

EJERCICIOS DE CONSTRUCCIÓN DE CÓNICAS DADAS POR ELEMENTOS MÉTRICOS

E. GUZMÁN

1. ASPECTOS TEÓRICOS

1. Definiciones

- a) Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F y F', llamados focos es constante (igual a 2a).
- b) Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos P cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, F y F', llamados focos es constante (igual a 2a).
- c) La *parábola* es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

2. Las circunferencias focales de una elipse o hipérbola

Las circunferencias focales son las circunferencias centradas en uno de los focos y de radio 2a.

- a) Una elipse es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia (la focal) y de un punto interior (el otro foco).
- b) Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia (la focal) y de un punto exterior (el otro foco).

A continuación, daremos una nueva caracterización de estas cónicas que se aplicarán en los ejercicios planteados.

- a) Una elipse es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una fija y que pasan por un punto fijo interior.
- b) Una hipérbola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una fija y que pasan por un punto fijo exterior.
- c) Una parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta fija (directriz) y que pasan por un punto exterior (foco).

3. Simétricos de los focos

- a) El simétrico de un foco respecto de toda tangente a una elipse o hipérbola está sobre la circunferencia focal con centro el otro foco.
- b) El simétrico del foco de una parábola respecto de toda tangente, está en la directriz.

4. Propiedad de las tangentes

- a) La tangente en un punto P a la elipse es bisectriz del ángulo que forman un radio vector y la prolongación del otro.
- b) La tangente en un punto P a la hipérbola es bisectriz del ángulo que forman los dos radios vectores.
- c) La tangente a la parábola en un punto P es bisectriz del ángulo formado por el radio vector y la perpendicular por P a la directriz (paralela al eje).

2. EJERCICIOS DE ELIPSES

Ejercicio 1: Los dos focos y una tangente

- Unimos los dos focos y obtenemos el eje focal.
- Punto medio de los focos, obtenemos el centro de la elipse O .
- Trazamos la perpendicular del eje focal que pasa por O , eje perpendicular.
- Hallamos el simétrico de uno de los focos respecto a la tangente, S_1 .
- Trazamos la recta que une S_1 con el otro foco, la denotamos por r . Sabemos que la distancia de S_1 a este foco es $2a$.
- Punto de intersección de la recta r con la tangente, nos da el punto de tangencia P .
- Circunferencia de centro O y radio a , la intersección con el eje focal nos da los vértices A_1, A_2 .
- Circunferencia de centro un foco y radio a , la intersección con el eje perpendicular nos da B_1, B_2 .
- Trazamos la cónica que pasa por los cinco puntos: P, A_1, A_2, B_1, B_2 .

Ejercicio 2: Un foco y tres tangentes

- Hallamos el simétrico del foco con respecto a las tres tangentes S_1, S_2, S_3 .
- Mediatriz de S_1 y S_2 , mediatriz S_1 y S_3 .
- La intersección de las dos mediatrices es el segundo foco.
- Tenemos los dos focos y una tangente cualquiera, aplicamos la macro del ejercicio anterior.

Ejercicio 3: Un foco, dos tangentes y un punto.

- Dibujamos los simétricos del foco dado respecto de las dos tangentes, S_1 y S_2 .
- Mediatriz determinada por los simétricos.
- Paralelas a cada una de las tangentes que pasan por el punto dado P , r_1 y r_2 .
- Intersección de la mediatriz con cada una de estas rectas, posibles focos f_1 y f_2 .
- Foco dado f , f_1 y una de las dos tangentes me da una elipse, con los focos f y f_2 otra.

Ejercicio 4: Un foco, dos puntos y una tangente.

- Con centro en cada uno de los dos puntos dados y radio hasta el foco dado, se trazan sendas circunferencias.
- Simétrico del foco respecto de la tangente S_1 .
- Se determina la circunferencia que pasa por S_1 y es tangente a las otras dos (uno de los 10 problemas de Apolonio).
- El centro de la circunferencia hallada, es el segundo foco.
- Tenemos los dos focos y una tangente, utilizamos la macro.

Ejercicio 6: Un foco, dos tangentes y el punto de contacto de una de ellas.

- Halla los simétricos del foco respecto de las dos tangentes, S_1 y S_2 .
- Une los dos puntos simétricos y determina su mediatriz.
- Une el simétrico del foco con el punto de tangencia (utiliza el simétrico respecto de la tangente en la que está el punto de tangencia).
- Donde esta última corte a la mediatriz de los simétricos es el segundo foco.

Ejercicio 9: Un foco, dos tangentes y la distancia focal.

- Simétrico del foco dado respecto a las dos tangentes, S_1 y S_2 .
- Hallamos la mediatriz de S_1 y S_2 .
- Circunferencia de centro F y radio la distancia focal.
- La intersección de la mediatriz con la circunferencia nos da el segundo foco.

Ejercicio 15: El centro, dos tangentes y $2a$.

- Circunferencia de centro O y radio a .
- Hallamos los puntos de intersección de la circunferencias con las tangentes.
- Perpendicular a cada tangente que pasa por su respectivo punto de intersección.
- Donde se corten las perpendiculares son los focos.
- Tenemos los dos focos y una tangente utilizamos la macro.

Ejercicio 16: Los vértices del eje focal y una tangente.

- Trazamos el eje focal, recta que pasa por los vértices dados.
- El punto medio de los vértices es el centro O .
- Circunferencia de centro O y radio hasta los vértices.
- Puntos de corte entre la circunferencia y la tangente.
- Perpendiculares a la recta tangente que pasa por dichos puntos.
- Puntos de corte perpendiculares y el eje focal nos dan los focos.
- Tenemos los dos focos y una tangente, macro.

Ejercicio 21: Un foco, dos tangentes y la longitud del eje menor.

- Simétricos del foco respecto a las dos tangentes, S_1 y S_2 .
- Mediatriz de S_1 y S_2 .
- Circunferencia centro F y radio $2b$.
- Intersección circunferencia y mediatriz, nos dan dos focos posibles.

3. EJERCICIOS DE HIPÉRBOLAS

Ejercicio 1: Los dos focos y una tangente.

- Simétrico del foco f_1 respecto a la tangente, S_1 .
- Unimos este simétrico con el otro foco, $2a$.
- Distancia entre los dos focos, distancia focal.
- Punto medio entre los dos focos, el centro O .
- Circunferencia centro O y radio a , su intersección con el eje focal nos da los vértices A_1 y A_2 .
- Tomamos un punto exterior X a A_1A_2 .
- Circunferencia de centro f_1 y radio XA_1 , circunferencia de centro f_2 y radio XA_2 . Punto de intersección están en la cónica.
- Tenemos cinco puntos podemos trazar la cónica.

Ejercicio 2: Un foco y tres tangentes.

- Simétrico del foco respecto a las tangentes S_1 , S_2 y S_3 .
- Mediatriz de S_1 y S_2 , mediatriz S_1 y S_3 .
- Punto de corte de las mediatrices el segundo foco.
- Dos focos y una tangente, aplicamos la macro del ejercicio anterior.

Ejercicio 23: Un foco, una asíntota y $2a$.

- Hacemos el simétrico del foco respecto de la asíntota, s_a .
- Trazamos la paralela a las asíntota por el simétrico s_a .
- Circunferencia de centro s_a y radio $2a$.
- Puntos de intersección de la circunferencia con la asíntota nos dan los posibles focos.

Ejercicio 25: Un foco, una asíntota y una tangente.

- Simétrico del foco respecto de la asíntota, as .
- Simétrico del foco respecto a la tangente, st .
- Mediatriz as y at .
- Paralela a la asíntota que pasa por as .
- Punto de corte de la paralela con la mediatriz da el segundo foco.
- Dos focos y una tangente, aplicamos la macro.

4. EJERCICIOS DE PARÁBOLAS

Ejercicio 27: El foco, una tangente y un punto

- Simétrico del foco respecto de la recta tangente, s .
- Circunferencia de centro el punto dado P y radio hasta el foco.
- Punto medio del punto P y s .
- Circunferencia de centro el punto medio hasta P .
- Puntos de corte entre las dos circunferencias.
- Rectas que pasan por el punto s y por los puntos de corte anteriores dan las posibles directrices.
- Tenemos directrices y el foco, mediante la macro obtenemos dos posibles parábolas.

Ejercicio 28: La directriz, tangente y un punto

- Trazamos la perpendicular a la directriz que pasa por el punto dado P .
- Punto de intersección de la directriz con esta perpendicular, X .
- Circunferencia de centro P y radio hasta el punto X .
- Recta simétrica de la directriz con respecto a la recta tangente.
- Puntos de corte de esta recta simétrica con la circunferencia, posibles focos.
- Foco y directriz, utilizamos la macro y obtenemos las posibles parábolas.

Ejercicio 29: El foco y dos tangentes

- Hallamos el simétrico del foco con respecto a las tangentes dadas S_1, S_2
- Trazamos la recta que pasa por dichos puntos y obtenemos la directriz
- Tenemos el foco y la recta directriz podemos utilizar la macro.

Ejercicio 30: La directriz y dos tangentes

- Hallamos las rectas simétricas de la directriz respecto a cada una de las tangentes.
- El punto de intersección de estas nuevas rectas es el foco.
- Tenemos el foco y la directriz podemos aplicar la macro.

Ejercicio 32: La tangente en el vértice y otras dos.

- Hallamos los puntos de corte de cada una de las tangentes con la tangente del vértice, obtenemos los puntos a, b .
- Trazamos la perpendicular de cada una de las tangentes que pasa por sus respectivos puntos de intersección anteriormente hallados.
- El punto de intersección de estas nuevas rectas es el foco.
- Hallamos el simétrico del foco con respecto a las dos tangentes
- La recta que pasa por estos dos simétricos es la directriz.
- Tenemos el foco y la directriz utilizamos la macro.

Ejercicio 33: Cuatro tagentes cualesquiera.

- Llamamos a las tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 ,
- Consideramos la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por $t_1 \cap t_2 = a, t_1 \cap t_3 = b, t_2 \cap t_3 = c$
- Consideramos la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por $t_1 \cap t_3 = b, t_1 \cap t_4 = d, t_3 \cap t_4 = e$
- Consideramos la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por $t_2 \cap t_3 = c, t_2 \cap t_4 = f, t_3 \cap t_4 = e$
- Punto común de las tres circunferencias es el foco.
- Simétrico del foco con respecto dos de las tangentes, la recta que pasa por ellos es la directriz.