(T_x(\mathsf{M})).$$

Demostremos que se trata de un subespacio vectorial de dimensión n de $T_p(L(\mathsf{M}))$, que es independiente de la elección del campo de referencias s elegida y que tiene las propiedades requeridas 1), 2) y 3).

Para ello elegimos una carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ en M alrededor de $x \in \mathsf{M}$ y sea la correspondiente carta inducida en $L(M)$ $\big(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi} \equiv (\widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^n, \widetilde{x}^1_1, \dots, \widetilde{x}^n_n)\big)$. Un campo de referencias $s \equiv (Y_1, \dots, Y_n)$ sobre M, que en U se expresa por

$$Y_\ell = \sum_{k=1}^n Y_\ell^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad\qquad (\ell = 1, \dots, n)$$

satisface las condiciones requeridas si sólo si

$$\frac{\partial Y_\ell^k}{\partial x^i}(x) + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_\ell^j(x) = 0, \qquad Y_\ell^k(x) = v_\ell^k \qquad (i, k, \ell = 1, \dots, n)$$

siendo Γ_{ij}^k los coeficientes de la conexión ∇ relativos a la carta $\big(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)\big)$ y $v_\ell = \sum_{k=1}^n v_\ell^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, es decir, $v_\ell^k = \widetilde{x}_\ell^k(p)$.

Los teoremas relativos a ecuaciones diferenciales permiten escoger un campo de referencias satisfaciendo a estas condiciones. Entonces

$$s_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}\right) = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}_{|p} + \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial Y_\ell^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_\ell^k}_{|p} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}_{|p} - \sum_{j,k,\ell}^n \Gamma_{ij}^k(x) v_\ell^j \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_\ell^k}_{|p}.$$

Estos vectores (que no dependen de la elección de s) forman una base de H_p, el cual es, entonces, un subespacio vectorial de $T_p(L(\mathsf{M}))$ de dimensión n.

Los campos de vectores en $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$, definidos por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i} - \sum_{j,k,\ell=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ \pi)\widetilde{x}_\ell^j \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_\ell^k} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

forman una base para cada subespacio H_p.

1) La aplicación $\pi_* : T_p(L(\mathsf{M})) \to T_x(\mathsf{M})$ es sobreyectiva y se verifica $\pi_*(H_p) = T_x(\mathsf{M})$. Así, si $w \in H_p \cap \mathcal{V}_p$, usando un campo de referencias s que permita definir H_p, resulta que existe $v \in T_x(\mathsf{M})$ tal que $s_*(v) = w$. Como además $w \in \mathcal{V}_p$, se tiene $\pi_*(w) = 0$. Luego $\pi_*(w) = \pi_*(s_*(v)) = v = 0$. Por lo que $w = s_*(v) = 0$. Es decir, H_p no contiene vectores verticales salvo el nulo. Por lo que

$$T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p.$$

2) Sea $a \in GL(n, I\!R)$, probemos que $(R_a)_*(H_p) = H_{pa}$.

Si s es un campo de referencia que define H_p, resulta que $(sa)_*\big(T_x(\mathsf{M})\big) = H_{pa}$. Pues si $a \equiv (a_j^i)$, $s \equiv (Y_1, \dots, Y_n)$ y $sa \equiv (\sum_{i=1}^{n} a_1^i Y_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_n^i Y_i)$, al verificarse $\nabla_U s \equiv (\nabla_U Y_1, \dots, \nabla_U Y_n) = 0$, se tiene

$$\nabla_U(sa) \equiv \big(\nabla_U(\sum_{i=1}^{n} a_1^i Y_i), \dots, \nabla_U(\sum_{i=1}^{n} a_n^i Y_i)\big) = \big(\sum_{i=1}^{n} a_1^i(\nabla_U Y_i), \dots, \sum_{i=1}^{n} a_n^i(\nabla_U Y_i)\big) = 0.$$

En consecuencia

$$(R_a)_*(H_p) = (R_a)_*(s_*(T_x(\mathsf{M})) = (sa)_*(T_x(\mathsf{M})) = H_{pa}.$$

3) La distribución $H : p \mapsto H_P$ es diferenciable, ya que está generada por los campos de vectores diferenciables E_i.

El subespacio H_p de $T_p(L(\mathsf{M}))$ se dice que es **horizontal**. A los elementos de H_p se les denomina **vectores horizontales**. Un campo de vectores sobre $L(\mathsf{M})$ cuyos representantes en cada punto son vectores horizontales se denomina **campo de vectores horizontal**. A la distribución H se le denomina **distribución horizontal** sobre $L(\mathsf{M})$ o se dice que H es una **conexión** en el fibrado de las referencias lineales $L(M)$.

Transporte paralelo deducido por una distribución horizontal en $L(\mathsf{M})$

Veamos ahora el recíproco de la construcción anterior; es decir, si tenemos una conexión en $L(\mathsf{M})$ dada por un distribución H, verificando:

1) $T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$
2) $(R_a)_*(H_p) = H_{pa} \qquad \forall a \in GL(n, I\!R)$
3) $H : p \mapsto H_p$ es diferenciable.

Entonces podemos definir el transporte paralelo en M, y por tanto dar una conexión en M (según la definición de Koszul), como se hizo en la Sección 5.3:

De la propiedad (1) de H, es decir, de $T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$ y del hecho de que $\mathcal{V}_p$ es el núcleo de $\pi_* : T_p(L(\mathsf{M})) \to T_{\pi(p)}(\mathsf{M})$, se sigue claramente que $\pi_* : H_p \to T_{\pi(p)}(\mathsf{M})$ es un isomorfismo para cada $p \in L(M)$. Consecuentemente, para todo campo de vectores X sobre M, existe un único campo de vectores $\widehat{X}$ sobre $L(\mathsf{M})$ horizontal y que se proyecta en X, esto es $\widehat{X}_p \in H_p$ y $\pi_*(\widehat{X}_p) = X_{\pi(p)}, \forall p \in L(\mathsf{M})$. A este campo de vectores $\widehat{X}$ le llamaremos **levantamiento horizontal** de X.

Una curva diferenciable $\gamma : [0,1] \to L(\mathsf{M})$ se denomina **horizontal** si sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ son horizontales. Si $\alpha : [0,1] \to \mathsf{M}$ es una curva diferenciable en M, definimos el **levantamiento horizontal** de α a una curva horizontal $\widehat{\alpha} : [0,1] \to L(\mathsf{M})$ que se proyecta en α, es decir, tal que $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$.

Teniéndose la existencia del levantamiento horizontal de campos de vectores, se puede dar el concepto de levantamiento de curvas por una vía natural. Así si α es una curva en M con campo de vectores tangente T, extendemos T a un campo de vectores diferenciable a un entorno U de un trozo de curva que no se corte a si misma. Levantamos T a un campo de vectores horizontal $\widehat{T}$ sobre $\pi^{-1}(U)$, y tomamos la curva integral de $\widehat{T}$, para obtener el levantamiento horizontal de α.

La justificación de la definición de transporte paralelo en $L(M)$ relativo a la conexión H que vamos a dar, la encontramos en la construcción que hemos hecho de una conexión en $L(\mathsf{M})$ a partir de una conexión ∇ en M y del transporte paralelo asociado a ésta. A saber:

Si ∇ es una conexión sobre M, entonces por integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias (ver Sección 5.3, (5.12),(5.14))

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} Y^i \frac{dx^i}{dt} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n)$$

podemos transportar el espacio tangente a lo largo de curvas en M. Si $p \equiv (x; e_1, \dots, e_n) \in L(\mathsf{M})$ (refererencia en x) y α es una curva en M con $\alpha(0) = x$, entonces por transporte paralelo definimos una curva diferenciable

$$t \longmapsto \widehat{\alpha}(t) \equiv \big(\alpha(t); E_1(t), \dots, E_n(t)\big)$$

en $L(\mathsf{M})$, donde cada E_i es el transporte paralelo de $e_i = E_i(0)$ a lo largo de α. Y como se verifica que $\nabla_{\alpha'} E_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ resulta que $\widehat{\alpha}'(t) \in H_{\widehat{\alpha}(t)}$, es decir, $\widehat{\alpha}$ es una curva horizontal.

Lo últimamente expuesto justifica la siguiente definición:

Sea $L_{\alpha(t)} = \pi^{-1}(\alpha(t))$ es la fibra sobre $\alpha(t)$, es decir, el conjunto de todas las referencias lineales de $T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \tau_t : L_{\alpha(0)} & \longrightarrow & L_{\alpha(t)} \\ p & \longmapsto & \tau_t(p) = \widehat{\alpha}(t) \end{array}$$

donde $\widehat{\alpha}$ es el levantamiento horizontal de α, con $\widehat{\alpha}(0) = p$. Decimos que la aplicación τ_t es el **transporte paralelo** a lo largo de α.

Es claro que $\tau_t \circ R_a = R_a \circ \tau_t$, pues $R_a \circ \widehat{\alpha}$ es también un levantamiento horizontal por la condición (2) de H.

Veamos que este desplazamiento paralelo en $L(\mathsf{M})$ pemite definir el transporte paralelo en M.

Toda referencia en un punto $x \in \mathsf{M}$, $p \equiv (x; e_1, \dots, e_n) \in L(\mathsf{M})$, determina un isomorfismo

$$\widetilde{p} \colon \mathbb{R}^n \to T_{\pi(p)}(\mathsf{M}) \qquad \xi \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i.$$

se trata de la aplicación que cada n–upla de números reales le asigna el vector que tiene esos números reales como componentes respecto a la referencia p.

Es fácil demostrar que

$$\widetilde{pa}(\xi) = \widetilde{p}(a\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall a \in GL(n, \mathbb{R}),$$

donde el producto $a\xi$, de una matriz de orden n por un elemento de $\mathbb{R}^n$, es definido de la forma usual.

Si $\alpha : [0,1] \to \mathsf{M}$ es una curva en M y $v \in T_x(\mathsf{M})$, sea $\widehat{\alpha} : [0,1] \to L(\mathsf{M})$ el levantamiento horizontal de α con valor inicial $\widehat{\alpha}(0) = p$. El vector v se expresa de forma única respecto a la referencia p, es decir, existe un único $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\widetilde{p}(\xi) = v$. Definimos entonces el transporte paralelo en M sobre la curva α, como la aplicación (que también denotamos por τ_t)

$$\begin{array}{rcl} \tau_t : T_x(M) & \longrightarrow & T_{\alpha(t)}(M) \\ v & \longmapsto & \tau_t(v) = \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}(\xi) \end{array}$$

esto es, a cada vector $v \in T_x(\mathsf{M})$ de componentes ξ respecto a la referencia p, se le asocia el vector en $T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$ cuyas componentes respecto a la referencia $\widehat{\alpha}(t)$ son ξ.

Para ver que esta aplicación está bien definida, es decir, que no depende del levantamiento horizontal de α tomado, consideremos otra referencia en $T_x(\mathsf{M})$ distinta de p; será de la forma $q = pa$, donde $a \in GL(n, \mathbb{R})$ es la matriz cambio de base. El levantamiento de α partiendo de q será entonces $R_a \circ \widehat{\alpha} \colon [0,1] \to L(\mathsf{M})$. Por lo que

$$v = \widetilde{p}(\xi) = \widetilde{p}\big(a(a^{-1}\xi)\big) = \widetilde{pa}(a^{-1}\xi) = \widetilde{q}(a^{-1}\xi).$$

Así la definición de τ_t con respecto a $R_a \circ \widehat{\alpha}$ da

$$\tau_t(v) = (\widetilde{R_a \circ \widehat{\alpha}})(t)(a^{-1}\xi) = \widetilde{\widehat{\alpha}(t)a}(a^{-1}\xi) = \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}\big(a(a^{-1}\xi)\big) = \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}(\xi).$$

La aplicación $\tau_t\colon T_x(\mathsf{M}) \to T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales. Ya que si tomamos la referencia p de forma que $\widetilde{p}\big((1,0,\ldots,0)\big) = v$ (es decir, p es la referencia con primer vector v), resulta que $\tau_t(v) = \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}\big((1,0,\ldots,0)\big)$; esto es $\tau_t(v)$ es también el primer vector de la referencia $\widehat{\alpha}(t)$ en $T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$. Se ve que $\tau_t\colon T_x(\mathsf{M}) \to T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$ lleva una base de $T_x(\mathsf{M})$ en una base de $T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$.

Ya tenemos, por tanto, definido a partir de una conexión H en $L(M)$ el transporte paralelo en M. Supongamos ahora que H está definida por una derivada covariante ∇ en M, este transporte paralelo dado por H coincide con el que determina ∇.

En efecto, si α es una curva en M, consideremos la curva $\widehat{\alpha}$ en $L(\mathsf{M})$ (levantamiento horizontal) tal que $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$ y $\widehat{\alpha}'(t)$ es horizontal. Por definición de H a partir de ∇, esto significa que para algún $u \in T_x(\mathsf{M}) = T_{\alpha(t)}(\mathsf{M})$, tenemos

$$\widehat{\alpha}'(t) = s_*(u), \quad \text{con} \quad \nabla_u s = 0,$$

de hecho $u = \pi_*\left(s_*(u)\right) = \pi_*\left(\widehat{\alpha}'(t)\right) = \alpha'(t)$. Con lo que $\nabla_{\alpha'(t)} s = 0$. Lo que quiere decir que los campos de vectores que forman el campo de referencias s son paralelos a lo largo de α con respecto a la conexión ∇ original. Por consiguiente, el transporte paralelo definido con respecto a la conexión H es el mismo que el transporte paralelo dado por ∇. Esto implica que las derivadas covariantes son las mismas.

En la Sección 5.3 vimos la siguiente expresión, que define la derivada covariante de campos de vectores en M en función del transporte paralelo:

$$\nabla_{X_x} Y = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\tau_h^{-1}(Y_{\alpha(h)}) - Y_x\right).$$

Distribución horizontal en $T(\mathsf{M})$ determinada por una distribución horizontal en $L(\mathsf{M})$

Expondremos a continuación otra manera de definir la conexión en $T(\mathsf{M})$ a partir de la conexión en $L(\mathsf{M})$.

Supongamos dada una conexión H en $L(\mathsf{M})$, veamos que define una distribución y sólo una $K : v \mapsto K_v$ sobre $T(\mathsf{M})$ tal que

$$T_v(T(\mathsf{M})) = K_v \oplus \mathcal{V}_v \qquad \forall v \in T(\mathsf{M})$$

Para definir K_{v_0} en un punto dado $v_0 \in T(\mathsf{M})$, sea $x_0 = \pi(v_0)$ la proyección sobre M y $p_o \in L_{x_0} \subset L(\mathsf{M})$ una referencia en el punto x_0. Existe un único $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ que representa las componentes de v_0 respecto a p_0, es decir, $\widetilde{p_0}(\xi_0) = v_0$. Fijado ξ_0, determina una aplicación

$$h_{\xi_0}\colon L(\mathsf{M}) \to T(\mathsf{M}) \qquad p \mapsto h_{\xi_0}(p) = \widetilde{p}(\xi_0)$$

esto es, $h_{\xi_0}(p)$ es el vector en $\pi(p)$ con componentes ξ_0 respecto a la referencia p. definimos

$$K_{v_0} = (h_{\xi_0})_* (H_{p_0})$$

Veamos que este subespacio no depende de la elección de p_0 sobre L_{x_0}. En efecto, si q_0 es otra referencia en x_0, $q_0 = p_0 a$ para $a \in GL(n, I\!R)$, existe un único $\eta_0 \in I\!R^n$ tal que $\widetilde{q_0}(\eta_0) = v_0$. Entonces

$$\widetilde{p_0}(\xi_0) = v_0 = \widetilde{q_0}(\eta_0) = \widetilde{p_0 a}(\eta_0) = \widetilde{p_0}(a^{-1}\eta_0) \Rightarrow \eta_0 = a\xi_0,$$

así, para todo p

$$h_{\eta_0}(p) = \widetilde{p}(\eta_0) = \widetilde{p}(a\xi_0) = \widetilde{pa^{-1}}(\xi_0) = h_{\xi_0}(pa^{-1}) = (h_{\xi_0} \circ R_{a^{-1}})(p),$$

luego

$$(h_{\eta_0})_*(H_{q_0}) = (h_{\xi_0} \circ R_{a^{-1}})_*((R_a)_* H_{p_0}) = (h_{\xi_0})_*(H_{p_0}).$$

La aplicación $(h_{\xi_0})_*$ restringida a H_{p_0} es inyectiva. Pues si $Z_{p_0} \in H_{p_0}$ tal que $(h_{\xi_0})_*(Z_{p_0}) = 0$, resulta si denotamos momentáneamente por $\pi_t : T(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ y por $\pi_r : L(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ las respectivas proyecciones canónicas, se tiene entonces $\big((\pi_t)_* \circ (h_{\xi_0})_*\big)(Z_{p_0}) = (\pi_r)_*(Z_{p_0}) = 0$. Es decir que también $Z_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}$. Y como, por la propiedad (1) de H, $\mathcal{V}_{p_0} \cap H_{p_0} = \{0\}$, concluimos que $Z_{p_0} = 0$, de donde la inyectividad.

Luego $\dim K_{v_0} = \dim H_{p_0} = \dim \mathsf{M}$. También se tiene que $\mathcal{V}_{v_0} \cap K_{v_0} = \{0\}$, en efecto, si $Y_{v_0} \in \mathcal{V}_{v_0} \cap K_{v_0}$ se tiene que $(\pi_t)_*(Y_{v_0}) = 0$ y $\exists W_{p_0} \in H_{p_0}$ tal que $(h_{\xi_0})_*(W_{p_0}) = Y_{v_0}$, de donde se deduce que $\big(\pi_t \circ h_{\xi_0}\big)_*(W_{p_0}) = (\pi_r)_*(W_{p_0}) = 0$; así $W_{p_0} \in H_{p_0} \cap \mathcal{V}_{p_0}$, por lo que tiene que ser $W_{p_0} = 0$ y, por tanto, $(h_{\xi_0})_*(W_{p_0}) = Y_{v_0} = 0$. Concluimos que

$$T_{v_0}(T(\mathsf{M})) = K_{v_0} \oplus \mathcal{V}_{v_0}$$

Demostremos ahora que

$$\lambda_*(K_{v_0}) = K_{\lambda v_0}, \qquad \forall \lambda \in I\!R - \{0\}$$

En virtud de la definición del subespacio K_{v_0}, esto es equivalente a establecer que $\lambda \circ h_{\xi_0} = h_{\lambda\xi_0}$, pero $(\lambda \circ h_{\xi_0})(p) = \lambda\widetilde{p}(\xi_0) = \widetilde{p}(\lambda\xi_0) = h_{\xi_0}(p)$.

Finalmente, la distribución $K : v \mapsto K_v$ es diferencible, ya que está generada por los campos de vectores diferenciables inducidos por los campos que gereran la distribución diferenciable $H : p \mapsto H_p$ en $L(\mathsf{M})$.

Concluimos que dada una conexión en $L(\mathsf{M})$ por una distribución $H : p \mapsto H_p$, ella determina una única conexión en $T(\mathsf{M})$, dada por la distribución $K : v \mapsto K_v$.

Formas de conexión en $L(\mathsf{M})$

Existe una interpretación de conexión en $L(\mathsf{M})$ en términos de formas diferenciales globales, que vamos a esbozar a continuación.

Necesitamos primeramente establecer el siguiente resultado:

Si el fibrado de referencias lineales $L(\mathsf{M})$ sobre una variedad M tiene una conexión H, entonces es paralelizable; es decir, existen $n+n^2$ campos de vectores diferenciables sobre $L(\mathsf{M})$ que forman en cada punto una base de su espacio tangente.

Para definir tales campos de vectores empezaremos defininiendo n^2 campos de vectores verticales (para lo cual no se necesita conexión alguna sobre $L(\mathsf{M})$) de la forma siguiente:

Definimos lo que vamos a llamar campos de vectores fundamentales sobre $L(\mathsf{M})$, a través de la aplicación

$$\sigma\colon \mathfrak{gl}(n, I\!R) \to \mathfrak{X}(L(\mathsf{M})) \qquad A \mapsto \sigma(A) = A^*.$$

Para definir el campo de vectores A^*, identificamos $\mathfrak{gl}(n, I\!R) \equiv T_e(GL(n, I\!R))$, ya que $GL(n, I\!R)$ es una subvariedad abierta del conjunto de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales $\mathfrak{gl}(n, I\!R)$.

Un elemento $A \in \mathfrak{gl}(n, I\!R)$ se interpreta como un campo de vectores en $GL(n, I\!R)$, cuyo representante en cada punto $a \in GL(n, I\!R)$ es $(L_a)_*(A)$, que es la imagen de $A \in T_e(GL(n, I\!R))$ mediante la aplicación inducida de $L_a : GL(n, I\!R) \to GL(n, I\!R)$, $b \mapsto L_a(b) = ab$ (traslación a la izquierda en el grupo $GL(n, I\!R)$).

Sea la curva integral de A en $GL(n, I\!R)$ pasando por el elemento unidad e:

$$\alpha\colon I\!R \to GL(n, I\!R), \qquad \alpha(t) = \exp tA.$$

Esto permite definir en $L(\mathsf{M})$ un grupo uniparamétrico de transformaciones

$$\psi\colon I\!R \times L(M) \to L(\mathsf{M}) \qquad (t, p) \mapsto p \exp tA.$$

Su correspondiente campo de vectores asociado va a ser, por definición, $\sigma(A) = A^*$ y recibe el nombre de campo de vectores fundamental. Su representante en cada punto $p \in L(\mathsf{M})$ es el vector tangente a la curva $t \mapsto p \exp tA$ en $t = 0$. Como estas curvas, para cada p, quedan siempre en la fibra $\pi^{-1}(p)$, resulta que el campo A^* es vertical.

La $\sigma\colon \mathfrak{gl}(n, I\!R) \to \mathfrak{X}(L(\mathsf{M})$, así definida es un homomorfismo de álgebra inyectivo. En efecto:

Observemos que $A_p^* = (\phi_p)_*(A_e)$ siendo ϕ_p la aplicación definida en la página 165 de este Tema, con lo que se tiene la linealidad de σ.

Demostremos que σ conserva el corchete. Primeramente, demostremos que si $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $(R_a)_* A^*_{pa^{-1}} = (a^{-1}Aa)^*_p$. Esto es así, pues basta observar que $R_a \circ \phi_{pa^{-1}} = \phi_p \circ j_{a^{-1}}$, siendo

$$R_a \colon L(\mathsf{M}) \to L(\mathsf{M}) \qquad \phi_p \colon GL(n, \mathbb{R}) \to L(\mathsf{M}) \qquad j_a \colon GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$$

$$p \longmapsto pa \qquad\qquad b \longmapsto pb \qquad\qquad b \longmapsto aba^{-1}$$

Tomando aplicaciones inducidas en el elemento neutro $e \in GL(n, \mathbb{R})$

$$(R_a)_*(A^*_{pa^{-1}}) = (R_a \circ \phi_{pa^{-1}})_*(A) = (\phi_p \circ j_{a^{-1}})_*(A) = (a^{-1}Aa)^*_p.$$

Si $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ se tiene

$$[A^*, B^*] = \mathfrak{L}_{A^*} B^* = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_{\exp -tA})_* B^* - B^*}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(R_{(\exp tA)^{-1}})_* B^* - B^*}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left((\exp tA) B (\exp tA)^{-1}\right)^* - B^*}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{(\exp tA) B (\exp tA)^{-1} - B}{t} \right)^* = \left(\lim_{t \to 0} \frac{(j_{\exp tA})_* B - B}{t} \right)^* =$$

$$= \left(\lim_{t \to 0} \frac{(R_{(\exp tA)^{-1}} \circ L_{\exp tA})_* B - B}{t} \right)^* = \left(\lim_{t \to 0} \frac{(R_{(\exp tA)^{-1}})_* B - B}{t} \right)^* = [A, B]^*.$$

Finalmente, para probar la inyectividad, supongamos que $A^*_p = 0$, entonces la curva $t \mapsto p \exp tA$ se reduce al punto p, es decir, $p \exp tA = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$, luego $\exp tA = e$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Con lo que $A = 0$.

Si ahora tomamos la base canónica $\{E_i^j\}_{i,j=1,\ldots,n}$ en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, donde cada E_i^j es la matriz con coeficientes nulos, excepto el que ocupa la entrada (i, j), que vale 1. Los correspondientes campos de vectores fundamentales $(E_i^j)^*$ forman un conjunto de n^2 campos de vectores independientes definidos globalmente en $L(\mathsf{M})$.

Tratamos ahora de buscar los n campos de vectores que nos faltan. Ahora sí necesitamos utilizar la conexión H dada en $L(\mathsf{M})$. Definimos la siguiente aplicación

$$B \colon \mathbb{R}^n \to \mathfrak{X}(L(\mathsf{M})) \qquad \xi \mapsto B(\xi)$$

siendo $B(\xi)_p = \widehat{\widetilde{p}(\xi)}$; es decir, el único vector horizontal en $T_p(L(M))$ que se proyecta sobre el vector $\widetilde{p}(\xi) \in T_{\pi(p)}(\mathsf{M})$, vector en $x = \pi(p)$ que tiene componentes ξ respecto a la referencia $p \equiv (x; v_1, \ldots, v_n)$: $\widetilde{p}(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i v_i$.

Si $\xi \neq 0$, entonces $B(\xi)_p \neq 0$, $\forall p \in L(\mathsf{M})$. Pues si $B(\xi)_p = 0$, para algún p, entonces $\widetilde{p}(\xi) = \pi_*\big(B(\xi)_p\big) = 0$; y como $\widetilde{p} \colon \mathbb{R}^n \to T_{\pi(p)}(\mathsf{M})$ es un isomorfismo lineal, resulta $\xi = 0$.

Los campos de vectores horizontales $\{B_1, \ldots, B_n\}$ correspondientes a la base natural $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $I\!R^n$, son pues linealmente independientes.

Concluimos entonces, dada una conexión H en $L(\mathsf{M})$ y puesto que $\{B_k\}_{k=1,\ldots,n}$ son horizontales y los $\{(E_i^j)^*\}_{i,j=1,\ldots,n}$ son verticales, que $\{B_k, (E_i^j)^*\}_{i,j,k=1,\ldots,n}$ son linealmente independientes en todo punto $p \in L(\mathsf{M})$.

Ya estamos en condiciones de poder dar una definición de conexión en $L(\mathsf{M})$ en términos de 1–formas diferenciables. Consideremos la base dual $\{\theta^k, \omega_j^i\}$ de $\{B^k, (E_i^j)^*\}$ en el sentido que

$$\theta^k(B_i) = \delta_i^k \qquad \theta^k((E_i^j)^*) = 0$$

$$\omega_\ell^k(B_i) = 0 \qquad \omega_\ell^k((E_i^j)^*) = \delta_i^k \delta_\ell^j.$$

Si $Z \in \mathfrak{X}(L(\mathsf{M}))$, se descompone en forma única, por la propiedad (1) de H en la suma de un campo vertical y otro horizontal, $Z = \mathsf{v}Z + \mathsf{h}Z$, entonces $\mathsf{v}Z = \sum_{i,j=1}^n \omega_j^i(Z)(E_i^j)^*$. Así dada una conexión H en $L(\mathsf{M})$ podemos definir la proyección vertical de campos de vectores y por tanto conocer las ω_j^i sobre cualquier campo de vectores sobre $L(\mathsf{M})$. A las 1–formas ω_j^i se les denomina **1–formas de conexión**, y se tiene el siguiente resultado:

1') $\omega_\ell^k((E_i^j)^*) = \delta_i^k \delta_\ell^j. \qquad (\omega_\ell^k(A^*) = A_\ell^k, \;\; \forall A \in \mathfrak{gl}(n, I\!R))$

2') $\omega_j^i\left((R_a)_* Z\right) = \sum_{k,\ell=1}^n (a^{-1})_j^\ell \omega_\ell^k(Z) a_k^i \quad \forall Z \in T_p(L(\mathsf{M})), \forall a \in GL(n, I\!R).$

3') ω_j^i son diferenciables.

Este resultado nos permite dar otra definición de conexión en $L(\mathsf{M})$, en la manera siguiente:

Dar una **conexión** en el fibrado de las referencias lineales $L(M)$ consiste en n^2 1–formas ω_j^i, cumpliendo las tres propiedades 1'), 2') y 3') anteriores.

Para probar (2') es suficiente verificarla para vectores verticales, es decir, de la forma $A_p^* = \sigma(A)$, $A \in \mathfrak{gl}(n, I\!R)$. Esto es, $\omega_j^i\left((R_a)_* A_{pa^{-1}}^*\right) = \sum_{k,\ell=1}^n (a^{-1})_j^\ell \omega_\ell^k(A_p^*) a_k^i$.

Como $(R_a)_* A_{pa^{-1}}^* = (a^{-1}Aa)_p^*$ (página 173), se sigue que

$$\omega_j^i\left((R_a)_*(A_{pa^{-1}}^*)\right) = \omega_j^i\left((a^{-1}Aa)_p^*\right) = (a^{-1}Aa)_j^i =$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^n (a^{-1})_j^\ell A_\ell^k a_k^i = \sum_{k,\ell=1}^n (a^{-1})_j^\ell \omega_\ell^k(A_p^*) a_k^i.$$

3') Las ω^i_j son diferenciables. Como los campos de vectores verticales y horizontales generan el conjunto de todos los campos de vectores sobre $L(M)$ (página 172) sólo basta ver que las ω^i_j aplicadas a campos de verticales y horizontales dan funciones diferenciables.

Para campos de vectores horizontales es claro, por ser ω^i_j nulas sobre ellos, y también para campos de vectores verticales, pues basta tomar campos de la forma $\sigma(A) = A^*$.

Veamos ahora que si tenemos una conexión en $L(\mathsf{M})$ definida por n^2 1–formas de conexión, verificando:

1') $\omega^k_\ell(A^*) = A^k_\ell, \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

2') $\omega^i_j\left((R_a)_* Z\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} (a^{-1})^\ell_j \omega^k_\ell(Z) a^i_k \quad \forall Z \in T_p(L(\mathsf{M})), \forall a \in GL(n, \mathbb{R})$.

3') ω^i_j son diferenciables.

podemos definir la conexión en $L(\mathsf{M})$ en términos de la distribución $H : p \longmapsto H_p$, verificando:

1) $T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$
2) $(R_a)_*(H_p) = H_{pa}$
3) $H : p \longmapsto H_p$ es una distribución diferenciable.

Para ello definimos

$$H_p = \left\{Z_p \in T_p(L(\mathsf{M}))\big/\omega^i_j(Z_p) = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\right\}$$

1) Si $Z_p \in \mathcal{V}_p$, entonces $\omega^i_j(Z_p) \neq 0$, para algún $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, así pues $Z_p \notin H_p$,. Por consiguiente, $\mathcal{V}_p \cap H_p = \{0\}$.

Si $Z_p \in T_p(L(\mathsf{M}))$ es un vector cualquiera, sea $A^i_j = \omega^i_j(Z_p)$. Entonces, si $A = (A^i_j)$, se tiene $\omega^i_j(A^*_p) = A^i_j$. Por consiguiente, poniendo, $W_p = Z_p - A^*_p$, resulta

$$\omega^i_j(W_p) = \omega^i_j(Z_p) - \omega^i_j(A^*_p) = 0.$$

con lo que $Z_p = A^*_p + W_p$ con $A^*_p \in \mathcal{V}_p$ y $W_P \in H_p$, concluimos que

$$T_p(L(\mathsf{M})) = \mathcal{V}_p \oplus H_p.$$

2) Si $Z_p \in H_p$, resulta $\omega^i_j\left((R_a)_*(Z_p)\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} (a^{-1})^\ell_j \omega^k_\ell(Z_p) a^i_k = 0$, lo que quiere decir que $(R_a)_*(Z_p) \in H_{pa}$; así pues

$$(R_a)_* H_p = H_{pa}.$$

3) Para probar que $H : p \longmapsto H_p$ s diferenciable, sean $Z_1, \ldots, Z_{n+n^2}$ campos de vectores que generan $T_p(L(\mathsf{M}))$ para todo q en un entorno de p, y $\{E_i^j\}_{i,j=1,\ldots,n}$ base de $\mathfrak{gl}(n, I\!R)$, pongamos

$$\overline{Z}_i = Z_i - \omega_j^i(Z_i)(E_j^\ell)^*.$$

Los campos de vectores $\overline{Z}_i$ son claramente horizontales y generan la distribución H en un entorno de p.

Torsión y curvatura en $L(\mathsf{M})$

Vamos a introducir ahora los conceptos de torsión y curvatura en términos de la conexión en $L(\mathsf{M})$.

Consideremos las 1–formas θ^i sobre $L(\mathsf{M})$, definidas en la página 174, denominadas formas canónicas sobre $L(\mathsf{M})$, y que verifican:

$$\widetilde{p}^{-1}(\pi_* X_p) = \sum_{i=1}^{n} \theta_p^i(X_p) e_i,$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica en $I\!R^n$.

Si tenemos una conexión H en $L(\mathsf{M})$ y si ω_j^i son sus 1–formas de conexión, definimos las 1–formas de torsión Θ^i y de curvatura Ω_j^i por

$$\Theta^i(X_p, Y_p) = (d\theta^i)(\mathsf{h}X_p, \mathsf{h}Y_p)$$

$$\Omega_j^i(X_p, Y_p) = (d\omega_j^i)(\mathsf{h}X_p, \mathsf{h}Y_p)$$

Se tiene entonces las ecuaciones de estructura:

$$d\theta^i + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \wedge \theta^k = \Theta^i$$

$$d\omega_j^i + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \Omega_j^i$$

Para establecer estas ecuaciones, nos bastará demostrar que para dos campos de vectores cualesquiera X e Y sobre $L(\mathsf{M})$, se tiene

$$d\theta^i(X,Y) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(\omega_k^i(X)\theta_j^k(Y) - \omega_k^i(Y)\theta^k(X)\big) = \Theta^i(X,Y)$$

$$d\omega_j^i(X,Y) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(\omega_k^i(X)\omega_j^k(Y) - \omega_k^i(Y)\omega_j^k(X)\big) = \Omega_j^i(X,Y)$$

Como $\mathfrak{X}(L(\mathsf{M}))$ está localmente generado por los campos de vectores básicos y fundamentales (página 172), es suficiente verificar ésta fórmulas para estos campos particulares.

La primera ecuación la verificaremos considerando los tres casos siguientes:

1. $X = A^*, Y = B^*$. Entonces, como θ^i es nula sobre campos de vectores verticales

$$2d\theta^i(A^*, B^*) = A^*(\theta^i(B^*)) - B^*(\theta^i(A^*)) - \theta^i([A^*, B^*]) = -\theta^i([A, B]^*) = 0,$$

los restantes sumandos del primer miembro son igualmente nulos. Y en lo que respecta al segundo miembro, tenemos

$$\Theta^i(A^*, B^*) = d\theta^i(\mathsf{h}A^*, \mathsf{h}B^*) = d\theta^i(0, 0) = 0.$$

2. $X = A^*, Y = B(\xi)$. Necesitamos establecer primero que $[A^*, B(\xi)] = B(A\xi)$, en efecto

$$[A^*, B(\xi)] = \mathfrak{L}_{A^*} B(\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{(R_{exptA)^{-1}})_* B(\xi) - B(\xi)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{B((exptA)\xi) - B(\xi)}{t} = B\left(\lim_{t\to 0} \frac{(exptA)\xi - \xi}{t}\right) = B(A\xi).$$

Utilizando este hecho, los diferenteres sumando de la fórmula quedan

$$2d\theta^i(A^*, B(\xi)) = A^*\theta^i(B(\xi)) - B(\xi)\theta^i(A^*) - \theta^i([A^*, B(\xi)]) =$$

$$= A^*(\xi^i) - B(\xi)(0) - \theta^i(B(A\xi)) = -(A\xi)^i = -\sum_{k=1}^{n} A^i_k \xi^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\omega^i_k(A^*)\theta^k(B(\xi)) - \omega^i_k(B(\xi))\theta^k(A^*)\right) = \sum_{k=1}^{n} A^i_k \xi^k$$

$$\Theta^i(A^*, B(\xi)) = d\theta^i(\mathsf{h}A^*, \mathsf{h}B(\xi)) = d\theta^i(0, B(\xi)) = 0$$

3. Finálmente, en caso de que $X = B(\xi), Y = B(\eta)$, como las ω^i_j son nulas sobre campos horizontales, del primer miembro sólo queda $d\theta^i(B(\xi), B(\eta))$, pero

$$d\theta^i(B(\xi), B(\eta)) = d\theta^i(\mathsf{h}B(\xi), \mathsf{h}B(\eta)) = \Theta^i(B(\xi), B(\eta)).$$

Para la segunda fórmula y análogamente a la demostración de la primera, es suficiente considerar los tres casos siguientes:

1. $X_p, Y_p \in H_p$. En este caso la forma es inmediata pues $\omega^i_j(X_p) = \omega^i_j(Y_p) = 0$, y $\mathsf{h}X_p = X_p, \mathsf{h}Y_p = Y_p$.

2. $X_p, Y_p \in \mathcal{V}_p$. Existen $A, B \in \mathfrak{gl}(n, I\!R)$ tales que $A^*_p = X_p, B^*_p = Y_p$, y se tiene

$$2d\omega^i_j(A^*_p, B^*_p) = A^*_p\omega^i_j(B^*) - B^*_p\omega^i_j(A^*) - \omega^i_j([A^*, B^*]_p) = -\omega^i_j([A, B]^*_p)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\omega_k^i(A_p^*)\omega_j^k(B_p^*)-\omega_k^i(B_p^*)\omega_j^k(A_p^*)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^iB_j^k-B_k^iA_j^k\right)=$$
$$=(AB-BA)_j^i=[A,B]_j^i=\omega_j^i([A,B]_p^*)$$
$$\Omega_j^i(X,Y)=\Omega_j^i(A_p^*,B_p^*)=d\omega_j^i(\mathsf{h}A_p^*,\mathsf{h}B_p^*)=0.$$

3. $X_p\in\mathcal{V}_p, Y_p\in H_p$. Sea Y un campo de vectores horizontal prolongación de Y_p y $\xi\in I\!R^n$ tal que $B(\xi)_p=Y_p$. Por otro lado existe $A\in\mathfrak{gl}(n,I\!R)$ tal que $A_p^*=X_p$. Así:

$$2d\omega_j^i(X_p,Y_p)=A_p^*\omega_j^i(Y)-Y_p\omega_j^i(A^*)-\omega_j^i([A^*,Y]_p)=-\omega_j^i(B(A\xi)_p)=0,$$

los restantes sumandos del primer término son todos nulos. Y en cuanto al segundo término, tenemos:

$$\Omega_j^i(X_p,Y_p)=d\omega_j^i(\mathsf{h}X_p,\mathsf{h}Y_p)=d\omega_j^i(0,Y_p)=0.$$

Queda así probada la 2ª ecuación de estructura.

Vamos ahora a relacionar las formas de torsión Θ^i y las formas de curvatura Ω_j^i con los tensores torsión y curvatura relativos al conexión de Koszul ∇ en M determinada por las formas de conexión ω_j^i sobre $L(\mathsf{M})$.

Definimos en M el campo de tensores torsión (o simplemente **torsión**) T y el campo de tensores curvatura (o simplemente **curvatura**) R, poniendo:

$$T(X_x,Y_x)=2\sum_{i=1}^{n}\Theta^i(\overline{X}_p,\overline{Y}_p)u_i$$

$$R(X_x,Y_x)Z_x=2\widetilde{p}\left(\left(\Omega_j^i(\overline{X}_p,\overline{Y}_p)\right)\left(\widetilde{p}^{-1}(Z_x)\right)\right)$$

donde $X_x,Y_x,Z_x\in T_x(\mathsf{M})$, $p=(x;u_1,\ldots,u_n)$ referencia en x, $\overline{X}_p,\overline{Y}_p\in T_p(L(\mathsf{M}))$ tales que $\pi_*(\overline{X}_p)=X_x,\pi_*(\overline{Y}_p)=Y_x$, y la matriz $\Omega_j^i(\overline{X}_p,\overline{Y}_p)\in\mathfrak{gl}(n,I\!R)$ actua sobre $\widetilde{p}^{-1}(Z_x)\in I\!R^n$ de la manera usual.

Estas definiciones no depende de la elección de p, $\overline{X}_p$ e $\overline{Y}_p$. En efecto,

Si reemplazamos $\overline{X}_p$ por $\overline{\overline{X}}_p$, tal que $\pi_*(\overline{\overline{X}}_p)=X_x$, entonces $\overline{X}_p-\overline{\overline{X}}_p$ es vertical, así

$$\Theta^i(\overline{X}_p-\overline{\overline{X}}_p,\overline{Y}_p)=d\theta^i(\mathsf{h}(\overline{X}_p-\overline{\overline{X}}_p),\mathsf{h}\overline{Y}_p)=d\theta^i(0,\mathsf{h}\overline{Y}_p)=0;$$

similarmente, $\overline{Y_p}$ puede ser reemplazado por $\overline{\overline{Y}}_p$ con $\pi_*(\overline{\overline{Y}}_p)=Y_x$, sin que cambie el valor de $T(X_x,Y_x)$.

Si cambiamos p por $q=pa$ ($a\in GL(n,I\!R)$), podemos elegir $(R_a)_*(\overline{X}_p)$ y $(R_a)_*(\overline{Y}_p)$ como nuevos vectores en $T_q(L(\mathsf{M}))$ que se proyectan en X_x e Y_x, respectivamente, y tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \Theta^i \left((R_a)_*\overline{X}_p, (R_a)_*\overline{Y}_p\right) \widetilde{q}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} d\theta^i \left(\mathsf{h}(R_a)_*\overline{X}_p, \mathsf{h}(R_a)_*\overline{Y}_p\right) \widetilde{pa}(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(R_a^*(d\theta^i)\right)(\mathsf{h}\overline{X}_p, \mathsf{h}\overline{Y}_p)\widetilde{p}(a^{-1}e_i) = \sum_{i=1}^{n} d(R_a^*\theta^i)(\mathsf{h}\overline{X}_p, \mathsf{h}\overline{Y}_p)\widetilde{p}\left(\sum_{j=1}^{n}(a^{-1})^j_i e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d\left(\sum_{k=1}^{n} a^i_k\theta^k\right)(\mathsf{h}\overline{X}_p, \mathsf{h}\overline{Y}_p)\widetilde{p}\left(\sum_{j=1}^{n}(a^{-1})^j_i e_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} a^i_k(d\theta^k)(\mathsf{h}\overline{X}_p, \mathsf{h}\overline{Y}_p)(a^{-1})^j_i\widetilde{p}(e_j) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \delta^j_k(d\theta^k)(\mathsf{h}\overline{X}_p, \mathsf{h}\overline{Y}_p)\widetilde{p}(e_j) = \sum_{j=1}^{n}(d\theta^j)(\mathsf{h}\overline{X}_p, \mathsf{h}\overline{Y}_p)\widetilde{p}(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\Theta^j)(\overline{X}_p, \overline{Y}_p)\widetilde{p}(e_j).$$

A lo largo de estas igualdades hemos hecho la sustitución $R_a^*\theta^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j\theta^j$. Esto es así pues de

$$\pi_*(W_p) = \sum_{i=1}^{n} \theta^i(W_p)\widetilde{p}(e_i) \qquad \pi_*\left((R_a)_*W_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \theta^i\left((R_a)_*W_p\right)\widetilde{pa}(e_i),$$

resulta, al ser $\pi_*\left((R_a)_*W_p\right) = \pi_*(W_p)$, que

$$\sum_{i=1}^{n} \theta^i(W_p)\widetilde{p}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \theta^i\left((R_a)_*W_p\right)\widetilde{p}(a^{-1}e_i),$$

es decir

$$\sum_{j=1}^{n} \theta^j(W_p)e_j = \sum_{i=1}^{n} \theta^i\left((R_a)_*W_p\right)(a^{-1})^j_i e_j,$$

de donde

$$(R_a^*\theta^i)(Z_p) = \sum_{j=1}^{n} a^i_j\theta^j(Z_p).$$

Similarmente, para la curvatura vemos que la definición no depende de la elección de $\overline{X}_p$ e $\overline{Y}_p$. Además si cambiamos p por $q = pa$, resulta:

$$\widetilde{q}\big(\left(\Omega^i_j((R_a)_*\overline{X}_p, (R_a)_*\overline{Y}_p)\right)\left(\widetilde{q}^{-1}(Z_x)\right)\big) = \widetilde{pa}\big(\left(a^{-1}\Omega^i_j(\overline{X}_p, \overline{Y}_p)a\right)\left(\widetilde{pa}^{-1}(Z_x)\right)\big) =$$

$$= \widetilde{p}\big(\left(\Omega^i_j(\overline{X}_p, \overline{Y}_p)\right) \left(\widetilde{p}^{-1}(Z_x)\right) \big).$$

Veamos que estos tensores T y R definidos aquí coinciden con los definidos ya para una conexión ∇ en M. Es decir, se tiene, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{5.19}$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{5.20}$$

Para la demostración de estas relaciones tenemos que establecer previamente el siguiente resultado:

$$\left(\nabla_X Y\right)(x) = \sum_{i=1}^n \widehat{X}_p \left(\theta^i(\widehat{Y})\right) u_i \tag{5.21}$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $\widehat{X}, \widehat{Y}$ son levantamientos horizontales a $L(\mathsf{M})$, θ^i las 1–formas canónicas en $L(\mathsf{M})$ y $p = (x; u_1, \ldots, u_n)$ una referencia en x.

Para establecer esta fórmula, sea α una curva en M con $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = X_x$, y sea $\widehat{\alpha}$ el levantamiento horizontal de α a $L(\mathsf{M})$ con $\widehat{\alpha}(0) = p$ y tal que $\widehat{\alpha}'(0) = \widehat{X}_p$. Recordando la definición del transporte paralelo, escogiendo $\xi \in I\!R^n$ tal que

$$\widetilde{\widehat{\alpha}(t)}(\xi) = Y_{\alpha(t)} \qquad \text{ó} \qquad \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}^{-1}(Y_{\alpha(t)}) = \xi$$

tenemos

$$\tau_t^{-1}(Y_{\alpha(t)}) = \widetilde{\widehat{\alpha}(0)}(\xi) = \widetilde{p}(\xi).$$

Consecuentemente,

$$\left(\widetilde{p} \circ \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}^{-1}\right)\left(Y_{\alpha(t)}\right) = \widetilde{p}(\xi) = \tau_t^{-1}\left(Y_{\alpha(t)}\right).$$

Luego tenemos

$$\left(\nabla_X Y\right)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_x\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\widetilde{p} \circ \widetilde{\widehat{\alpha}(t)}^{-1})(Y_{\alpha(t)}) - (\widetilde{p} \circ \widetilde{p}^{-1})(Y_x)\right) =$$

$$= \widetilde{p}\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\widetilde{\widehat{\alpha}(t)}^{-1}\left(Y_{\alpha(t)}\right) - \widetilde{p}^{-1}(Y_x)\right)\right) =$$

$$= \widetilde{p}\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\sum_{i=1}^n \theta^i(\widehat{Y}_{\alpha(t)})e_i - \sum_{i=1}^n \theta^i(\widehat{Y}_p)e_i\Big)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\theta^i(\widehat{Y})(\widehat{\alpha}(t)) - \theta^i(\widehat{Y})(p) \right) \right) u_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{X}_p \left(\theta^i(\widehat{Y}) \right) u_i.$$

Con lo que queda demostrada la fórmula (5.21)

Para el tensor torsión tenemos entonces:

$$T(X_x, Y_x) = 2 \sum_{i=1}^{n} \Theta^i(\widehat{Y}_p, \widehat{Y}_p) u_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{X}_p(\theta^i(\widehat{Y})) - \widehat{Y}_p(\theta^i(\widehat{X})) - \theta^i([\widehat{X}, \widehat{Y}]_p) \right) u_i = (\nabla_X Y)(x) - (\nabla_Y X)(x) - [X, Y](x)$$

ya que $\pi_*([\widehat{X}, \widehat{Y}]_p) = [X, Y]_x$.

Para probar la segunda igualdad (5.20), relativa al tensor curvatura, la 2ª ecuación de estructura da

$$2\Omega^i_j(\widehat{X}_p, \widehat{Y}_p) = 2d\omega^i_j(\widehat{X}_p, \widehat{Y}_p) = \widehat{X}_p(\omega^i_j(\widehat{Y})) - \widehat{Y}_p(\omega^i_j(\widehat{X})) - \omega^i_j([\widehat{X}, \widehat{Y}]_p) = -\omega^i_j([\widehat{X}, \widehat{Y}]_p).$$

Si ponemos la componente vertical de $[\widehat{X}, \widehat{Y}]$ igual a

$$\mathsf{v}[\widehat{X}, \widehat{Y}]_p = A^*_p \qquad A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}),$$

entonces obtenemos

$$2\Omega^i_j(\widehat{X}_p, \widehat{Y}_p) = -A^i_j$$

así, resulta por una parte que

$$R(X_p, Y_p) Z_p = \widetilde{p} \left(2\omega^i_j(\widehat{X}_p, \widehat{Y}_p)(\widetilde{p}^{-1} Z_x) \right) = \widetilde{p} \left(-A^i_j \theta^j(\widehat{Z}_p) e_i \right) = -A^i_j \theta^j(\widehat{Z}_p) u_i.$$

Por otro lado utilizando las tres relaciones siguientes

$$\nabla_{Y_x} Z = \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_p \left(\theta^i(\widehat{Z}) \right) u_i$$

$$\nabla_{X_x} (\nabla_X Y) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{X}_p \left(\theta^i(\widehat{\nabla_X Z}) \right) u_i$$

$$\theta^i_p \left(\widehat{\nabla_X Z} \right) = \theta^i_p \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{Y}_p(\theta^j(\widehat{Z})) \widehat{u}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{Y}_p \left(\theta^j(\widehat{Z}) \right) \theta^i_p(\widehat{u}_j) = \widehat{Y}_p \left(\theta^i(\widehat{Z}) \right) \delta^i_j,$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{X_x}\nabla_Y Z - \nabla_{Y_x}\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_x} Z = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{X}_p \left(\widehat{Y}(\theta^i(\widehat{Z})) \right) - \widehat{Y}_p \left(\widehat{X}(\theta^i(\widehat{Z})) \right) - \mathsf{h}[\widehat{X},\widehat{Y}]_p(\theta^i(\widehat{Z})) \right) u_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left([\widehat{X},\widehat{Y}]_p(\theta^i(\widehat{Z})) - \mathsf{h}[\widehat{X},\widehat{Y}]_p(\theta^i(\widehat{Z})) \right) u_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{v}[\widehat{X},\widehat{Y}]_p(\theta^i(\widehat{Z})) u_i = \sum_{i=1}^{n} A^*_p(\theta^i(\widehat{Z}) u_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\theta^i(\widehat{Z})(p \exp tA) - \theta^i(\widehat{Z})(p) \right) \right) u_i = \\
&= \widetilde{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\theta^i_{p \exp tA}(\widehat{Z}_p) - \theta^i_p(\widehat{Z}) \right) e_i \right) = \\
&= \widetilde{p} \left(\sum_{i,j=1}^{n} -A^j_i \theta^i_p(\widehat{Z}_p) e_j = - \sum_{i,j=1}^{n} A^j_i \theta^i_p(\widehat{Z}) \right) u_j.
\end{aligned}
$$

Formas de conexión en $L(\mathsf{M})$ definidas por Γ^k_{ij}

Veamos finalmente como dadas las componentes de una conexión lineal Γ^k_{ij} definen una conexión en el fibrado $L(\mathsf{M})$ de referencias lineales sobre M.

Para es fin consideremos las coordenadas locales en $L(\mathsf{M})$ inducidas por las coordenadas locales en M. Sea $(U,(x^1,\dots,x^n))$ un sistema coordenado en M. Todo elemento $p = (x; u_1, \dots, u_n) \in L(\mathsf{M})$, que es una referencioa en $x = \pi(p)$, puede expresarse por

$$
p = \left(x; \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}^k_1(p) \frac{\partial}{\partial x^k}_{|x}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}^k_n(p) \frac{\partial}{\partial x^k}_{|x} \right).
$$

Si Γ^k_{ij} son los coeficientes de la conexión en U, definimos las 1–formas de conexión ω^i_j en $\pi^{-1}(U) \subset L(\mathsf{M})$ por

$$
\omega^i_j = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{y}^i_k \left(d\widetilde{x}^k_j + \sum_{h,\ell=1}^{n} (\Gamma^k_{h\ell} \circ \pi) \widetilde{x}^\ell_j d\widetilde{x}^h \right) \tag{5.22}
$$

donde, en cada p, la matriz no singular $(\widetilde{x}^i_j(p))$ tiene matriz inversa, que denotamos por $(\widetilde{y}^i_j(p)) = (\widetilde{x}^i_j(p))^{-1}$.

Cada una de las ω^i_j es una 1–forma sobre $L(\mathsf{M})$ determinada independientemente de la elección de coordenadas, las cuales definen una conexión en $L(\mathsf{M})$.

Resumen de conexiones lineales

Hemos definido una conexión lineal en una variedad M de varias formas equivalentes, que resumimos a continuación:

$\boxed{1}$ *Definición axiomática (Koszul).* Mediante un operador
$\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $\quad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, verificando

A_1.– $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ $\qquad$ A_3.– $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
A_2.– $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ $\qquad$ A_4.– $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

donde $f, g \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ (funciones diferenciables).

$\boxed{2}$ *Definición clásica.* Dando los coeficientes Γ^k_{ij} en cada entorno coordenado $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ en M.

Los cuales están sujetos a la ley de transformación (5.5), en la intersección con otro entorno coordenado $(\overline{U}, (\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n))$:

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^\delta \partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k}.$$

En vez de los coeficientes Γ^k_{ij}, podemos dar las conexión por 1–formas θ^i_j definidas en cada entorno coordenado U, por

$$\theta^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \Gamma^i_{kj},$$

enfoque conocido como de Cartan (ver pág. 147).

$\boxed{3}$ *Definición por transporte paralelo.* Dando un isomorfismo τ_{xy} entre los espacios tangentes en $T_x(\mathsf{M})$ y $T_y(\mathsf{M})$ que depende sólo de los puntos x e y y de la curva τ que les une verificando:

1. $\tau_{xy} = \tau_{zy} \circ \tau_{xz}$, para z un punto en τ entre x e y.

2. $\tau_{yx} = \tau_{xy}^{-1}$.

Verificando además que, si $\omega_t = -\dot{A}_t A_t^{-1}$, donde A_t es la matriz asociada a $\tau_t \colon T_x(\mathsf{M}) \to T_y(\mathsf{M})$ respecto a base fijadas, $\omega_t(x, \dot{x})$ es lineal en $\dot{x}$.

$\boxed{4}$ *Definición mediante una distribución horizontal en* $T(\mathsf{M})$. Dando en cada v del fibrado tangente $T(\mathsf{M})$ un subespacio H_v complementario del tangente a las fibras, verificándose

1) $T_v(T(\mathsf{M})) = H_v \oplus \mathcal{V}_v$
2) $\lambda(H_v) = H_{\lambda v} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$
3) $H : v \mapsto H_v$ es diferenciable.

$\boxed{5}$ *Definición mediante una distribución horizontal en* $L(\mathsf{M})$. Dando en cada p del fibrado de las referencias lineales $L(\mathsf{M})$ un subespacio H_p complementario del tangente a las fibras, verificándose:

1) $T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$
2) $(R_a)_*(H_p) = H_{pa}$
3) $H : p \longmapsto H_p$ es una distribución diferenciable.

$\boxed{6}$ *Definición mediante formas de conexión en* $L(\mathsf{M})$. Mediante un conjunto de 1–formas ω_j^i definidas globalmente en el fibrado de las referencias lineales $L(\mathsf{M})$, verificando:

1') $\omega_\ell^k(A^*) = A_\ell^k, \ \ \forall A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

2') $\displaystyle \omega_j^i\left((R_a)_* Z\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} (a^{-1})_j^\ell \omega_\ell^k(Z) a_k^i \quad \forall Z \in T_p(L(\mathsf{M})), \forall a \in GL(n, \mathbb{R})$.

3') ω_j^i son diferenciables.

CONEXIONES LINEALES

3 *Transporte paralelo*

$\tau_t\colon T_x(\mathsf{M}) \to T_{x_t}(\mathsf{M})$ isomorfismo

$\tau_{xz} = \tau_{yz} \circ \tau_{xy} \qquad \tau_{yx} = \tau_{xy}^{-1}$

$\tau_t(v_0) = v_t$

$\dot{v}_t^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}_t^i v_t^i = 0$

(Sección 5.3, (5.12), (5.14))

$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1}(Y(t)) - Y(0)\right)$

$\dot{x}_0 = X_x \qquad$ (pág. 158)

1 *Enfoque axiomático (Koszul)*

$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

$\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

(pág. 152)

2 *Enfoque clásico*

Γ_{ij}^k en $(U, (x^1, \dots, x^n))$

$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ en $(\overline{U}, (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n))$

$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^\delta \partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k}$

x_t curva en M

$p_t = \widehat{x}_t$ levant. a $L(\mathsf{M})$

$\tau_t(v) = \widetilde{p}_t(\xi),\ \xi = \widetilde{p}_0(v)$

(pág. 167)

$(\nabla_X Y)(x) = \sum_{i=1}^n \widehat{X}_p(\theta^i(\widehat{Y}))u_i$

θ^i formas canónicas en $L(\mathsf{M})$

$\widehat{X}, \widehat{Y}$ levant. de X, Y

$p = (x; u_1, \dots, u_n)$

(pág. 180)

$H_v = Y_*(T_x(\mathsf{M}))$

$Y(x) = v$

$\nabla_u Y = 0\ \forall u \in T_x(\mathsf{M})$

(pág. 160)

$(\nabla_X Y)(x) = \mathsf{v}(Y_*(X_x))$

(pág. 163)

$\omega_j^i = \sum_{k=1}^n \widetilde{y}_k^i \left(d\widetilde{x}_j^k + \sum_{h,\ell=1}^n (\Gamma_{h\ell}^k \circ \pi)\widetilde{x}_j^\ell d\widetilde{x}^h\right)$

$(x_j^i)^{-1} = (y_j^i)$

(pág. 182)

$H_p = s_*(T_x(\mathsf{M}))$

$s(x) = p$

$\nabla_u s = 0\ \forall u \in T_x(\mathsf{M})$

(pág. 166)

4 *Distribución horizontal en $T(\mathsf{M})$*

$H : v \longrightarrow H_v \subset T_v(T(\mathsf{M}))$ diferenciable

$T_v(T(\mathsf{M})) = H_v \oplus \mathcal{V}_v$

$\lambda_*(H_v) = H_{\lambda a}\ (\lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$

5 *Distribución horizontal en $L(\mathsf{M})$*

$H : p \longrightarrow H_p \subset T_p(L(\mathsf{M}))$ diferenciable

$T_p(L(\mathsf{M})) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$

$(R_a)_*(H_p) = H_{pa}$

$H_v = h_{\xi_0}(H_p)$

$h_{\xi_0}\colon L(\mathsf{M}) \to L(\mathsf{M})$

$p \mapsto h_{\xi_0}(p) = \widetilde{p}(\xi_0)$

(pág. 170)

$\mathsf{v}Z = \sum_{i,j=1}^n \omega_j^i(Z)(E_i^j)^* \qquad \{E_i^j\}$ base de $gl(n, \mathbb{R})$

(pág. 174)

$H_p = \{Z_p \in T_p(L(\mathsf{M})) / \omega_j^i(Z_p) = 0\}$

(pág. 175)

6 *Formas de conexión en $L(\mathsf{M})$*

$\omega_j^i(A^*) = A_j^i \quad A \in gl(n, \mathbb{R})$

$\omega_j^i((R_a)_* Z) = \sum_{k,\ell=1}^n (a^{-1})_j^\ell \omega_\ell^k(Z) A_k^i$

$Z \in T_p(L(\mathsf{M}))\ \ a \in GL(n, \mathbb{R})$

EJERCICIOS

1. Sea el conjunto $\mathsf{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < y < 2\}$. La función $\varphi : \mathsf{M} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (0,s) & \mapsto & 1-s & 1 < s < 2 \\ (sen\, 2\pi s, cos\, 2\pi s) & \mapsto & s & 0 \leq s < 1 \end{array} \right.$$

es una carta que determina una estructura diferenciable en M.

2. Demostrar que si $\mathfrak{A}_0$ es un atlas diferenciable sobre M, entonces es diferenciable el atlas $\mathfrak{A}$ que contiene justamente aquellas cartas cuyo cambio de cartas con cada carta de $\mathfrak{A}_0$ es diferenciable.

3. Sobre la circunferencia unidad $\mathsf{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, se considera la estructura diferenciable dada por las dos cartas cuyos homeomorfismos coordenados son las proyecciones estereográficas desde los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ sobre el eje OX. Demostrar que esta estructura diferenciable coincide con la dada en el Ejemplo 1.16, para $n = 1$.

4. (a) Se considera en el conjunto $\mathsf{M} = \mathbb{R} \cup \{p\}$ la topología tal que $\mathbb{R} \subset \mathsf{M}$ sea un abierto y los entornos de p sean los conjuntos $(U - \{0\}) \cup \{p\}$, donde U es un entorno de $0 \in \mathbb{R}$. Demostrar que M es localmente euclídeo pero no Hausdorff.

   (b) En el conjunto $E = E_0 \cup E_1 \subset \mathbb{R}^2$, donde

$$E_0 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad E_1 = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\},$$

definimos una relación de equivalencia $\sim$ por

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (x,0) & \sim & (y,0) & \Longleftrightarrow & x = y \\ (x,1) & \sim & (y,1) & \Longleftrightarrow & x = y \\ (x,0) & \sim & (y,1) & \Longleftrightarrow & x = y < 0. \end{array} \right.$$

Demostrar que conjunto cociente $\mathsf{M} = E/\sim$ no es separado y, sin embargo, sobre M se puede definir una estructura diferenciable, tomando las dos cartas siguientes:

$$U_1 = \{[(x,0)]/x \in I\!R\}, \quad \varphi_1([(x,0)]) = x$$
$$U_2 = \{[(x,0)]/x < 0\} \cup \{[(y,1)]/y \geq 0\}, \quad \varphi_2([(x,0)]) = x, \ \varphi_2([(y,1)]) = y.$$

5. Demostrar la afirmación 3 de la página 9; es decir,“una variedad diferenciable es conexa si y sólo si es conexa por arcos”.

6. Demuéstrese que toda variedad diferenciable posee un atlas diferenciable numerable.

7. Probar que si M es una variedad diferenciable y A es un conjunto numerable cualquiera, entoces $\mathsf{M} \times A$ puede ser dotado de una estructura de variedad diferenciable.

8. Probar que sobre la circunferencia $\mathsf{S}^1 = I\!R/\boldsymbol{Z}$, conjunto cociente de $I\!R$ módulo un número entero, se define una estructura diferenciable por el atlas cuyas cartas están definidas por los abiertos U que son imágenes mediante la proyección, de intervalos abiertos en $I\!R$ de longitud $1/2$, que no contienen a las clases definidas por los puntos $x = 1/4$ y $3/4$ y por los abiertos V imágenes mediante la proyección de intervalos abiertos de longitud $1/2$ que no contienen a las clases definidas por $x = 0$ y $1/2$ y cuyas funciones coordenadas

$$u : [x] \mapsto sen\, 2\pi x, \qquad v : [x] \mapsto cos\, 2\pi x,$$

definidas, respectivamente, en U y V.

9. Sea $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ dos atlas diferenciables sobre un espacio topológico M. Probar que $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ son equivalentes si y sólo si definen el mismo conjunto de funciones diferenciables.

10. Sea $(x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenadas locales definidas en un entorno de un punto x de una variedad diferenciable M y sea $(y^1, \ldots, y^m)$ funciones diferenciables en un entorno de x. Demostrar que para que $(y^1, \ldots, y^m)$ constituyan un sistema de coordenadas locales alrededor de x, es necesario y suficiente que $m = n$ y que el Jacobiano de $\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_x$ sea no nulo.

11. Sea $I\!R$ la variedad de los números reales con la estructura usual $\varphi : I\!R \to I\!R$, $t \mapsto \varphi(t) = t$ y en el abierto $]-1,1[$ consideramos la estructura inducida. Entonces son difeomorfismos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} f :]-1,1[&\to I\!R \\ t \mapsto f(t) &= \frac{t}{1-t^2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g :]-1,1[&\to I\!R \\ t \mapsto g(t) &= tag\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) \end{aligned}$$

12. Demostrar que es un difeomorfismo la aplicación $F : I\!R^2 \to I\!R^2$ definida por

$$F\big((x,y)\big) = (xe^y + y, xe^y - y), \qquad \forall (x,y) \in I\!R^2.$$

13. Sea la aplicación $F : \mathsf{S}^2 \to P_2(I\!R)$ tal que $F(x)$ es la clase determinada por $x \in \mathsf{S}^2$ en $P_2(I\!R)$. Demostrar que F es difeomorfismo local.

14. Sea M una variedad diferenciable y $F\colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ un homeomorfismo. Demuéstrese que N posee una única estructura de variedad diferenciable tal que F sea un difeomorfismo.

15. Sean

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x^2-2y,\ 4x^3y^2) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (x^2y+y^2,\ x-2y^3,\ ye^x) \end{aligned}$$

Calcular 1) $F_{*|(1,2)}$ y $G_{*|(x,y)}$ 2) $G_{*|(0,1)}(4\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})$.

16. Sea v_p vector tangente a $\mathbb{R}^3$ ($v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$) para el que $v = (2,-1,3)$ y $p = (2,0,-1)$. Calcular la derivada direccional $v_p(f)$, donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, en los siguientes casos:
a) $f(x,y,z) = y^2z$ *b*) $f(x,y,z) = x^7$ *c*) $f(x,y,z) = e^x \cos y$

17. Si $\mathsf{M} = f^{-1}(\{0\})$ es la hipersuperficie definida por $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, entonces $T_x(\mathsf{M})$ es isomorfo a

$$i_*(T_x(\mathsf{M})) = \left\{ v \in T_x(\mathbb{R}^{n+1}) \Big/ (grad\ f)_x \cdot v = 0 \right\}$$

donde $i\colon \mathsf{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión.

18. Si f y g son funciones reales diferenciables definidas en una variedad M. Probar que para todo $x \in \mathsf{M}$, se tiene

$$d(f+g)_x = df_x + dg_x \qquad\qquad d(fg)_x = f(x)dg_x + g(x)df_x.$$

19. Sea f una función diferenciable en un abierto A de una variedad diferenciable M de dimensión n, y sea $p \in A$. Supongamos que $(df)_p \neq 0$. Demostrar que existe un sistema de coordenadas locales $(y^1,\dots,y^n)$ alrededor de p tal que

$$y^i(p) = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad f = f(p) + y^1.$$

20. Sean $f^1,\dots,f^n$ funciones diferenciables definidas en un abierto A de una variedad diferenciable M de dimensión n y $p \in A$. Demostrar que el conjunto de formas $\{(df^1)_p,\dots,(df^n)_p\} \subset T_p^*(\mathsf{M})$ es linealmente independiente si y sólo si $(f^1,\dots,f^n)$ es un sistema de coordenadas locales alrededor del punto p.

21. Sea $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ una submersión entre variedades diferenciables, probar que:

   a) Un vector $v \in T_x(\mathsf{M})$ es tangente a la fibra $F^{-1}(F(x))$ si y sólo si $F_*(v) = 0$.

   b) Una aplicación $G\colon \mathsf{N} \to \mathsf{P}$ es diferenciable si y sólo si $G \circ F$ es diferenciable.

22. Demostrar que no es una inmersión la aplicación

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto F(t) = (t^2, t^3).$$

23. Demostrar que la aplicación $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $t \mapsto (t^2-1, t^3-t)$ no es inyectiva pero define una inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.

24. Sobre el subconjunto $\mathsf{M} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$ de $\mathbb{R}^2$ se da la estructura diferenciable definida por las dos cartas

$$\begin{array}{rl} \varphi_0 \colon \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R} & \qquad \varphi_1 \colon \mathbb{R} \times \{1\} \to \mathbb{R} \\ (s,0) \mapsto s & \qquad (s,1) \mapsto s \end{array}$$

y se definen las aplicaciones

$$F \colon \mathbb{R} \to \mathsf{M} \qquad\qquad f \colon \mathsf{M} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} F(s) = (s,1) & \text{si} \quad s \in \mathbb{R} - \{0\} \\ F(0) = (0,0) \end{cases} \qquad\qquad f(s,0) = f(s,1) = s, \quad s \in \mathbb{R}$$

Demostrar que f es una inmersión y que $f \circ F$ es diferenciable, pero F no es diferenciable.

25. Si $F \colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ es una inmersión y $G \colon \mathsf{M} \to \mathsf{P}$ es una aplicación diferenciable, demostrar que $H \colon \mathsf{M} \to \mathsf{N} \times \mathsf{P}$, definida por $H(x) = \big(F(x), G(x)\big)$, $x \in \mathsf{M}$, es una inmersión.

26. Demostrar que la composición de inmersiones es una inmersión.

27. Consideremos las proyeciones canónicas en la variedad producto $\mathsf{M} \times \mathsf{N}$, $\pi_1 \colon \mathsf{M} \times \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ y $\pi_2 \colon \mathsf{M} \times \mathsf{N} \to \mathsf{N}$ y una variedad P. Demostrar que $\psi \colon \mathsf{P} \to \mathsf{M} \times \mathsf{N}$ es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ \psi$ y $\pi_2 \circ \psi$ son diferenciables.

28. Sea $F \colon \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathsf{S}^n$, definida por $F(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Probar que tiene rango n.

29. Consideremos la aplicación $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por la transformación ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual induce una aplicación (denotada por la misma letra) $F \colon \mathsf{S}^2 \to \mathsf{S}^2$. Demostar que ésta es diferenciable.

30. Se considera la aplicación $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1 x^2, x^2, x^3)$. Encontrar el rango de la restricción $F_{|S^2}$ de F a S^2 en cada punto de S^2.

31. Sea la aplicación

$$F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \longmapsto (x\,cos\,z - y\,sen\,z,\ x\,sen\,z + y\,cos\,z,\ z)$$

Demostrar que $F_{|S^2}$ tiene valores en S^2 y que la aplicación inducida de S^2 sobre sí mismo es un difeomorfismo.

32. Sea $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(x,y) \mapsto (x^2, xy, y)$. Encontrar el rango de F en cada punto $p \in \mathbb{R}^2$.

33. En $\mathsf{S}^n = \left\{ x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big/ (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1 \right\}$ consideramos la estructura diferenciable definida por un atlas constituido por $2(n+1)$ cartas (U_i, φ_i) $(\alpha = 1, \ldots, n+1)$:

$$\left.\begin{array}{rl} U_\alpha = \left\{x \in \mathsf{S}^n \Big/ x^\alpha > 0\right\} & \varphi_\alpha(x) = (x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^{n+1}) \\ U_{\alpha+n+1} = \left\{x \in \mathsf{S}^n \Big/ x^\alpha < 0\right\} & \varphi_{\alpha+n+1}(x) = (x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^{n+1}) \end{array}\right\}$$

donde $\widehat{\ }$ indica que esa componente se suprime.

Probar, usando este atlas en S^n y el atlas identidad en $\mathbb{R}^{n+1}$, que la inclusión natural $i : \mathsf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es de rango n en todo punto de S^n (i.e., $\forall x \in \mathsf{S}^n, dim\, i_*(x)(T_x(\mathsf{S}^n)) = n$).

34. Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, $(y^1, \ldots, y^m)$ un sistema de coordenadas locales de M alrededor del punto p y $(x^1, \ldots, x^n)$ el sistema de coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$. Se considera la composición $h^k = x^k \circ i$ donde $i : \mathsf{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión natural. Demostrar que la ecuación del espacio tangente de M en p viene dado por las ecuaciones:

$$x^k = x^k(p) + \sum_{i=1}^m \lambda^i \frac{\partial h^k}{\partial y^i}(p), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \ \lambda^i \in \mathbb{R})$$

35. Consideremos en el conjunto de puntos M de la curva plana de ecuación paramétrica $x = t^2, y = t^3$, la estructura diferenciable para la cual

$$\varphi\colon \mathsf{M} \to \mathbb{R}, \qquad (t^2, t^3) \mapsto t$$

es una carta, y en $\mathbb{R}$ la estructura diferenciable canónica. Demostrar que la inclución $i\colon \mathsf{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable, pero (M, i) no es una subvariedad de $\mathbb{R}$.

36. Consideremos la variedad producto $\mathsf{M} \times \mathsf{N}$ de dos variedades diferenciables M y N. Demostrar que para todo punto $(p, q) \in \mathsf{M} \times \mathsf{N}$ el espacio tangente $T_{(p,q)}(\mathsf{M} \times \mathsf{N})$ se identifica con $T_p(\mathsf{M}) \oplus T_q(\mathsf{N})$.

37. Sea ϕ una aplicación diferenciable de la variedad producto $\mathsf{M} \times \mathsf{N}$ en otra variedad P. Establecer que la aplicación lineal ϕ_* en $(p, q) \in \mathsf{M} \times \mathsf{N}$ se puede expresar como sigue:

Si $w \in T_{(p,q)}(\mathsf{M} \times \mathsf{N})$ corresponde a $(u, v) \in T_p(\mathsf{M}) \oplus T_q(\mathsf{N})$ (Ejercicio 36), entonces

$$\phi_*(w) = \partial\phi_1(u) + \partial\phi_2(v)$$

donde $\partial\phi_1$ y $\partial\phi_2$ son, respectivamente, las aplicaciones inducidas por

$$\begin{array}{ll} \phi_1\colon \mathsf{M} \to \mathsf{P} & \qquad \phi_2\colon \mathsf{N} \to \mathsf{P} \\ \phi_1(x) = \phi(x, q), \ \ \forall x \in \mathsf{M} & \qquad \phi_2(y) = \phi(p, y), \ \ \forall y \in \mathsf{N} \end{array}$$

38. El grafo Γ_F de una aplicación diferenciable $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ entre variedades es el conjunto

$$\Gamma_F = \left\{(x, y) \in \mathsf{M} \times \mathsf{N} \Big/ y = F(x)\right\}$$

Demostrar que Γ_F es una variedad diferenciable y que el espacio tangente $T_{(x,y)}(\Gamma_F) \subset T_x(\mathsf{M}) \times T_y(\mathsf{N})$ es el grafo de la aplicación lineal $F_*(x)$:

$$T_{(x,y)}(\Gamma_F) = \left\{(v, w) \in T_x(\mathsf{M}) \times T_y(\mathsf{N}) \Big/ w = F_*(v)\right\}$$

39. Sea $\mathsf{M} = \mathsf{S}^2 - \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ y $\mathsf{N} = \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 / x^2+y^2 = 1\right\}$ (la esfera sin los dos polos y el cilindro circular recto, respectivamente). Consideremos la aplicación $F\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ que asigna a un punto $p \in \mathsf{M}$ el punto $F(p) \in \mathsf{N}$ donde intersecta la recta que pasa por p y corta al eje OZ ortogonalmente. Demostrar que F es diferenciable.
40. Supongamos que la función $f\colon \mathsf{M} \to I\!R$ tiene rango 1 en todo punto de $f^{-1}(a)$ $(a \in f(\mathsf{M}))$. Demostrar que un vector $v \in T_x(\mathsf{M})$ es tangente a la subvariedad $f^{-1}(a)$ en el punto $x \in f^{-1}(a)$ si y sólo si $v(f) = 0$.
41. El conjunto $S(n, I\!R)$ de las matrices reales simétricas de orden n, es una subvariedad inmersa en $\mathfrak{gl}(n, I\!R)$ de dimensión $n(n+1)/2$.

    Demostrar que el conjunto M de todas las matrices reales simétricas de orden 2 con valores propios distintos es un subconjunto abierto de $S(2, I\!R)$
42. $S(n, I\!R)$ la subvariedad de $\mathfrak{gl}(n, I\!R)$ formada por las matrices reales simétricas de orden n (Ejercicio 41). $S^+(n, I\!R)$ el conjunto de las matrices simétricas tal que la forma cuadrática asociada sea definida positiva. Establecer que $S^+(n, I\!R)$ es un abierto en $S(n, I\!R)$ y que la aplicación $A \longmapsto A^2$ es un difeomorfismo de $S^+(n, I\!R)$ en sí mismo.
43. El grupo ortogonal $O(n) = \left\{X \in GL(n, I\!R) / {}^tX = X^{-1}\right\}$ es una subvariedad de dimensión $n(n-1)/2$ de $I\!R^{n^2}$.
44. Demostrar que las aplicaciones $f, g\colon I\!R^3 \to I\!R$ definidas por

    $$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \qquad g(x,y,z) = x+y-z-1$$

    determinan estructuras de variedad diferenciable sobre $f^{-1}(0)$ y $g^{-1}(0)$, respectivamente.

    Demostrar que la aplicación $F = (f, g)\colon I\!R^3 \to I\!R^2$ determina una estructura diferenciable sobre $F^{-1}(0,0)$.
45. Demostrar que la aplicación $F\colon I\!R^3 \to I\!R^2$ definida por

    $$F(x,y,z) = (x^2-y^2+2xz-2yz-1,\ 2x+y-z)$$

    determina sobre $F^{-1}(0,0)$ una estructura de variedad diferenciable.
46. Sea $\mathsf{M} = \left\{(x, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \in I\!R^{n+1} / x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0\right\}$. Demostrar que M es una subvariedad de $I\!R^{n+1}$ difeomorfa a $I\!R^n$.
47. Demostrar que los vectores unitarios tangentes a la esfera S^2 es una variedad diferenciable de dimensión 3. (ver Ejemplo 1.85)
48. Demostrar que la ecuación $(x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2) = 0$ define una variedad diferenciable de dimensión 2.

49. Dada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y^4 - y^2 + (1/4)x^2$, ¿nos permite definir una estructura difenciable sobre el conjunto $f^{-1}(a)$?.
50. Demostrar que $\mathsf{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz = 1\}$ puede ser dotado de estructura de variedad diferenciable de dimensión 2.
51. Sea A una matriz de orden n simétrica y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$; entonces la superficie de segundo orden $\mathsf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n / {}^t x A x = b\}$ es una subvariedad de dimensión $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.
52. Probar que el subconjunto

$$\mathsf{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = 1; \quad 2x - y + z = 0\}$$

de $\mathbb{R}^3$, admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión 1.
53. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = x^3 + xy + y^3 + 1$. ¿Para qué puntos $p = (0,0)$, $p = (1/3, 1/3)$, $p = (-1/3, -1/3)$ permite f dar una estructura de variedad diferenciable sobre $f^{-1}(f(p))$?

54. Consideremos la aplicación bilineal $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, definida por

$$\big((\xi^1, \dots, \xi^n), (\eta^1, \dots, \eta^m)\big) \longmapsto \begin{pmatrix} \xi^1\eta^1 & \cdots & \xi^1\eta^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^n\eta^1 & \cdots & \xi^n\eta^m \end{pmatrix}$$

Probar que el par $(\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R}), \beta)$ es el producto tensorial de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.
55. Si E es un espacio vectorial real n–dimensional, demostar que la aplicación bilineal: $\mathbb{R}^n \times E \to \bigoplus^n E$ definida por

$$\big((\xi^1, \dots, \xi^n), v\big) \longmapsto (\xi^1, \dots, \xi^n) \otimes v = (\xi^1 v, \dots, \xi^n v)$$

es un producto tensorial.
56. Supongamos que $u \in E$ y $v \in F$, elementos de los espacios vectoriales reales tales que $u \otimes v \neq 0$, probar que

$$u \otimes v = u' \otimes v' \quad \text{si y sólo si} \quad u' = \lambda u, \quad v' = \lambda^{-1} v \quad (\lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$$

57. Sean los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $(\mathbb{R}^2)^*$, y $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Se verifica:

$$\mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^2)^* \simeq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$$

(Con lo que podemos identificar los elementos del producto tensorial $\mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ con las matrices reales de orden 2×3).
58. Sean a_{ij} y b_{ij} las componentes de dos tensores covariantes. Si $a_{ij}x^i x^j = b_{ji}x^i x^j$, para valores arbitrarios de x^k, probar:

   1) $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$.

   2) Si además los tensores dados son simétricos, entonces $a_{ij} = b_{ij}$.

59. Sean a^{ij} las componentes de un tensor contravariante simétrico y b_{ij} las componentes de un tensor covariante antisimétrico, ambos sobre un espacio vectorial de real de dimensión dos. Calcular $a^{ij}b_{ij}$.
60. Si a_{ij} y b_{ij} son las componentes de dos tensores covariantes simétricos, tales que
$$a_{ij}b_{k\ell} - a_{i\ell}b_{jk} + a_{jk}b_{i\ell} - a_{k\ell}b_{ij} = 0,$$
probar que $a_{ij} = \lambda b_{ij}$, para $\lambda \in I\!R$.
61. Si a_{ij} son las componentes de un tensor antisimétrico y λ^i son las componentes de un vector, probar entonces que $a_{ij}\lambda^i\lambda^j = 0$; recíprocamente, si $a_{ij}\lambda^i\lambda^j = 0$ para cualquier vector de componentes λ^i, establecer que a_{ij} son las componentes de un tensor antisimétrico.
62. Si $a_{ij}\lambda^i\lambda^j$ es un escalar invariante para λ^i componentes de un vector arbitrario, demostrar que $a_{ij} + a_{ji}$ son las componentes de un tensor; si a_{ij} es simétrico en sus índices, entonces a_{ij} son las componentes de un tensor de tipo (0,2).
63. Si $a_{ij}^k\lambda^i\mu^j\nu_k$ es un escalar invariante para arbitrarios valores de λ^i, μ^i y ν_i, demostrar que a_{ij}^k son las componentes de un tensor de tipo (1,2).
64. Sea $T = \theta^1\otimes\theta^2 - 3\theta^2\otimes\theta^1 + \theta^2\otimes\theta^2$, siendo $\{\theta^1,\theta^2\}$ la base dual de la base $\{e_1, e_2\}$ de un espacio vectorial E. Hallar la expresión de T en la base dual de la base $\{e_1+e_2, 2e_1+3e_2\}$.
65. Si T es un tensor de tipo (2,2) sobre un espacio vectorial E, demostrar que el escalar $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} T_{ji}^{ij}$ es independiente de la base elegida para determinarlo.
66. Si A es un tensor de tipo (1,1) sobre un espacio vectorial E y se satiface
$$A_k^iA_j^k = \delta_j^i,$$
demostrar que $det\ (A_j^i) = \|A_j^i\| = 1$ o $\|A_j^i\| = -1$, en este caso $\|A_j^i + \delta_j^i\| = 0$.
Si la dimensión de E es impar y $\|A_j^i\| = 1$, entonces $\|A_j^i - \delta_j^i\| = 0$.
67. Si A es un tensor covariante simétrico de orden 2 y v un vector. Probar que $A = 0$ ó $v = 0$ si se verifica:
$$A_{ij}v_k + A_{jk}v_i + A_{ki}v_j = 0$$
68. Para que un conjunto de $n^{(r+1)+(s+2)}$ números
$$K_{j_1\cdots j_{s+2}}^{i_1\cdots i_{r+1}}$$
correspondiente a cada base de $\bigotimes_{s+2}^{r+1}E$ sean las componentes de un tensor de tipo $(r+1, s+2)$, es condición necesaria y suficiente que para $\alpha^1,\dots,\alpha^r\in E^*$, $v_1,\dots v_s\in E$ arbitrarios, los números
$$K_{j_1\cdots j_s j_{s+1} j_{s+2}}^{i_1\cdots i_r i_{r+1}} v_1^{j_1}\cdots v_s^{j_s}\alpha_{i_1}^1\cdots\alpha_{i_r}^r$$
sean las componentes de un tensor de tipo $(1,2)$.

69. Sea v un vector en $\mathbb{R}^2$. Se asocia a cada base de $\mathbb{R}^2$ los números $\bar{v}^1 = v^2$ y $\bar{v}^2 = v^1$, siendo (v^1, v^2) las componentes de v respecto a dicha base. ¿Son $(\bar{v}^1, \bar{v}^2)$ las componentes de un vector en $\mathbb{R}^2$?

70. Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita y g un producto interior en E; esto es, $g \in \bigotimes_2^0 E \simeq \mathfrak{L}_2(E \times E, \mathbb{R})$ simétrico y definido positivo: $g(u,v) \geq 0$ y $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

    a) Demostrar que es un isomorfismo la aplicación $\phi \colon E \to E^*$ definida por

    $$\big(\phi(u)\big)(v) = g(u,v), \qquad \forall u, v \in E.$$

    b) Demostrar que es un producto interior en E^* la aplicación

    $$\widehat{g} \colon E^* \times E^* \to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad \widehat{g}(\omega, \omega') = g\big(\phi^{-1}(\omega), \phi^{-1}(\omega')\big) \quad \forall \omega, \omega' \in E^*.$$

    c) Sea $\{e_1, \ldots . e_n\}$ una base ortonormal de E con respecto a g y $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ su base dual en E^*. Demostrar que $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ es ortonormal con respecto a $\widehat{g}$.

71. En un espacio vectorial real E, de dimensón n, interesa saber si los n^3 números K_{ij}^k, tales que verifican que $K_{ij}^k L^{ij}$ son las componentes de un vector de E para cualquier tensor $L \in \bigotimes^2 E$, son las componentes de un tensor de tipo $(1,2)$ o no.

72. Tenemos un tensor A de tipo $(0,4)$ que satisface

    $$A_{ijk\ell} = -A_{jik\ell} = -A_{ij\ell k} \qquad A_{ijk\ell} + A_{ik\ell j} + A_{i\ell jk} = 0$$

    Demostar: 1) $A_{ijk\ell} = A_{k\ell ij}$

    2) Si $A(u,v,u,v) = 0$ para todo $u, v \in E$, entonces $A = 0$.

73. Sean E un espacio vectorial real de dimensión n, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E, $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ su base dual en E^* y α un tensor de tipo $(0,2)$. Probar:

    a) $\alpha = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \alpha\big((e_i, e_j)\big)\theta^i \otimes \theta^j$

    b) Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es otra base de E, $\alpha\big((e_i, e_j)\big) = a_{ij}$, $\alpha\big((u_i, u_j)\big) = b_{ij}$ y $u_j = c_j^i e_i$. Calcular b_{ij} en función de los a_{ij}.

74. Si $v_1, \ldots, v_p$ son elementos de un espacio vectorial E:

    $$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0 \Longleftrightarrow \{v_1, \ldots, v_p\} \quad \text{son linealmente independientes}$$

75. Encontrar la condición necesaria y suficiente para que a^{ij} sea de la forma $u^i v^j$.

76. Si $a_{ij} = -a_{ji}$ y $b^{ij} = b^{ji}$, probar que

    $$(\delta_k^i \delta_\ell^j + \delta_\ell^i \delta_k^j) a_{ij} = 0 \qquad a_{ij} b^{ij} = 0$$

77. Sea η una p–forma sobre E (espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$) i.e. una aplicación multilineal alternada. Se define el **producto interior** de η por $v \in E$, y se denota por $\iota_v \eta$, como la $(p-1)$–forma definida por

$$(\iota_v \eta)(v_2, \ldots, v_p) = \eta(v, v_2, \ldots, v_p) \qquad \forall v_2, \ldots, v_p \in E$$

1) Demostar que si α es una n–forma no nula, es un isomorfismo la aplicación

$$f_\alpha : E \to \bigwedge^{n-1} E^* \qquad v \longmapsto f_\alpha(v) = \iota_v \alpha$$

2) Toda $(n-1)$–forma β es descomponible (i.e., β es el producto de $(n-1)$ 1–formas).

78. Sea E un espacio vectorial. Si $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ es una base de E^*, entonces

$$\{\theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1,\ \theta^1 \otimes \theta^3 - \theta^3 \otimes \theta^1,\ \theta^2 \otimes \theta^3 - \theta^3 \otimes \theta^2\}$$

es una base de $\bigwedge^2 E^*$.

79. Sea E un espacio vectorial real de dimensión n. Para una p–forma $\omega \in \bigotimes^p E^*$ consideramos el subespacio de E^*:

$$E_\omega = \left\{\theta \in E^* / \theta \wedge \omega = 0\right\}$$

Demostar que ω es descomponible si y sólo si $dim\ E_\omega = p$.

80. Probar que si $\{u_1, u_2\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:

1) $u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1$ no es descomponible.

2) $3u_1 \otimes u_1 + 5u_1 \otimes u_2 + 6u_2 \otimes u_1 + 10u_2 \otimes u_2$ es descomponible.

81. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ su base dual, probar que, si

$$\omega = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{ij} e^i \wedge e^j \in \bigwedge^2 E^*,$$

$$\omega \text{ es descomponible } \iff \omega_{ij}\omega_{k\ell} - \omega_{ik}\omega_{j\ell} + \omega_{i\ell}\omega_{jk} = 0. \quad i < j < k < l$$

82. Demostrar que si E es un espacio vectorial de dimensión ≤ 3, entonces todo elemento homogéneo en $\bigwedge E$ es descomponible. Si $dim\ E > 3$, entonces si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son linealmente independientes, $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ es indescomponible.

83. Si $dim\ E = 4$, entonces α es descomponible $\iff$ $\alpha \wedge \alpha = 0$ y α es homogénea.

84. Sea $\omega^1, \ldots, \omega^n \in E^*$ y $\theta^i = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \omega^j$ $(i = 1, \ldots, n)$. Demostrar que $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n = det(A^i_j)\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$.

85. Antisimetrizar los siguientes tensores:

$$\theta^1 \otimes \theta^2 + \theta^2 \otimes \theta^2, \qquad \theta^1 \otimes \theta^2 \otimes \theta^2 + 2\theta^2 \otimes \theta^2 \otimes \theta^2,$$

$$\theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1, \qquad \theta^1 \otimes \theta^2 + \theta^2 \otimes \theta^3 - \theta^3 \otimes \theta^2.$$

86. Demostrar que aunque siempre se verifica que

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}$$

no es en general cierto que

$$T_{ijk} = T_{(ijk)} + T_{[ijk]}$$

donde el ( ) indica simetrización y el [ ] antisimetrización.

87. Sea $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$ una función diferenciable sobre una variedad M, demostrar que las funciones $a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ definidas en cada entorno coordenado de funciones coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ definen un tensor de tipo (0,1) sobre M.

88. Interpretar $A \in \mathfrak{T}_1^1(\mathsf{M})$ como una aplicación diferenciable que asigna a cada punto $x \in \mathsf{M}$ una aplicación lineal A_x sobre $T_x(\mathsf{M})$. Demostrar que $(\mathcal{C}_1^1 A)(x) = traza\ A_x$ (donde $\mathcal{C}$ es el operedor contracción, Definición 2.17).

89. Si θ_i son las componentes de una 1–forma $\theta \in \Omega(\mathsf{M})$, establecer que $\omega_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x^i}$ son las componentes de un campo de tensores de tipo (0,2) sobre M.

90. Si u_{ij} y v_{ijk} son componentes de campos de tensores covariantes de orden 2 y 3 respectivamente y antisimétricos, entonces

$$T_{ijk} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial u_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial u_{ki}}{\partial x^j}$$

$$K_{ijk\ell} = \frac{\partial v_{ijk}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial v_{jk\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial v_{k\ell i}}{\partial x^j} - \frac{\partial v_{\ell ij}}{\partial x^k}$$

son componentes de campos tensoriales de tipo (0,3) y (0,4)

91. Sea M una variedad diferenciable. J un campo de tensores de tipo (1,1) en M, tal que $J^2(X) = -X,\ X \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$. (Se dice que J es una estructura casi compleja sobre M). Consideremos la siguiente aplicación

$$S\colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$$

$$S(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY], \qquad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{M}).$$

Demostrar que S es un campo de tensores de tipo (1,2), denominado tensor de Nijenhuis.

92. Sea $\mathsf{M} = I\!R^2$. Consideramos para cada punto $p \in \mathsf{M}$, el endomorfismo sobre $T_p(\mathsf{M})$ dado por

$$J_p\colon a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \to -b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$$

para $a, b \in I\!R$. Demostrar que el campo tensorial $p \to J_p$ define una estructura casi compleja sobre $I\!R^2$. Verificar que el tensor de Nijenhuis es idénticamente nulo, $S = 0$ (Ver Ejercicio 91).

93. Sea α una forma diferencial. ¿$\alpha \wedge \alpha \equiv 0$?

94. En $\mathbb{R}^{2n}$, calcular $\alpha^n = \alpha \wedge \overset{n)}{\cdots} \wedge \alpha$, siendo α la 2–forma diferencial

$$\alpha = dx^1 \wedge dx^2 + dx^2 \wedge dx^3 + \cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}$$

95. Sean $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ funciones diferenciables sobre una variedad de dimensión $m \geq 2n$ y sea la 2–forma $\omega = df_1 \wedge dg_1 + \cdots + df_n \wedge dg_n$. Comprobar que

$$\omega^n = \omega \wedge \overset{n)}{\cdots} \wedge \omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\, df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n.$$

96. Sean X e Y campos de vectores $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}; \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial y}$$

y sea ω la forma diferencial sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\omega = (x^2 + 2y)dx + (x + y^2)dy.$$

Calcular $[X, Y]$, $d\omega$. Comprobar que se verifica la relación entre el producto corchete y la diferencial exterior.

97. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de campos de vectores y consideremos su base dual $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$. Si $[X_i, X_j] = a_{ij}^k X_k$, calcular $d\omega^i$ en función de a_{ij}^k.

98. Encontrar la diferencial exterior de las siguientes formas diferenciales en el plano y espacios euclídeos tridimensional

a) $x\,dx$ b) $x\,dy - y\,dx$ c) $z\,dx + x\,dy + y\,dz$

99. Consideremos la aplicación

$$F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \longmapsto (x, y) = (t^2, t^3)$$

y la 1–forma $\omega = x\,dy$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular $F^*\omega$.

100. Calcular $f^*(dt)$, siendo f la función

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto t = x - y$$

101. Sea $\omega = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ una 1–forma sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y denotamos la restricción a S por $\beta = \omega_{|S^1}$. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación definida por $F(t) = (cos\, t, sen\, t)$. Establecer que $F^*\beta = dt$.

102. Consideremos la aplicación

$$F\colon I\!R^2 \to I\!R^2 \qquad (x,y) \longmapsto (xy,1)$$

Calcular $F^*(dx)$, $F^*(dy)$, $F^*(y\,dx)$.

103. Sea $\omega = y\,dx + z\,dy + x\,dz \in \Omega^1(I\!R^3)$. Calcular $F^*\omega$, estando $F\colon I\!R^2 \to I\!R^3$ dada por

$$F(u^1,u^2) = (sen\,u^1\ cos\,u^2,\ \ sen\,u^1\ sen\,u^2,\ \ cos\,u^1).$$

104. Consideremos la transformación lineal

$$F\colon I\!R^n \to I\!R^n \qquad F(x^1,\dots,x^n) = (y^1,\dots,y^n)$$

donde $y^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + b^i$, con $a^i_j, b^i \in I\!R$. Calcular $F^*(dx^1+\cdots+dx^n)$.

105. Sean M y N variedades diferenciables, ambas de dimensión n, $\omega \in \Omega^n(\mathsf{M})$ una n–forma diferencial sobre M, $F\colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ un difeomorfismo, tal que $F(V) = U$, para U y V entornos coordenado de funciones coordenados $(x^1,\dots,x^n)$ y $(y^1,\dots,y^n)$ sobre M y N, respectivamente. Demostrar que si $\omega = a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ en U, entonces

$$F^*\omega = (a\circ F)J\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n \quad \text{en } V$$

siendo J el jacobiano del difeomorfismo F, $J = det(\frac{\partial(x^i\circ f)}{\partial y^j})$

106. Determinar todas las transformaciones lineales de $I\!R^2$ que conservan la forma diferencial $\omega = dx\wedge dy$.

107. En $I\!R^3$ se considera la 2–forma diferencial

$$\alpha = \frac{(x\,dy - y\,dx)\wedge dz}{x^2+y^2+z^2}$$

Calcular $F^*\alpha$ y $F^*(d\alpha)$, donde $F\colon I\!R^3 \to I\!R^3$ esta definida por

$$x = r\,sen\,\theta\,cos\,\varphi,\ \ y = r\,sen\,\theta\,sen\,\varphi,\ \ z = r\,cos\,\theta$$

108. Se considera la 1–forma diferencial sobre $I\!R^3$

$$\alpha = y\,dx - x\,dy + dz$$

a) Condiciones sobre la funciones f y g de clase C^1 de $I\!R^3$ en $I\!R$ para las que la forma $\alpha - g\,df$ sea cerrada.

Mostrar que f y g son necesariamente independientes de z. ¿Puede darse arbitrariamente g (independiente de z) y deducir f?

b) Si las condiciones encontrados en a) se satisfacen, demostrar que para todo $x \in I\!R^3$ las formas $\{df, dg, \alpha - g\,df\}$ son independientes.

109. Sea x un punto del dominio U de una carta (U,φ) de una variedad diferenciable M de dimensión n, tal que $\varphi(x)=a\in I\!R^n$, la curva coordenada α_i pasando por el punto x está definida por

$$\alpha_i\colon I\to U\subset \mathsf{M} \qquad t\longmapsto \varphi^{-1}(a^1,a^2,\cdots,a^i+t,\cdots,a^n)$$

Demostrar que $\dot\alpha_i(0)=\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}$.

110. Encontrar las curvas integrales de los campos de vectores en $I\!R^2$ definidos en términos de la carta identidad por

$$\text{a)}\ \ x\frac{\partial}{\partial x}\quad \text{b)}\ \ y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\quad \text{c)}\ \ y\frac{\partial}{\partial x}-x^3\frac{\partial}{\partial y}\quad \text{d)}\ \ 2x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}$$

En cada caso encontrar los puntos críticos y determinar qué campo de vectores es completo.

111. Demostrar que es completo el campo de vectores en $I\!R^2-\{(0,0)\}$ definido en términos de la carta identidad por

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}.$$

112. Encontrar las curvas integrales del campo de vectores en $I\!R^3$ definido en términos de la carta identidad por

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}+z\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}.$$

113. Sean (U,φ), (V,ϕ) las dos cartas que definen el atlas estereográfico en la esfera S^2; es decir, $U=\mathsf{S}^2-\{(0,0,1)\}$, $V=\mathsf{S}^2-\{(0,0,-1)\}$, φ la proyección estereográfica desde el punto $(0,0,1)$ sobre el plano $z=0$ y ϕ la misma proyección desde el punto $(0,0,-1)$. Se consideran los campos de vectores

$$x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\qquad\qquad -y^1\frac{\partial}{\partial y^1}-y^2\frac{\partial}{\partial y^2}$$

en U y V respectivamente. Verificar que juntos definen un campo de vectores en S^2, encontrar las curvas integrales de este campo y demostrar que es completo.

114. Demostrar que los campos de vectores en $I\!R^2$ definidos en términos de la carta identidad por

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}\qquad\qquad Y=\frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

son completos y que su corchete no es completo.

115. Hacer una representación gráfica de los campos de vectores en $I\!R^2$, cuyas componentes en el punto $p = (x, y)$ se indican:

(a) $X(p) = (0, 1)$ (b) $X(p) = -p$ (c) $X(x, y) = (y, -x)$ (d) $X(x, y) = (y, x)$
(e) $X(x, y) = (-2y, \frac{1}{2}x)$.

Encontar las curvas integrales de todos estos campos a través del punto $p = (1, 1)$. Idem del punto $p = (a, b)$.

116. Determinar cuáles de los siguientes campos de vectores definidos en un abierto $U \subset I\!R^2$ son completos:

(a) $X(x, y) = (1, 0),\ U = I\!R^2$ (b) $X(x, y) = (1, 0),\ U = I\!R^2 - \{(0, 0)\}$

(c) $X(x, y) = (-y, x),\ U = I\!R^2 - \{(0, 0)\}$ (d) $X(x, y) = (1 + x^2, 0),\ U = I\!R^2$.

117. Consideremos el campo de vectores $X(x, y) = (1, 0)$ sobre $I\!R^2$. Para $t \in I\!R$ y $p \in I\!R^2$, sea $\psi_t(p) = \gamma_p(t)$, donde γ_p es la curva integral de X pasando por p.

(a) Demostrar que para cada $t \in I\!R$, ψ_t es una transformación de $I\!R^2$ en sí mismo. Geométricamente, de ¿qué transformaciones se trata?

(b) Demostrar que

$$\begin{gathered}\psi_0 = 1_{I\!R^2} \\ \psi_{t_1+t_2} = \psi_{t_1} + \psi_{t_2}, \quad \forall t_1, t_2 \in I\!R \\ \psi_{-t} = \psi_t^{-1}, \quad \forall t \in I\!R.\end{gathered}$$

(Así $t \longmapsto \psi_t$ es un homeomorfismo del grupo de los números reales en el grupo de las transformaciones del plano).

(c) Repetir los apartados anteriores para los campos de vectores:
(a) $X(x, y) = (-y, x)$ (b) $X(x, y) = (x, y)$ (c) $X(x, y) = (y, x)$

118. Sea la aplicación $F : I\!R^2 \to I\!R^2$, $(x^1, x^2) \longmapsto (y^1, y^2) = (x^1 + x^2, x^1 - x^2)$, probar que es un difeomorfismo. Encontrar el campo de vectores imagen mediante F_* del campo de vectores $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$ en $I\!R^2$ referido a la carta identidad. Determinar los grupos uniparamétricos asociados a estos dos campos.

119. Encontrar en $I\!R^2$ un sistema de coordenadas tal que una de las familias de curvas paramétricas sean las curvas integrales del campo de vectores $Y = (y, -x)$.

120. El campo de vectores no nulo en $I\!R^2$ definido en términos de la carta identidad por

$$X = e^y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

determina una distribución unidimensional $\mathcal{E}$ en $I\!R^2$. Encontrar una carta en $I\!R^2$ adaptada a la distribución.

121. Sea el sistema diferencial definida en $I\!R^3$ por

$$\omega = yz\, dx + xz\, dy + dz.$$

Demostrar que es integrable y encontrar las superficies integrales.

122. Sea $\mathcal{E}$ la distrubución definida en $\mathbb{R}^2$ por la 1–forma

$$\omega = dy - 3x^2\, dx.$$

Encontrar una carta en $\mathbb{R}^2$ que sea adaptada a esta distribución.

123. Sea S^3 la 3–esfera, esto es, la subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^4$ definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Consideremos los campos de vectores

$$X = (1 - t - x^2)\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y} - xz\frac{\partial}{\partial z} + x(1-t)\frac{\partial}{\partial t}$$

$$Y = -xy\frac{\partial}{\partial x} + (1 - t - y^2)\frac{\partial}{\partial y} - yz\frac{\partial}{\partial z} + y(1-t)\frac{\partial}{\partial t}$$

Sea S^* el conjunto de puntos de S^3 exceptuando el (0,0,0,1).

a) Demostrar que X e Y son campos de vectores linealmente independientes sobre S^*.

b) Sea $\mathcal{E}$ la distribución en S^* generada por X e Y. Demostrar que la subvariedad bidimensional definida por las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} z + kt & = & k \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 & = & 1 \\ kz - t & \neq & 0 \\ t & \neq & 1 \end{array}$$

$-\infty < k < \infty$, son variedades integrales de $\mathcal{E}$.

124. Sea $\omega^1, \ldots, \omega^k$ 1–formas diferenciables independientes y cerradas sobre una variedad M. Sea $\mathcal{E}$ el sistema diferencial dado en cada punto por

$$\mathcal{E}_x = \left\{ v \in T_x(\mathsf{M}) / \omega^i_x(v) = 0, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \right\}.$$

Probar que existen subvariedades N por cada $x \in \mathsf{M}$, tales que $T_x(\mathsf{N}) = \mathcal{E}_x$.

125. Consideremos los campos de vectores $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3 - \{0\})$, dados por

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, $\mathcal{E}_x$ es el subespacio de $T_x(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ generado por $\{X_1, X_2, X_3\}$ y $\mathcal{E}$ la distribucuión determinada por los $\mathcal{E}_x$. Comprobar que $\mathcal{E}$ es completamente integrable. Encontrar las subvariedades integrales.

126. Demostrar que una variedad diferenciable conexa y orientable admite justamente dos orientaciones.
127. Una superficie M es orientable cuando existe una 2–forma μ sobre M que es diferente de cero en cada punto de M. Demostrar que una superficie M en $\mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si existe un campo vectorial normal Z en M que es diferente cero en cada punto de M.
128. Calcular la expresión de la 2–forma μ del Ejercicio 127 en S^2 en términos de las coordenadas dadas por
   (i) La proyección estereográfica.
   (ii) Las cordenadas esféricas (ρ, θ, φ) con $\rho = 1$.
129. Probar que el espacio proyectivo $P^n(\mathbb{R}^n)$ es una variedad orientable si y sólo si n es impar.
130. En $\mathbb{R}^2$ consideremos $D = \overline{B_0^2(1)}$ (clausura de la bola de radio 1), demostrar que D es un dominio en la variedad diferenciable $\mathbb{R}^2$ con frontera $\mathsf{S}^1 = \partial D$.
131. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de clase C^2 y D un dominio compacto de $\mathbb{R}^2$; se supone que $f_{|\partial D} = 0$. Demostrar la fórmula

$$\int_D f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = -\int_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx \wedge dy$$

y deducir que si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ sobre } D, \quad \text{entonces} \quad f_{|D} = 0.$$

132. Consideremos la forma diferencial sobre $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (z - x^2 - xy)dx \wedge dy - dy \wedge dz + dz \wedge dx$$

Integrar ω sobre el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

133. Sea $\alpha = \dfrac{y\,dx}{x^2 + y^2}$ y γ_r el arco orientado definido por

$$x = r\,cos\,u, \quad y = r\,sen\,u, \quad z = r \quad (r = cte. \quad 0 \le u \le 2\pi)$$

   a) Calcular $\int_{\gamma_r} \alpha$.
   b) Sea D la región del cono definida por $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 0 < r_1 < z < r_2$. Calcular $\int_D d\alpha$, y verificar el Teorema de Stokes.
134. Sea

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Probar que α es una 1–forma cerrada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Calcular la integral de α sobre la circunferencia unidad. ¿Se sigue que α no es exacta? Si $i : \mathsf{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es el embebimiento canónico ¿$i^*\alpha$ es exacta?

Si se restringe α al semiplano derecho $x > 0$, entonces α si es exacta.

135. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2\}$. Calcular la integral

$$\int_D sen(x + y) dx dy$$

136. Sea γ un arco orientado de $\mathbb{R}^3$ definido por la parametrización

$$x = cos\,\theta, \quad y = sen\,\theta \quad z = sen\,\theta\, cos\,\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

a) Calcular $\int_\gamma z\, dx$.

b) Transformar esta integral en una integral doble extendida a la porción de superficie de ecuación $z = xy$ limitada por γ; y encontrar así su valor.

137. Demostrar que sobre la esfera $\mathsf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\int_{2} dx \wedge dy = 0 \qquad \int_{2} (xdy - ydx) \wedge dz = 2 \int_{2} zdx \wedge dy.$$

138. Sea D la región definida por la relación $x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 \leq z \leq h$ del cilindro de $\mathbb{R}^3$. Verificar el Teorema de Stokes para la 1–forma

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

139. En una espacio de Riemann (M, g), sea la aplicación $\nabla \colon \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathsf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, definida por la fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - \\ -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Comprobar que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$, $f \in \mathfrak{F}(\mathsf{M})$, ∇ verifica:

A_1	∇ es $\mathbb{R}$–lineal.	A_4	$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
A_2	$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$.	A_5	$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
A_3	$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.		

140. Si X e Y son dos campos de vectores con expresión local

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{e} \qquad Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

y si Γ_{ij}^k son los coeficientes de una conexión lineal ∇ sobre una variedad M,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

establecer

$$\text{a)}\qquad \nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X^i X^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$\text{b)}\qquad \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \overline{x}^\alpha \partial \overline{x}^\beta}\frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^\ell}$$

en la intersección $U \cup \overline{U}$ de los abiertos de dos cartas locales $(U,(x^1,\ldots,x^n))$, $(\overline{U},(\overline{x}^1,\ldots,\overline{x}^n))$.

141. Sea la parametrización de la esfera de radio a

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\cos\phi,\quad a\cos\theta\,sen\,\phi,\quad a\,sen\,\theta)$$

Calcular la derivada covariante respecto a ϕ del campo de vectores unitario formado por las tangentes unitarias a los meridianos a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$.

142. Sea $\vec{\alpha}$ una curva alabeada. Consideremos la superficie generada por las binormales : $\vec{\mathbf{x}}(u,s) = \vec{\alpha}(s) + u\vec{b}(s)$. Calcular las derivadas covariantes a lo largo de las curvas coordenadas del campo de vectores tangente unitario a las líneas paramétricas $s = cte$.

143. Sea $\mathcal{C}$ el paralelo $\theta = \theta_0$ sobre la esfera de ecuación:

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (a\,sen\,\theta\cos\phi,\quad a\,sen\,\theta\,sen\,\phi,\quad a\cos\theta)$$

A) Probar que el transporte paralelo del vector $\vec{\mathbf{x}}_1(\theta_0,\phi)$ a lo largo de $\mathcal{C}$ es

$$Y(\phi) = cos\big((cos\theta_0)(\phi-\phi_0)\big)\vec{\mathbf{x}}_1 - \frac{sen\big((cos\theta_0)(\phi-\phi_0)\big)}{sen\theta_0}\vec{\mathbf{x}}_2.$$

B) $Y(0) = Y(2\pi) \Rightarrow \mathcal{C}$ es el ecuador.

144. Consideremos la esfera

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2) = (cos\,u^2 cos\,u^1,\;\; cos\,u^2 sen\,u^1,\;\; sen u^2)$$

Se desplaza paralelamente el vector de componentes (1,0) desde el punto de coordenadas (0,0) hasta el punto $(\pi/\sqrt{2},0)$ a lo largo del ecuador, luego hasta el punto $(\pi/\sqrt{2},\pi/4)$ a lo largo del meridiano $u^1 = \pi/\sqrt{2}$, después hasta el punto $(0,\pi/4)$ a través del paralelo $u^2 = \pi/4$, y por último hasta el punto inicial por el meridiano $u^1 = 0$. Determinar el ángulo entre el vector dado y el vector obtenido al final del desplazamiento.

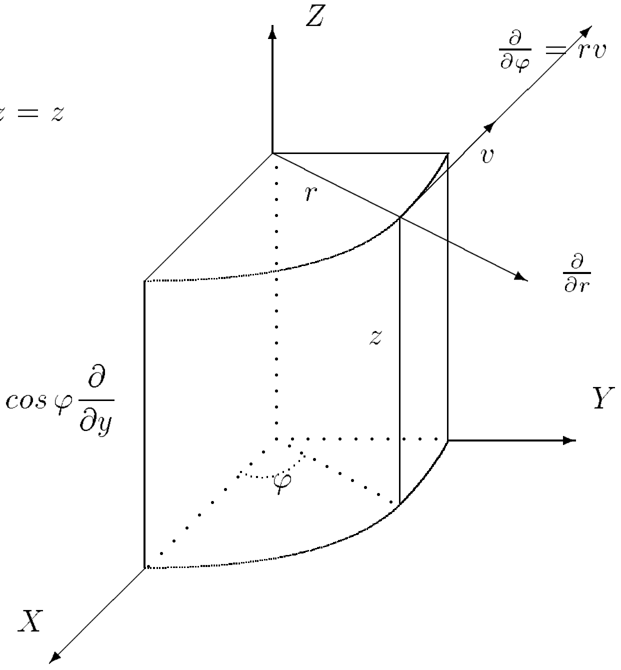
145. Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$. Sean r, φ, z las coordenadas cilíndicas usuales en $\mathbb{R}^3$. (r, φ, z) es un sistema coordenado sobre $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0,\ y = 0\}$. Estas funciones coordenadas están bien definidas y sus aplicaciones inversas y campos de vectores básicos tienen la siguiente expresión:

$$x = r\,cos\,\varphi, \quad y = r\,sen\,\varphi, \quad z = z$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = cos\,\varphi \frac{\partial}{\partial x} + sen\,\varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = r\,v, \quad v = -sen\,\varphi \frac{\partial}{\partial x} + cos\,\varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$



Se dice que un campo de vectores es paralelo si su derivada covariante respecto a cualquier otro campo de vectores es nula; y que un campo de vectores es paralelo a lo largo de una curva si su derivada covariante respesto al vector tangente a la curva es nula.

Demostrar que que el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial z}$ es paralelo y que los campos $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ son paralelos a lo largo de las rectas paralelas al eje Z.

146. Se define la diferencial covariante de un campo tensorial A de tipo (r, s) sobre una variedad diferenciable M, como el campo de tensores de tipo $(r, s+1)$, ∇A, tal que

$$(\nabla A)(X_1, \ldots, X_s, X, \theta^1, \ldots, \theta^r) = (\nabla_X A)(X_1, \ldots, X_s, \theta^1, \ldots, \theta^r)$$

para todo $X, X_i \in \mathfrak{X}(\mathsf{M})$ y $\theta^j \in \Omega^1(\mathsf{M})$.

Comprobar que, si respecto a un sistema coordenado las componentes de A son $A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$, las de ∇A vienen dadas por

$$A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s ; k} = \frac{\partial A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma^{i_\alpha}_{k\ell} A^{i_1 \cdots i_{\alpha-1} \ell i_{\alpha+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \right) -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{s} \left(\sum_{h=1}^{n} \Gamma^{h}_{k j_\beta} A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_{\beta-1} h j_{\beta+1} \cdots j_s} \right).$$

147. Si Y es un campo de vectores sobre una curva α, entonces

$$\frac{\nabla Y}{dt}(s) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\tau_t^{-1}\big(Y(s+t)\big) - Y(s)\Big)$$

donde τ_t es el desplazamiento paralelo a lo largo de la curva α de $\alpha(s)$ a $\alpha(s+t)$.

148. En una variedad M con una conexión ∇, respecto a un sistema de coordenadas $(x^1,\ldots,x^n)$, definimos las componentes del tensor curvatura por

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n R^i_{jk\ell}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Entonces

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} + \sum_{h=1}^n \left(\Gamma^h_{\ell j}\Gamma^i_{kh} - \Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{\ell h}\right).$$

149. Sea ∇ la conexión de Levi–Civita sobre una variedad de Riemann (M, g). Consideremos en un entorno abierto U de M un campo de referencias $\{E_1.\ldots,E_n\}$ y sus correspondientes 1–formas duales $\{\theta^1,\ldots,\theta^n\}$, definimos las **formas de conexión** θ^k_j por

$$\theta^k_j(E_i) = \Gamma^k_{ij},$$

siendo Γ^k_{ij} los símbolos de Christoffel en U respecto a $\{E_1,\ldots,E_n\}$; o sea $\nabla_{E_i}E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}E_k$. Establecer

$$\begin{aligned} \nabla_X E_i &= \sum_{k=1}^n \theta^k_i(X)E_k \\ d\theta^i &= \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \theta^i_j && (1^{\text{a}} \text{ ecuación de estructura}) \\ dg_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left(\theta^k_i g_{kj} + \theta^k_j g_{ki}\right) \end{aligned}$$

donde $g_{ij} = g(E_i, E_j)$.

En particular, si $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es una referencia ortonormal

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \theta^i_j, \qquad \theta^k_j + \theta^j_k = 0.$$

150. Sea U un entorno abierto en una variedad semi–riemanniana (M, g) tal que sobre U está definido un campo de referencias $\{E_1,\ldots,E_n\}$ y sus 1–formas

duales $\{\theta^1,\ldots,\theta^n\}$. Si $R^j_{ik\ell}$ son las componentes del tensor curvatura respecto a esta referencia; es decir,

$$R(E_k,E_\ell)E_i=\sum_{j=1}^n R^j_{ik\ell}E_j,$$

definimos las n^2 2–formas Ω^j_i, llamadas **formas de curvatura**, por

$$\Omega^j_i=\sum_{1\le k<\ell\le n} R^j_{ik\ell}\theta^k\wedge\theta^\ell=\tfrac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^n R^j_{ik\ell}\theta^k\wedge\theta^\ell.$$

Verificar que

$$\Omega^j_i=d\theta^j_i-\sum_{k=1}^n\theta^k_i\wedge\theta^j_k \qquad (2^{\text{a}}\ \text{ecuación de estructura})$$

donde θ^k_j son las **formas de conexión**, dadas por $\theta^k_j(E_i)=\Gamma^k_{ij}$, y Γ^k_{ij} los símbolos de Christoffel en U, respecto a $\{E_1,\ldots,E_n\}$.

151. Probar que dada una conexión lineal arbitraria de coeficientes Γ^i_{jk}, los coeficientes

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}=\tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj})$$

definen una nueva conexión. Sea

$$K_{\ell k}=\sum_{i=1}^n\left(\overline{\Gamma}^i_{i\ell,k}-\overline{\Gamma}^i_{ik,\ell}\right)=:\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\overline{\Gamma}^i_{i\ell}}{\partial x^k}-\frac{\partial\overline{\Gamma}^i_{ik}}{\partial x^\ell}\right).$$

¿Son las $K_{\ell k}$ componentes de un tensor de tipo $(0,2)$?

152. Probar que respecto a una conexión simétrica (sin torsión), para cualquier una 1–forma θ, se tiene $\theta_{i;j}-\theta_{j;i}=\theta_{i,j}-\theta_{j,i}$. Y para $A\in\mathfrak{T}^0_2(\mathsf{M})$, antisimétrico: $A_{ij;k}+A_{jk;i}+A_{ki;j}=A_{ij,k}+A_{jk,i}+A_{ki,j}$.

153. En una variedad semi–riemanniana M, con tensor métrico g y tensor curvatura R, denotamos por $|g|$ el determinante de (g_{ij}) respecto a un sistema coordenado $(x^1,\ldots,x^n)$.

Establecer que

$$\sum_{i=1}^n\Gamma^i_{ik}=\frac{1}{2}\frac{\partial\, ln|g|}{\partial x^k}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k}.$$

Deducir de esto que la contracción $\mathcal{C}^1_1R=0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] **M. Berger; B. Gostiaux**.- *Géométrie différentielle*. Armand Colin, Paris, 1972

[2] **M. Berger; B. Gostiaux**.- *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer–Verlag, New York, 1988

[3] **W.M. Boothby**.- *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1983

[4] **F. Brickell; R. S. Clark**.- *Differenciable Manifolds*. Van Nostrand Reinhold, 1970

[5] **M.P. do Carmo**.- *Geometria riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 1983

[6] **N. Hicks**.- *Notas sobre Geometría Diferencial*. Editorial Hispano Europea, Barcelona, 1974

[7] **B. O'Neill**.- *Semi–riemannian geometry, with applications to relativity*. Academic Press, New York, 1983

[8] **Pham Mau Quan**.- *Introduction a la géométrie des variétés différentables*. Dunod, Paris, 1969

[9] **I.M. Singer; J.A. Thorpe**.- *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Scott, Foresmann o Springer-Verlag, 1967

[10] **F.W. Warner**.- *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresmann and Company, Illinois, 1971

SIMBOLOS

INDICE ALFABETICO