1. Construcción de cónicas. conicas.html
2. Kimberling.PDF
3. ETC (Enciclopedia Virtual de los Centros del Triángulo)
4. Las medianas se cortan en un punto. medianas.html
5. Los cuatro puntos notable estudiados en la Antigua Grecia. centros griegos.html
6. Punto de Fermat- Torricelli. Punto de Fermat.html
7. Coordenadas Trilineales y Baricéntricas. coordenadas.html
8. Simetrías y Ortocentros. Anolopis260.html
9. Crux Mathematicorum 2137.PDF (Enunciado)
10. Crux Mathematicorum 2137Sol.PDF (Solución)
11. Problema 2137 (Crux Mathematicorum). Crux Mathematicorum 2137.GGB HTML no generado

Buenas tardes, estoy sentado aquí debido a la insistencia reiterada de Juan Agustín Noda (Presidente de La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton) para que viniera a contar algo sobre la Geometría del Triángulo y al que agradezco la invitación, así como al comité organizador de este "I Encuentro Geogebra Canarias".

Con Juan Agustín tuve la ocasión de compartir una parte de un curso de Master de Matemáticas titulado "Herramientas Tecnológicas para la Enseñanza de las Matemáticas". Fue allí cuando me inicié en el uso de GeoGebra, ya que hasta entonces sólo utilizaba Cabri, con el cual he elaborado mucho material relativo a lugares geométrico, cónicas, resolución de triángulos y otros diversos problemas de Geometría; llegando a crear gran cantidad de macros que me liberan de mucho trabajo repetitivo. Y precisamente el disponer de este material es lo que me frenaba a usar otro paquete de Geometría Interactiva y, por consiguiente, tener que volver a crear todas aquellas macros que me son muy útiles.

El trabajo hecho por Juan Agustín en aquel curso lo utilicé para preparar un documento de construcción de cónicas con GeoGebra que aún estoy completando. (PRESENTAR conicas.html)

Centrandonos en lo que voy a contar aquí, no sé si a esto se le debe llamar conferencia, charla, taller, actividad o algo similar. Mi único objetivo es contar, mediante ejemplos, qué uso hago de GeoGebra en mi entretenimiento con Geometría. En especial con hechos geométricos relacionados con el triángulo, una figura simple tan rica en propiedades geométricas que indujo a Clark Kimberling (PRESENTAR Home Page, en PDF) (Triangle Centers and Central Triangles, 1998) a poner en la introducción una cita de John E. Wetzel: "En este tema hay más milagros por metro cuadrado que en cualquier otra área de las matemáticas ..."

Apropiandome de más documentación de Clark Kimberling, en su Enciclopedia Virtual de los Centros del Triángulo (ETC) empieza diciendo: (PRESENTAR etc)

Hace mucho tiempo, alguien dibujó un triángulo y tres segmentos partiendo cada uno de en un vértice y terminando en el punto medio del lado opuesto. Los segmentos se intersecaban en un punto. Quedó impresionado y repitió el experimento con un triángulo de forma diferente. Una vez más los segmentos se cortaban en un punto. La persona dibujó un tercer triángulo (PRESENTAR MEDIANAS.HTML), con mucho cuidado, obteniendo el mismo resultado. Se lo contó a sus amigos. Para su sorpresa y deleite, ellos obtenían lo mismo. Se corrió la voz y la magia de los tres segmentos se consideró como la obra de un poder superior.

Pasaron los siglos y alguien demostró que las tres medianas de hecho coinciden en un punto, que ahora se llaman el **centro de gravedad** o **baricentro**. Los antiguos griegos encontraron otros puntos, de concurrencia de rectas asociadas a un triángulo, que son los que se conocen hoy por (PRESENTAR centros griegos.html) **ortocentro** (determinado por las rectas que pasan por los vértices y son perpendiculares al lado opuesto correspondiente), **incentro** (donde concurren la bisectrices, rectas que pasan por los vértices y dividen cada ángulo en dos partes iguales), y **circuncentro** (punto de intersección de las mediatrices de cada lado).

Pasaron más siglos y se descubre (como primer punto notable desde la antigua Grecia, según Howard Eves ("Havardeifs")), el quinto (PRESENTAR Punto de Fermat.html) centro, conocido hoy como el **punto de Fermat-Torricelli** o **primer punto isogónico**, que surgió de un problema de optimización propuesto por Pierre Fermat (1601-1665): "Punto en el interior de un triángulo tal que cualquier ángulo se menor de 120°, para el cual la suma de las longitudes de los segmentos trazados desde él a los tres vértices es mínima".

Este punto puede obtenerse mediante la siguiente construcción: Levantamos triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo dado, entonces las rectas que unen los vértices opuesto a estos lados con los vértices del triángulo original, se cortan en el punto de Fermat.

Nota: Proyecto Gauus. Materiales didácticos ESO. El teorema de Viviani y el punto de Fermat. (Rafael Losada Liste)

`http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/viviani_fermat_2/actividad.html`

A partir de entonces, se añaden a la literatura, a finales del siglo XIX y principios del XX, los puntos que ahora se llama **simediano** o **punto de Lemoine**, **punto Gergonne**, y el **punto de Feuerbach** ("feirbach"), por nombrar algunos,.

La Geometría del Triángulo estuvo inactiva por más de medio siglo, pero ha surgido recientemente "del polvo y las cenizas que la historia ha apilados en ella" por el uso de las computadoras para el estudio sistemático de las estructuras geométricas y sus propiedades. Además, las investigaciones experimentales utilizando aproximaciones numéricas, junto con la verificación usando álgebra computacional han dado lugar a una notable productividad en la geometría del triángulo recientemente.

De lo expuesto (PRESENTAR DE NUEVO los cuatro puntos notables) podemos decir que los cinco primeros centros del triángulo de la historia, tienen construcciones muy simples como puntos de intersección de tres recta naturales.

¿Son tales incidencias parte de un todo unificado?

¿Son codificable y clasificables?
¿Son acaso tan natural algebraicamente como lo son geométricamente?

Con el fin de llevar a cabo tal codificación, vamos a asignar coordenadas homogéneas de los puntos en el plano del triángulo. Las más utilizadas son las baricéntricas (o areales) y las trilineales (o isométricas).
(coordenadas.html)

Las coordenadas baricéntricas fueron introducidas por A.F. Möbius en 1827, como una respuesta a la cuestión sobre qué masas se deben colocar en los vértices de un triángulo para que un punto dado sea el centro de gravedad de estas masas

En la década de 1980, se observó que estos puntos especiales comparten algunas propiedades generales que ahora forman la base de una definición formal de "centro" de un triángulo.
(PRESENTAR DE NUEVO centros griegos.html DONDE LO HABÍAMOS DEJADO ANTES)

Definir "centro" de un triángulo

EJEMPLOS:
Simetrías y ortocentros (Anolopis260.html)
Crux Mathematicorum 2137.GGB

PRESENTACIONES

En mi exposición no voy a usar técnicas tan atractivas y didácticas que las que actualmente disponemos; simplemente voy a proyectar en la pantalla lo que tengo en la consola de mi ordenador.

1. Construcción de cónicas (GeoGebra)

   http://amontes.webs.ull.es/geogebra/master/conicas.html

   Comentar la nomenclatura, que me sirve para localizar el caso de construcción de cónica que me interese.

   Elegir dOP **46** (TENERLO ABIERTO ANTES). Mostrar solo los tres datos, paso a paso, d, P y O, luego mostrar el primera paso de la construcción: trazar el eje focal.

   Ir al final y mover los datos iniciales. Si P está al otro lado de la directriz que O, resultan hipérbolas.

   A la hora de exporta a HTML no le incluyo barra de menú o de herramientas, para que sea mas rápida la carga. No obstante, si se quiere abrir con GeoGebra, basta con hacer doble click sobre el applet; se abre una ventana nueva en la que editar el dibujo. Al cerrarla se vuelve a la página.

   Si no se tiene activada esta opción (param name = "framePossible" value = "true"), basta copiar la dirección WEB y abrir el archivo con Geogebra en Archivo − > Abre página Web.

2. Clark Kimberling (Kimberling.PDF , Ctrl+L pantalla completa)

   http://faculty.evansville.edu/ck6/

3. ENCYCLOPEDIA OF TRIANGLE CENTERS (ETC)

   http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

4. medianas.html

5. centros-griegos.html

   ¡Que muestre sólo el título! y el triángulo con el baricentro (para lograr esto hay que exportar a html cuando la reproducción va por el paso 7). Luego reproducir paso a paso: ortocentro, incentro y circuncentro.

Hasta el paso **33**: NO MOSTRAR LAS COORDENADAS HASTA MAS TARDE)

6. punto-de-Fermat.html

   (¡Que muestre sólo el título, el triángulo, un punto en su interior y los segmentos que lo unen con los vértices! para lograr esto hay que exportar a html cuando la reproducción va por el paso 6). Luego, reproducir paso a paso: Problema de optimización (MOVER EL PUNTO P Antes de), mostrar los triángulos equiláteros sobre los lados. Hasta el paso **14**: NO MOSTRAR LAS COORDENADAS HASTA MAS TARDE)

7. centros-griegos.html

   PRESENTAR DE NUEVO los cuatro puntos notables, para mostrar que se obtiene como intersección de rectas.

8. coordenadas.html

   Coordenadas baricéntricas y trilineales

   (¡Que muestre sólo el título! (para lograr esto hay que exportar a html cuando la reproducción va por el paso 1). Luego, reproducir paso a paso: Hasta el paso **10** y (MOVER EL PUNTO P Antes de), mostrar los valores de las coordenadas trilineales, para observar cuando debe tomar valores negativos.

   Continuar con las baricéntricas hasta el paso **21**: NO MOSTRAR el baricentro e incentro HASTA USAR LAS MACROS PARA VISUALIZAR las coordenadas de P. Para mover el texto ATENCIÓN AL ELEGIR EL APUNTADOR.

   Ahora mostrar G e I sus coordenadas

9. Coordenadas baricéntricas de los cinco primeros centros

   centros-griegos.html

   PRESENTAR DE NUEVO los cuatro puntos notables, DONDE SE HABÍA QUEDADO ANTES, para mostrar sus coordenadas baricéntricas. Al llegar al incentro, se muestran los radios de la circunferencia inscrita; usarlo para deducir sus coordenadas baricéntricas.

Definición de Centro de un triángulo, aprovechando las coordenadas de los cuatro puntos clásicos.

PRESENTAR DE NUEVO el punto de Fermat, DONDE SE HABÍA QUEDADO ANTES, para mostrar sus coordenadas baricéntricas.

Presentar de nuevo COORDENADAS.HTML (nos habíamos quedado en el paso 21).

Mostrar G, paso 22. Usar la macro COORDENADAS BARICENTRICAS.GGT para mostrar sus coordenadas baricéntricas.

Mostrar I, paso 23. Usar la macro COORDENADAS TRILINEAS.GGT para mostrar sus coordenadas TRILINEALES.

10. ETC

11. (Simetrías y ortocentros) Anopolis269.html

    Simetrias y Ortocentros

    Dado un triángulo ABC, se consideran los pies D, E y F de las bisectrices por A, B y C, respectivamente. Denotamos por Db y Dc los simétricos de D respecto a BE y CF, respectivamente, y por Ha el ortocentro del triángulo DDbDc. Similarmente, se obtienen los ortocentros Hb y Hc de los triángulos EEcEa y FFaFb. Entonces, las rectas AHa, BHb y CHc son concurrentes.

    (¡Que muestre sólo el triángulo y las bisectrices! (para lograr esto hay que exportar a html cuando la reproducción va por el paso 4).

    Luego, reproducir paso a paso

    Mostrar que Ha = CentroTriangulo[D,D_b,D_c,4]

    Y definir Hc por sus coordenada trilineales : -b (a + b - c) (b + c), -a (a + b - c) (a + c), -2 a b c

    AÑADIR;

    Los simétricos de Ha, hb y hac respecto a las bisectrices Ad, BE y CF, ESTÁN ALINEADOS.

    Exponer el comando la recta que los contiene, ver anopolis260.nb: (OJO, RENOMBRAR A, B y C d L, M y N)

```
CurvaTriangular[L,M,N,B*(a^3 - a^2*b + a*b*(-b + c) +     (b -
c)^2*(b + c)) +   A*(a^3 + b^3 + c^3 - a^2*(b + c) -     a*(b^2 -
b*c + c^2)) +   (a^3 - a^2*c + a*(b - c)*c +     (b - c)^2*(b +
c))*C=0]
```

12. Problema de CRUX MATHEMATICORUM

    (¡Que muestre sólo el título! (para lograr esto hay que exportar a html cuando la reproducción va por el paso 2).

    El paso 1 muestra la Vista Gráfica-2, con el enunciado.

    Luego, reproducir paso a paso:

    — 3— Muestra un segmento, longitud del radio de las circunferencias iguales variables.

    — 4— El triánglo

    — 5 – El Incentro y la bisectriz por A, donde debe estar el centro de una de las circunferencias.

    — 6 — Las tres circunferencias. Cambiar el segmento para visualizar como varían.

    — Ahora se trazan los ejes radicales (mediatrices en este caso), cuya intersección da el centro radical. En el lugar que describe estará el punto T buscado. Observar que contiene a X(1), cuando $\rho = r$, y a X(3), cuando $\rho = 0$.

    — Crear el lugar geométrico (LUEGO BORRARLO), observar que es la recta IO.

    — Ahora el punto buscado ha de estar en el recorrido de los puntos de intersección de las circunferencias $B'(\rho)$ y $C'(\rho)$.

)